IZ NASTAVNE PRAKSE

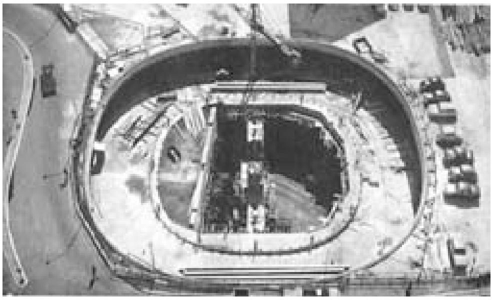
Od Pitagorine do Gielisove formule

Petar Mladinić[1]

U ovom ćemo članku prikazati otkriće *Gielisove formule* kojom se mogu modelirati/nacrtati ravninske figure/objekti i naznačiti daljnje poopćavanje te formule.

Piet Hein i superelipsa

Veliki danski matematičar, znanstvenik, izumitelj, dizajner, književnik i pjesnik **Piet Hein** (1905. - 1996.) sudjelovao je i pobijedio na natječaju 1959. godine svojim rješenjem prostornog uređenja *Sergels Torga* u Stockholmu. Njegov je prijedlog bio utemeljen na superelipsi s vrijednostima $n = 2.5$ i $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$.



Sergels Torg u Stockholmu

Ovako je Hein pjesnički objasnio svoj prijedlog:

Čovjek je biće koje crta linije, a sam se spotiče preko njih. U svakoj civilizaciji postojale su dvije tendencije; jedna prema ravnim linijama i pravokutnim uzorcima, a druga prema kružnim linijama. Postoje razlozi, mehanički i psihološki, za obje tendencije. Stvari načinjene od ravnih linija se uklapaju i štede prostor.

Međutim, lakše se krećemo, psihički i mentalno, oko stvari koje su načinjene od kružnih linija. No, mi smo u luđačkoj košulji pa moramo prihvatiti ili jedne ili druge, dok bi neki srednji oblik bio puno bolji. Problem kružnog toka u Stockholmu riješit će superelipsa. Nije definirana kao krug, niti kao kvadrat! Nije estetski zadovoljavajuća jer niti je okrugla, niti pravokutna, već nešto između. Ne znate što je to?!

[1]Petar Mladinić, V. gimnazija, Zagreb

Superelipsa

Superelipsa je krivulja čija je jednadžba u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu $\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1,\ a, b, n \in \mathbb{R}^+$.

Parametri a i b nazivaju se *polumjerima krivulje*.

Ova formula definira zatvorenu krivulju u pravokutniku duljine a i širine b, tj. za x i y vrijedi: $-a \le x \le a,\ -b \le y \le b$.

Za $n = 2$ imamo „klasičnu" elipsu. Za $n < 2$ superelipsa se također naziva *hipoelipsom*, a za $n > 2$ *hiperelipsom*.

Heinova superelipsa je samo poseban slučaj *Laméove krivulje*. **Gabriel Lamé** (1795.-1850.) bio je francuski matematičar. Godine 1818. definirao je i istražio svojstva krivulje zadane s

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1,\ a, b, m, n \in \mathbb{R}^+.$$

Parametarske jednadžbe Laméove krivulje su

$$x(\theta) = |\cos\theta|^{\frac{2}{m}} \cdot a \cdot \operatorname{sgn}(\cos\theta),$$

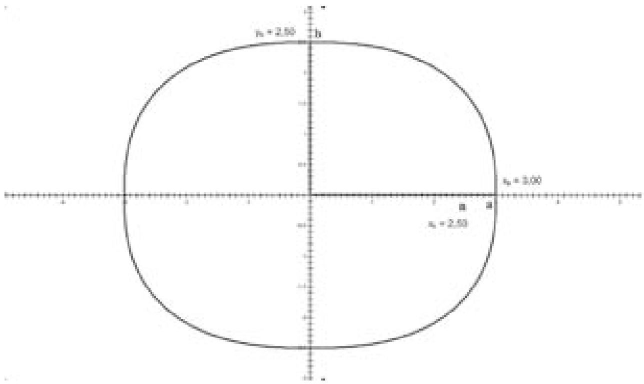
$$y(\theta) = |\sin\theta|^{\frac{2}{n}} \cdot a \cdot \operatorname{sgn}(\sin\theta).$$

Nabrojimo, primjera radi, neke od krivulja koje poznajemo, a koje su Laméove krivulje (ili superelipse).

parametri	eksponent	krivulja
$a = b$	$n = 2$	kružnica
$a \neq b$	$n = 2$	klasična elipsa
$a = b$	$0 < n < 1$	astroida
$a = b$	$n = 1$	kvadrat
$a = b$	$n > 1$	superelipsa

Kako se n povećava, tako se superelipsa „približava" pravokutniku (za $a \neq b$), odnosno kvadratu (za $a = b$).

Hein je pobijedio na natječaju za uređenje *Sergels Torga* superelipsom za koju je $n = 2.5$ i $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$ (v. sl.).



Slika 1.

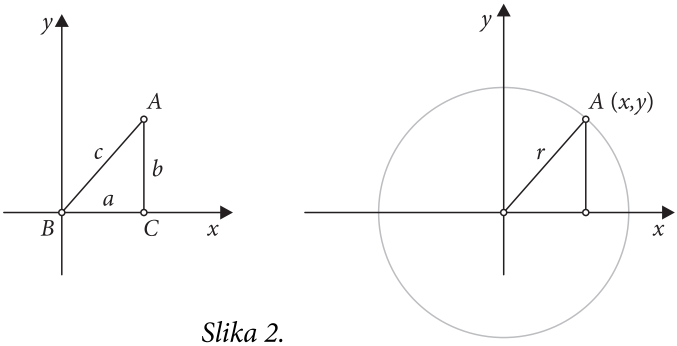
Hein je kasnije dizajnirao stol za koji je $n = 2.5$ i $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, te drugo pokućstvo. Godine 1968. superelipsa je uporabljena za oblikovanje *Azteca Olympic Stadiuma* u glavnom gradu Meksika.

Gielisova formula

Razmotrimo Pitagorinu formulu

$$a^2 + b^2 = c^2$$

smjestivši pravokutni trokut u Kartezijev pravokutni koordinatni sustav (v. sl.).



Slika 2.

Fiksiramo li duljinu hipotenuze $c = r$ i mijenjamo duljine kateta, vidjet ćemo da vrh A opisuje kružnicu čija je jednadžba

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

odnosno

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Promjenom zahtjeva da nazivnik bude jednak r dobit ćemo poznatu kanonsku jednadžbu elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

gdje su a i b duljine poluosi elipse.

Ekvivalentni zapis ove jednadžbe je

$$\left|\frac{x}{a}\right|^2+\left|\frac{y}{b}\right|^2=1.$$

Dopustivši druge vrijednosti eksponenta dobiva se

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{b}\right|^n=1,\ a, b, n\in\mathbb{R}^+.$$

Ovu krivulju Piet Hein je nazvao *superelipsom*.

Poopćenje ove formule prije Heina je načinio Gabriel Lamé. Njegova krivulja ima zapis

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1,\ a, b, m, n\in\mathbb{R}^+.$$

Pogledajmo u polarnom koordinatnom sustavu ovaj „proces" poopćavanja. Znamo da je „veza" između Kartezijevog i polarnog koordinatnog sustava dana s

$$x=r\cos\varphi,$$

$$y=r\sin\varphi.$$

Uvrstimo li ovo u superelipsu $\left|\frac{x}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{b}\right|^n=1$, nakon sređivanja dobivamo trigonometrijski zapis superelipse

$$r=\left(\left|\frac{\cos\varphi}{a}\right|^n+\left|\frac{\sin\varphi}{b}\right|^n\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Johan Gielis (1962.), belgijski botaničar i matematičar, na tragu Laméovog poopćenja eksponenata „uzeo" je tri nezavisna eksponenta n_1, n_2 i n_3. „Uveo" je u formulu i koeficijent $\frac{m}{4}$ dobivši tako više rotacijskih simetrija oko ishodišta O nego što je to uočljivo u četiri kvadranta Kartezijevog koordinatnog sustava.

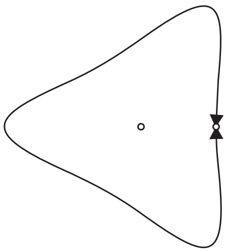
Dobio je

$$r=\left(\left|\frac{\cos\frac{m\varphi}{4}}{a}\right|^{n_2}+\left|\frac{\sin\varphi}{b}\right|^{n_3}\right)^{-\frac{1}{n_1}},\ a,\ b,\ n_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ n_2,n_3\in\mathbb{R}.$$

Nazvao ju je *superformulom*. Danas se ona naziva *Gielisovom formulom*.

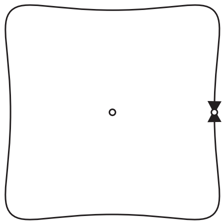
Razmotrimo nekoliko primjera u kojima je $a = b$ i:

$m = 3,\ n_1 = 4$



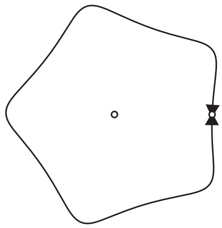
Slika 3.

$m = 4,\ n_1 = 12,\ n_2 = n_3 = 15$



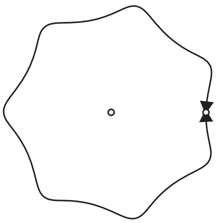
Slika 4.

$m = 5,\ n_1 = n_2 = n_3 = 4$

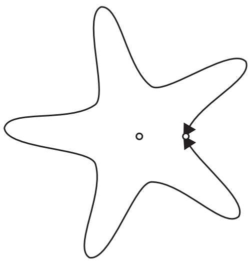


Slika 5.

$m = 7,\ n_1 = 10,\ n_2 = n_3 = 6$



Slika 6.



Slika 7.

Mijenjajući parametre dobivaju se različite krivulje. Gielis je u svojim radovima naveo velik broj zanimljivih krivulja i njihovih parametara.

Svoju superformulu učinio je svjetski poznatom 2003. godine kad je u *American Journal of Botany* objavio članak *A generic geometric transformation that unifies a large of natural and abstract shapes.*

Pomoću formule modelirao je oblike u prirodi. Primjerice, nacrtao je za

$$a = b \text{ i } m = 5,\ n_1 = 2,\ n_2 = n_3 = 7$$

(Za vježbu, ako se uzmu

$$m = 3,\ n_1 = 4.5,\ n_2 = n_3 = 10$$

predočuje *Nuphar luteum petiole*; za

$$m = 4,\ n_1 = 12,\ n_2 = n_3 = 15$$

dobiva se *Scrophularia nodosa*, a za

$m = 5,\ n_1 = n_2 = n_3 = 4$ *Equisetum*).

Sljedeći korak poopćavanja je računaje sa superformulom i elementarnim funkcijama. (Možemo ih međusobno zbrajati, množiti, potencirati ili komponirati!)

Gielis se odlučio za množenje superformule i elementarne funkcije $f(\theta)$. Dakle, razmatrao je umnožak

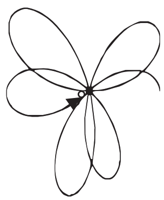
$$r = f(\theta) \cdot \left(\left| \frac{\cos \frac{m\varphi}{4}}{a} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin \varphi}{b} \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}} .$$

Ilustrirajmo to s dva primjera kad je:

a) $f(\theta) = \cos(2.5\theta)$, b) $f(\theta) = e^{0.2\theta}$.

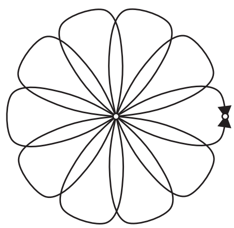
Za $a = b$, $f(\theta) = \cos(2.5\theta)$ i

$m = 2.5,\ n_1 = \dfrac{1}{1.3},\ n_2 = n_3 = 2.7$



Slika 8.

$m = 2.5,\ n_1 = n_2 = n_3 = 5$

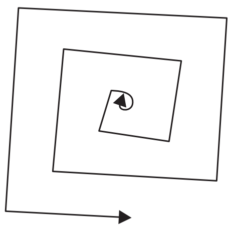


Slika 9.

dobivamo *Grandijeve superruže.*

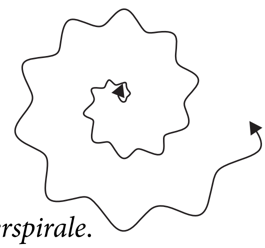
Za $a = b$, $f(\theta) = e^{0.2\theta}$ i

$m = 4,\ n_1 = n_2 = n_3 = 100$



Slika 10.

$m = 10,\ n_1 = n_2 = n_3 = 5$



Slika 11.

dobivamo *superspirale.*

Poopćavanje u ravnini na neki način ovdje završava. Sljedeći je korak sve ovo ponoviti/razmotriti u prostoru.

Razmatranje problema kako superformula modelira prostorne oblike izlazi iz okvira ovog članka. Na kraju, možemo se zapitati kako izgleda modeliranje utemeljeno na hiperboli, tj. kad u naše formule umjesto „+” upišemo „–”? **N**o, to je za neki drugi članak!

Literatura:

Johan Gielis: *Inverting the Circle*, Geniaal, Antwerpen, 2003.

Martin Gardner: *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton, New York, 2001.

E. W. Weisstein: *The CRC Encyclopedia of Mathematics*, Chapman and Hall, New York, 2009.