Uvođenje pojma određenog integrala u srednjoškolskoj nastavi matematike[1]

Ivana Božić [2], Tomislav Šikić[3]

Uvod

S pojmom integral i integralnim računom učenici se prvi put susreću u četvrtom razredu srednje škole. S obzirom da tada nemaju dovoljno matematičkog znanja za razumijevanje pojmova kao što su supermum, infimum, Darbouxove sume, donji i gornji Riemannov integral - autori srednjoškolskih udžbenika vješto nastoje izbjeći njihovo korištenje.

U prvome dijelu ovoga rada uspoređeni su udžbenici za četvrti razred srednje škole sljedećih autora:

- Neven Elezović (vidi [3])
- Sanja Antoliš, Aneta Copić, Nevenka Antončić (vidi [4], [5])
- Hrvoje Kraljević i Zvonimir Šikić (vidi [6])

Uvođenjem Bolonjskog procesa na PMF-Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu došlo je do značajnih promjena u programu preddiplomskog studija Matematika - nastavnički smjer. U ovom članku dosta prostora posvetit će se zanimljivom pristupu uvođenja integralnog računa u udžbeniku S. Langa, *A first course in calculus* [7], koji se koristi za uvodni kolegij u matematičku analizu na mnogim renomiranim sveučilištima. Rad zaključujemo pristupom koji se predavao u sklopu kolegija Diferencijalni i integralni račun 1 (na osnovi spomenutih smjernica) u drugom (ljetnom) semestru prve godine preddiplomskog studija matematike, smjer nastavnički, kao početni kolegij matematičke analize. Pristup ima dodirnih točaka sa svim prije navedenim udžbenicima, stoga se može primijeniti i u srednjoškolskoj nastavi. Štoviše uvođenjem domene infinitezimalni račun u NOK-u [11] upravo problematika uvođenja učenika u diferencijalni i integralni račun ima veliku važnost.

---

[1]Ovo je drugi dio članka napisanog na osnovi diplomskog rada Ivane Božić (mentor T. Šikić) obranjenog 2009. godine na Diplomskom studiju Matematika, smjer nastavnički (PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu). Prvi dio objavljen je u Poučku broj 48 (prosinac 2011.)

[2]Ivana Božić, Tehničko veleučilište u Zagrebu – Graditeljski odjel

[3]Tomislav Šikić, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu

Završni dio članka smatramo značajnim za buduće mlade profesore čije će se obrazovanje i znanje o diferencijalnom i integralnom računu zasnivati na spomenutoj koncepciji u kojoj spomenuti udžbenici S. Langa imaju značajni trag. Stoga je usporedba spomenutih (i inih) srednjoškolskih udžbenika te njihova komparacija s udžbenicima Prof. Kurepe [1] i s novim kolegijem Diferencijalni i integralni račun 1 [12] od presudne važnosti za kvalitetno uvođenje pojma integrala u srednjim školama.

5. Udžbenik S. Lang - Riemannov integral

Udžbenik *A first Course in Calculus* autora S. Langa [7], koji prati uvodni kolegij u matematičku analizu na mnogim renomiranim sveučilištima, vješto izbjegnutim korištenjem nekih pojmova nudi zanimljiv pristup ovoj temi. Autor započinje definiranjem neodređenog integrala na sljedeći način:

Definicija 12. *Neka je $f(x)$ funkcija definirana na intervalu I.* ***Neodređeni integral*** *funkcije f je funkcija F sa svojstvom: $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$. Ako je $G(x)$ neodređeni integral od f, i vrijedi $G'(x) = f(x)$, tada za svaki x iz intervala I slijedi $F(x) = G(x) + C$.*

U nastavku udžbenika autoru je nužna što jednostavnije definirana neprekidna funkcija, pa se koristi sljedećom definicijom:

Definicija 13. *Funkcija $f(x)$ je neprekidna ako $\forall x \in D_f$ vrijedi $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $[a, b]$ je neprekidna u točki a ako za $h > 0$ vrijedi $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.*

Svaka derivabilna funkcija je neprekidna.

Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija definirana na intervalu $[a, b]$. Želimo naći funkciju $F(x)$ koja je derivabilna na intervalu $[a, b]$, tako da vrijedi $F'(x) = f(x)$.

Pretpostavimo da je funkcija $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Sa $F(x)$ označimo funkciju koja računa površinu ispod grafa funkcije f na intervalu $[a, x]$, $a \leq x \leq b$.

Teorem 11. *Funkcija $F(x)$ je derivabilna, a njezina derivacija iznosi $f(x)$.*

Teorem 12. *Ako je G neka funkcija na intervalu $a < x < b$, takva da vrijedi $G'(x) = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $\forall x$, tada je površina ispod grafa funkcije f između $x = a$ i $x = b$ jednaka $G(b) - G(a)$.*

U želji da uvede pojam integrala, autor aproksimira krivulju po dijelovima konstantnom funkcijom (tzv. *step* funkcijom).

Definicija 14. *Particija intervala $[a, b]$ je niz brojeva $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ itd. $x_i \leq x_{i+1}$, $i = 0, \ldots n-1$. Particijom dijelimo interval na mnogo malih intervala $[x_i, x_{i+1}]$.*

Neka je f neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Neka je c_i proizvoljna točka iz intervala $[x_i, x_{i+1}]$. Tada definiramo sumu $R = f(c_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(c_{n-1})(x_n - x_{n-1})$, koju autor naziva **Riemannova suma**. Vrijednosti $f(c_i)$ i Δx_i interpretiramo kao visinu pravokutnika i duljinu intervala $[x_i, x_{i+1}]$.

U nastavku autor koristi pretpostavku da će funkcija na infinitezimalnim segmentima biti monotona. Oslanja se na Bolzano-Weierstrassov teorem.

Neka je s_i proizvoljna točka intervala $[x_i, x_{i+1}]$, tako da je $f(s_i)$ **maksimum** funkcije f na tom intervalu. Ako je P particija intervala $[a, b]$ dana djelišnim točkama $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, tada sumu $G_a^b(P, f) = f(s_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(s_{n-1})(x_n - x_{n-1})$ zovemo **gornja suma** funkcije f.

Neka je t_i proizvoljna točka intervala $[x_i, x_{i+1}]$, tako da je $f(t_i)$ **minimum** funkcije f na tom intervalu. Sumu $D_a^b(P, f) = f(t_0)(x_1 - x_0) + \ldots + f(t_{n-1})(x_n - x_{n-1})$ zovemo **donja suma** funkcije f. Svaka Rimannova suma nalazi se između donje i gornje sume. Povećavamo li razdiobu intervala $[a, b]$, vidimo da se vrijednost donje sume povećava, a gornje smanjuje.

Teorem 13. *Neka je f neprekidna funkcija na intervalu* $[a, b]$. *Neka je* $P(x_0, \ldots, x_n)$ *particija intervala* $[a, b]$. *Ako je* $\overline{x}$ *bilo koji broj iz intervala* $[a, b]$ *i Q nova particija koja se sastoji od particije P i* $\overline{x}$, *tada je* $D_a^b(P, f) \le D_a^b(Q, f) \le G_a^b(Q, f) \le G_a^b(P, f)$.

Slijedi da je svaka donja suma manja ili jednaka od bilo koje gornje sume.

Definicija 15. *Neka je f neprekidna funkcija na intervalu* $[a, b]$. *Postoji jedinstveni realni broj I koji je veći ili jednak od svih donjih, a manji ili jednak od svih gornjih suma. Nazivamo ga* ***određenim integralom*** *funkcije f.*

Neka je P particija. Maksimalnu duljinu intervala $[x_i, x_{i+1}]$ autor naziva **veličinom** particije. Ukoliko podijelimo interval $[0, 1]$ na n manjih intervala iste duljine $\frac{1}{n}$, veličina particije je $\frac{1}{n}$.

Teorem 14. *Neka je f neprekidna funkcija na intervalu* $[a, b]$. *Ukoliko je veličina particije P dovoljno mala, donje sume* $D_a^b(P, f)$ *i gornje sume* $G_a^b(P, f)$ *približavaju se integralu* $\int_a^b f$.

Propozicija 1. *Ako su M, m brojevi za koje vrijedi* $m < f(x) < M$ *za svaki x iz intervala* $[b, c]$, *onda vrijedi* $m(c - b) \le \int_b^c f \le M(c - b)$.

Teorem 15. ***Fundamentalni teorem***

Neka je funkcija f neprekidna na intervalu I. Neka je funkcija F definirana formulom $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. *Tada je F derivabilna i njezina je derivacija* $F'(x) = f(x)$.

6. Diferencijalni i integralni račun

Rad zaključujemo pristupom koji sa svim prije navedenim udžbenicima ima dodirnih točaka, a predaje se u ljetnom semestru prve godine preddiplomskog studija matematike na nastavničkom smjeru u sklopu kolegija Diferencijalni i integralni račun 1. Kao uvod u temeljne ideje integriranja osvrnimo se na vezu prevaljena puta i brzine pri pravocrtnom gibanju. Poznato je da je trenutna brzina vremenska derivacija puta. Stoga za proizvoljno malu promjenu Δt možemo pisati $\text{brzina} = v \approx \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ili ekvivalentno

$$\Delta s \approx v\Delta t. \qquad (14)$$

Ako je brzina v konstanta tijekom nekog vremenskog intervala Δt, onda je aproksimacija u formuli (14) zapravo jednakost, pa je $\Delta s = v\Delta t$, i problem je riješen u tom vremenskom intervalu. Ako se tijelo giba konstantnom brzinom v_1 i tijekom početnog vremenskog intervala Δt_1, brzinom v_2 tijekom sljedećeg vremenskog intervala Δt_2, te brzinom v_n tijekom posljednjeg vremenskog intervala Δt_n, tada je prevaljeni put određen sumom

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i.$$

Ako se tijelo ne giba konstantnom brzinom unutar vremenskih intervala, nego se brzina gibanja stalno mijenja, tada se smanjivanjem Δt_i prijeđeni put može aproksimirati pomoću sume $\Delta s = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i$. Analizirajući pristup pojmu Riemannova integrala na kolegiju Diferencijalni i integralni račun 1, jasno je da je uvod preko rješavanja problema prevaljenog puta za nejednoliko gibanje svakako preporučljiv. Štoviše, on na prirodni način daje poveznicu između stvarnog života i problema površine ispod grafa funkcije. Stoga nas ovakav pristup vodi prema pojmovima relativne površine, stepenaste funkcije i ekvidistantne subdivizije segmenta. Pojam relativne površine koja je manja ili jednaka od stvarne površine uvodimo da ne moramo uvoditi dodatni uvjet da je funkcija pozitivna.

Definicija 16. ***Relativna površina*** *područja u koordinatnoj ravnini jest površina dijela područja iznad osi x umanjena za površinu onog dijela područja koje je ispod osi x.*

Pojam stepenaste funkcije uvodimo da izbjegnemo pojmove infimuma i supremuma, Darbouxovih suma te gornjeg i donjeg R-integrala. Time ujedno, kao u udžbeniku [6], možemo definirati Riemannov integral za ograničene funkcije na segmentu bez uvjeta da je funkcija neprekidna.

Definicija 17. *Funkciju g definiranu na* $[a, b]$ *zovemo stepenasta funkcija, ako postoji razdioba (subdivizija) intervala* $[a, b]$ *točkama* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots < x_n = b$ *takva da je funkcija g konstantna na svakom od intervala* $\langle x_0, x_1 \rangle, \ldots \langle x_{n-1}, x_n \rangle$.

Definicija 18. *Neka je f ograničena funkcija na segmentu* $[a, b]$. *Broj D je* ***donja suma*** *funkcije f na* $[a, b]$ *ako postoji stepenasta funkcija s na* $[a, b]$ *takva da je*

$\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq s(x)$ *tako da je* $D = \sum_{i=0}^{n-1} d_i (x_{i+1} - x_i)$, *gdje je* d_i *vrijednost stepenaste funkcije na intervalu* $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$. *Analogno, broj G je* ***gornja suma*** *funkcije f na* $[a, b]$ *ako postoji stepenasta funkcija s na* $[a, b]$ *takva da je* $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq s(x)$, *tako da je* $G = \sum_{i=0}^{n-1} g_i (x_{i+1} - x_i)$, *gdje je* g_i *vrijednost stepenaste funkcije na intervalu* $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$.

Napomena 1.

Donja suma je sigurno manja ili jednaka od relativne površine funkcije *f* koja je pak manja ili jednaka od gornje sume, tj. $D < P_{rel}(f) < G$. Tražimo da donja suma bude što bliže gornjoj, tj. da za razliku suma vrijedi $(G - D) \to 0$. Budući da prilikom mjerenja vremena u svakodnevnom životu koristimo uzorkovanje s jednakim vremenskim razmacima, u nastavku teksta sve će subdivizije segmenta $[a, b]$ biti ekvidistantne. Stoga uvodimo sljedeću oznaku $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Koristeći gore navedenu oznaku, vrijedi ekvivalencija $n \to \infty \Leftrightarrow \Delta x \to 0$. Sumirajmo: određivat ćemo relativnu površinu ograničene funkcije na $[a, b]$ tako da što više približavamo gornje i donje sume koristeći ekvidistantnu razdiobu segmenta kada $\Delta x \to 0$. Prije uvođenja same definicije svakako je preporučljivo kroz primjer obraditi sve gore navedeno. Koristeći se gornjim definicijama i napomenom 1, možemo definirati pojam Riemannovog integrala za ograničenu funkciju na segmentu $[a, b]$.

Definicija 19. *Neka je f ograničena funkcija na* $[a, b]$. *Ako postoji jedinstveni realni broj I koji je veći od svih donjih i manji od svih gornjih suma po ekvidistantnim subdivizijama, tada kažemo da je funkcija f integrabilna. Broj I nazivamo* ***Riemannovim integralom*** *funkcije f.*

Napomena 2.

Važno je primijetiti da bi gornja definicija bila valjana i bez uvjeta da je subdivizija ekvidistantna i da su takve dvije definicije ekvivalentne.

Ukoliko je funkcija *f* neprekidna, možemo koristiti Bolzano-Weierstrassov teorem. Znamo da neprekidna funkcija poprima vrijednosti minimuma i maksimuma u točkama $x_i^{\max}$ *i* $x_i^{\min}$ na svakom podintervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Odaberimo sljedeće gornje i donje sume:

$$D^{\min} = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^{\min}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

$$G^{\max} = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i^{\max}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

Kada je $\Delta x \to 0$, slijedi $f\left(x_i^{\min}\right)\Delta x_i \approx P_i \approx f\left(x_i^{\max}\right)\Delta x_i$.

Koristeći se tako odabranim gornjim i donjim sumama, može se bez upotrebe pojma uniformne neprekidnosti na jednostavan način prikazati ideja dokaza Riemannovog teorema. Sam srednjoškolski nastavnik ovisno o zainteresiranosti učenika može Riemannov teorem prezentirati uz ideju dokaza ili pak kao nepobitnu činjenicu samo iskazati teorem. Podsjetimo se Riemannovog teorema koji kazuje da jedinstveni I postoji za svaku neprekidnu funkciju na segmentu.

Teorem 16. *Neka je f neprekidna funkcija na segmentu* $[a, b]$*. Tada je ona integrabilna u Riemannovom smislu.*

Uočimo kako je definiranje gornjih i donjih suma vrlo slično načinu koji smo susreli u udžbeniku [6]. Razlika je što oni ne koriste ekvidistantnu subdiviziju segmenta. Autorice [4], [5] koriste ekvidistantnu subdiviziju segmenta. Prisjetimo se motivacije u udžbenicima [3], [4], [5] prilikom uvođenja primitivne funkcije i Newton-Leibnitzove formule. Označimo s $P(x)$ funkciju koja je definirana kao mjera površine ispod grafa funkcije $y = f(x)$.

Iz $\Delta P \approx f(x)\Delta x$ pokazali smo da slijedi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Ovaj pristup treba iskoristiti kao motivaciju kako bi odmah nedvojbeno bilo jasno da postoji veza između mjerenja površine, integrala i postupka antiderivacije. Tada se pojam primitivne funkcije odmah može definirati.

Pretpostavimo da je f neprekidna na $[a, b]$ tj. $\forall x_0 \in \langle a,b \rangle \ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, u rubovima $\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a)$ i $\lim_{x \to b_-} f(x) = f(b)$.

Prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu, f je ograničena, poprima minimum i maksimum, te po Riemannovom teoremu znamo da je f integrabilna. Vrijedi $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$. Slijedi $m_i \le f(x) \le M_i$, te je $D_i \le D_i^{\max} \le f(x)\Delta x \le G_i^{\min} \le G_i$. Budući da je f integrabilna na $[a, b]$, znamo da postoji jedinstveni realni broj I, tako da vrijedi $\forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{i=1}^{n} D_i^{\max} \le I \le \sum_{i=1}^{n} G_i^{\min}$, te da bilo koja integralna suma za proizvoljno mali Δx teži integralu I, $\forall c_i \in [x_i, x_{i+1}], \Delta x \to 0, \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \to I$.

Tada vrijedi $\sum_{i=1}^{n} D_i^{\max} \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \le \sum_{i=1}^{n} G_i^{\min}$.

Specijalno, za $\overline{c_i} \in [x_i, x_{i+1}]$ znamo $F'(\overline{c_i}) = f(\overline{c_i})$. Upotrijebimo li Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, slijedi $F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\overline{c_i})\Delta x$, te $\sum_{i=1}^{n-1} f(\overline{c_i})\Delta x \to I$.

Upotrijebimo li isti teorem, skicirali smo dokaz temeljnog teorema integralnog računa tzv. Newton-Leibnizove formule.

$$\sum_{i=1}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1})$$
$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

Naglasimo da je tako prezentiran „dokaz” prihvatljiv i za učenike srednjih škola, te da je na taj način omogućeno dugoročno pamćenje ne samo iskaza teorema, nego i strukture dokaza.

Literatura

[1] S. Kurepa: Matematička analiza I i II, Zagreb, Školska knjiga (1997)

[2] B. Guljaš: Matematička analiza I i II, Zagreb, (2008), str.121 - str. 150.

[3] N. Elezović: Matematika 4, udžbenik za 4. razred gimnazije, Zagreb, Element (2002), str. 287- str. 318.

[4] S. Antoliš, A. Copić: Matematika 4, udžbenik za prirodoslovno-matematičku gimnaziju, Zagreb, Školska knjiga (2007), str.177. - str. 227.

[5] S. Antoliš, A. Copić, N. Antončić: Matematika 4, udžbenik za opće, jezične i klasične gimnazije, Zagreb, Školska knjiga (2008), str. 93. - str. 139.

[6] H. Kraljević, Z. Šikić: Matematika 4, udžbenik za 4. razred gimnazija i tehničkih škola, Zagreb, Profil (1995), str. 109. - str. 215.

[7] S. Lang: A first Course in Calculus, 5th ed, Springer (1986), str. 227 - str. 423.

[8] Crnjac, Jukić, Scitovski : Matematika, Osijek (1994), str. 228 - str. 283.

[9] N. Uglešić: Matematička analiza I, Split (2000), str. 128 - str. 165.

[10] L. Krnić, Z. Šikić: Račun diferencijalni i integralni, I. dio, Zagreb, Školska knjiga (1992)

[11] *Nacionalni okvirni kurikulum, Matematičko područje*; www.matematika.hr/kurikulum

[12] *Difrencijalni i integralni račun 1;* www.math.hr/Default.aspx?art=1757