

# Vizualizacija prostora

NIKOL RADOVIĆ<sup>1</sup>, RENATA SVEDREC<sup>2</sup>, TANJA SOUCIE<sup>3</sup>, IVANA KOKIĆ<sup>4</sup>

*Geometrija je opipljivi prostor; to je onaj prostor u kojem dijete diše, živi i kreće se.  
To je prostor koji učenik mora naučiti poznavati, istražiti i osvajati,  
kako bi u njemu bolje živio, disao i kretao se.*

*H. Freudenthal*

U trodimenzijskom prostoru koji nas okružuje nalaze se geometrijske figure (predmeti) koje zapažamo i razlikujemo po obliku, boji, dimenzijama, međusobnom položaju i veličinama.



*Slika 1.*

Svjedoci smo činjenice da velika većina naših učenika ima problema s vizualizacijom prostora u kojem živimo, a još više s prebacivanjem iz „dvodimenzijskog svijeta” u trodimenzijski ili obratno. Netko će reći: ma čemu cijela ta priča, pa kome to treba?

<sup>1</sup>Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

<sup>2</sup>Renata Svedrec, OŠ Otok, Zagreb

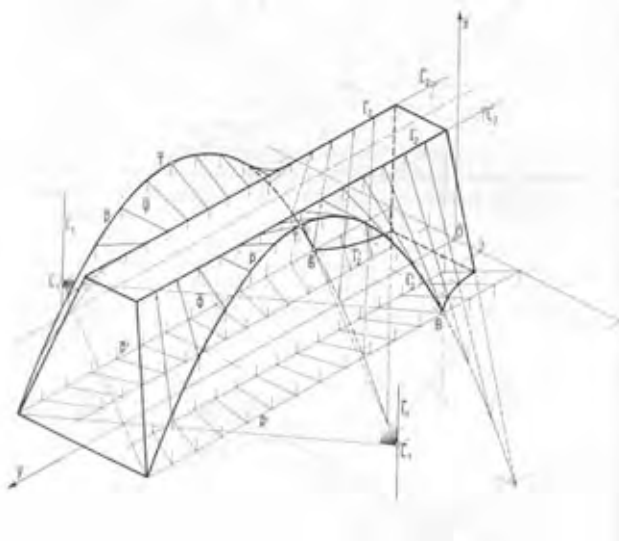
<sup>3</sup>Tanja Soucie, OŠ Gustava Krkleca, Zagreb

<sup>4</sup>Ivana Kokić, OŠ Trnsko, Zagreb

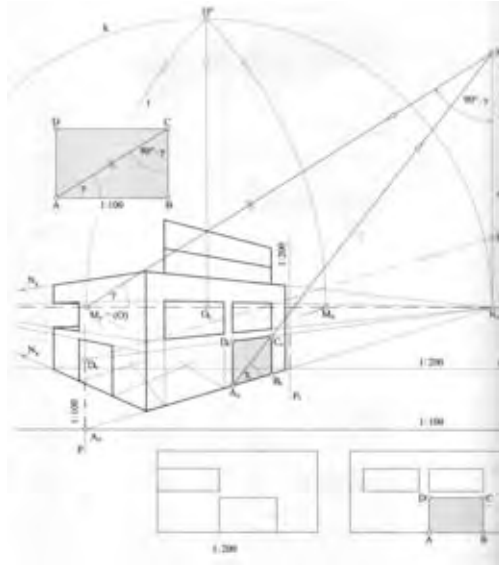


*Slika 2.*

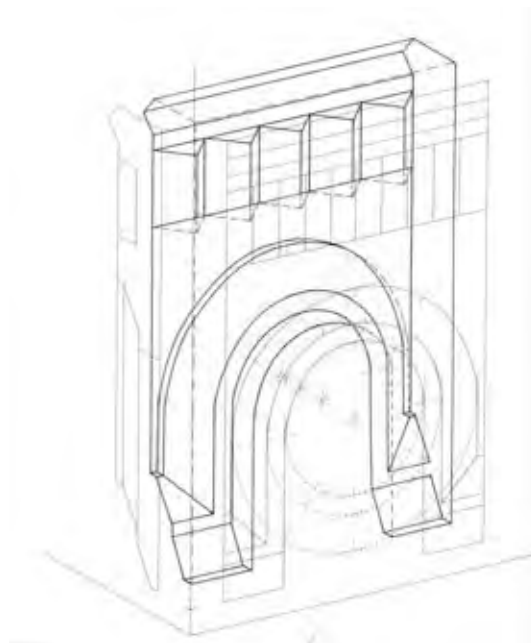
Matematika/geometrija? Vizualizacija prostora? Međutim, ista ta matematika/geometrija, tj. vizualizacija prostora potrebna je za svakodnevni život, primjerice na putu od škole do kuće, na izletu, u igri (šaha, potapanja brodova...), pri parkiranju automobila (landrover treba parkirati na mjesto dovoljno za „fiću”)... Isto tako, postoje struke koje bez vizualizacije prostora ne bi opstale: građevinari, arhitekti, geografi (kartografi), strojari, brodograditelji, astronomi, slikari, grafički dizajneri...



*Slika 3.*



Slika 4.



Slika 5.

Sposobnost *vizualizacije prostora*, tj. pamćenja oblika, veličina geometrijskih figura (predmeta), kao i uočavanje svih međusobnih položaja i odnosa, naziva se *prostorni zor*. Znanost koja se oslanja na prostorni zor, ali ga i podiže na višu razinu, naziva se *nacrtna/deskriptivna geometrija* ili *opisno mjerstvo*.

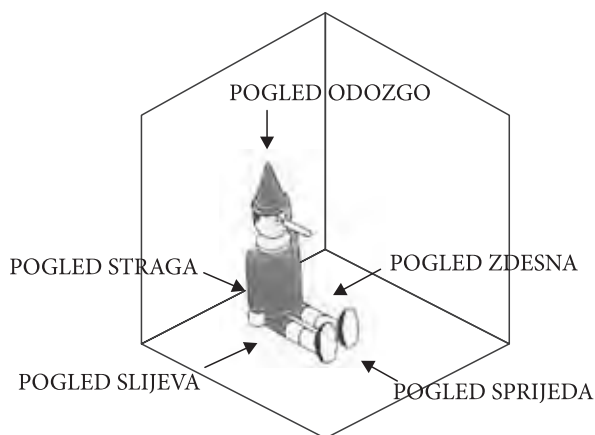
*Nacrtna geometrija je znanost o egzaktnim metodama koje omogućavaju prikazivanje prostornih figura trodimenzijskog prostora na nekoj dvodimenzijskoj ravnini i rješavanju prostornih problema u ravnini konstruktivno-geometrijskim putem.*

*Gaspard Monge (1746.-1818.)*

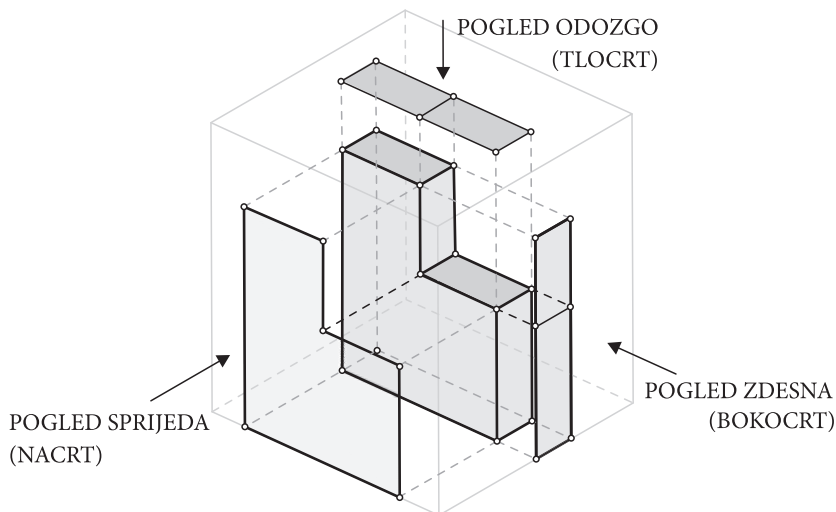
Dakle, metodama deskriptivne geometrije prikazujemo geometrijsku figuru crtežom u ravnini (list papira, ekran računala, ekran tableta...) tako da promatrač iz tog crteža može predočiti točnu sliku o toj geometrijskoj figuri. Ovaj je proces dvosmjernan: s jedne strane geometrijsku figuru prikazujemo kao dvodimenzijski crtež, a s druge strane iz crteža možemo stvoriti trodimenzijski prikaz geometrijske figure.

Danas, u doba razvoja velikog broja računalnih programa, uobičajeno je mišljenje kako poučavanje metoda deskriptivne geometrije nije potrebno jer postoje računalni programi koji će to sve riješiti. No, je li baš tako? Postoji li računalni program koji rješava baš sve, tj. daje li pritisak na tipku rješenje na ekranu? Utopija, zar ne? Srećom, neke od metoda deskriptivne geometrije bit će implementirane u Okvirni nacionalni kurikulum [1]. Naime, od najranijeg uzrasta, tj. od nižih razreda osnovne škole, planira se poučavanje nekih *metoda* deskriptivne geometrije [2] primjerenih uzrastu, nadogradnja u višim razredima osnovne škole, te kasnije kroz module u srednjoj školi.

Na sljedećim slikama (6. i 7.) prikazani su primjeri pogleda na geometrijsku figuru u nižim razredima, te nadogradnja i uvođenje standardnih projekcija *tlocrta*, *nacrta* i *bokocrta* (lijevog ili desnog). Pri nadogradnji dobro se poslužiti trikom, tj. geometrijsku figuru staviti u staklenu kocku pa je projicirati na strane te kocke, slika 7.



Slika 6.



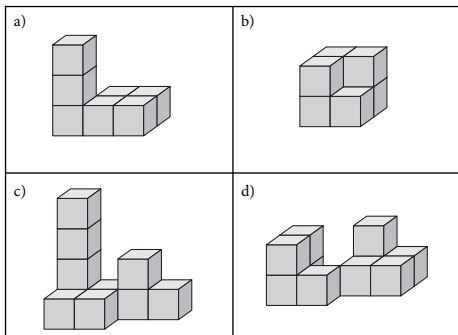
Slika 7.

Prije crtanja/konstruiranja projekcija geometrijskih figura, tj. dvodimenzijskog crteža, bilo bi dobro s učenicima proći kroz Aktivnosti. U Aktivnostima su geometrijske figure/tijela izgrađena od jednakih kockica.

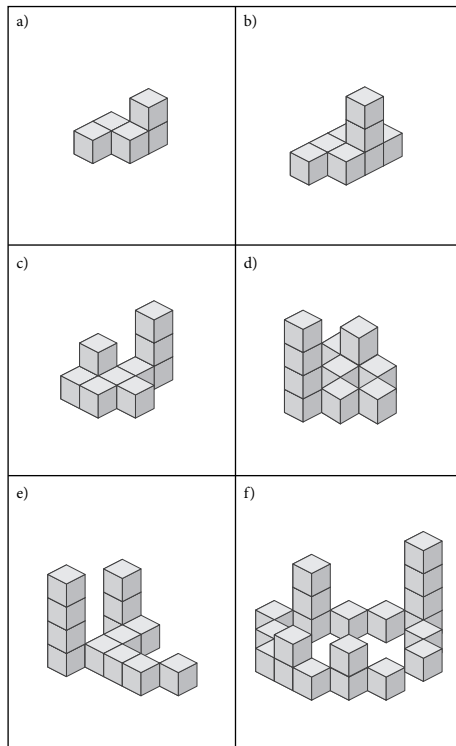
U Aktivnosti 1. A zadatak učenika je provjeriti točnost nacrtanih projekcija, te argumentirano objasniti točnost/netočnost nacrtanih projekcija. Posebno bi trebalo na primjeru geometrijske figure/tijela izgrađene od jedne kocke razjasniti zašto *ne vidimo* iste strane kocke iako su projekcije identične - kvadrati. Jedna od preporuka je dogovorno obojiti nasuprotne strane kocke istim bojama. Ne kretati dalje dok svima nije jasno da, iako su im projekcije iste, to nisu iste strane kocke. Ako na ovom jednostavnom primjeru *progleđaju*, poslije će biti manje problema. U slučaju da učitelj uoči poteškoće učenika u vizualizaciji najjednostavnije geometrijske figure, možda nije zgoroga vratiti se na početak, Aktivnost 0.

**Aktivnost 00**

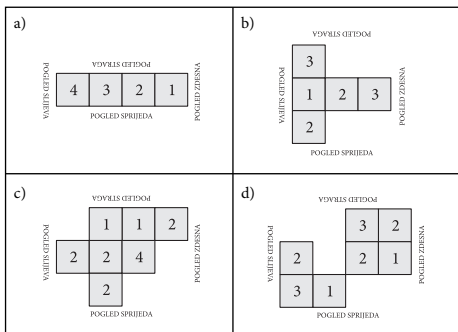
1. Od kockica složi tijelo. Opiši ga.
2. Pogledaj sliku i složi tijelo od kockica.



4. Tijelo na slikama je izgrađeno od jediničnih kockica. U kvadratnoj mreži nacrtaj njegov plan gradnje s upisanim „visinama“ pripadnih „stupaca“.



3. Na slici je prikazan plan gradnje tijela sastavljenog od kockica. Brojevi označavaju broj kockica u pojedinom „stupcu“ tj. njegovu „visinu“.



Tek po razjašnjenju ovog jednostavnog primjera crtaju se preostale projekcije popunjavanjem tablica. Ovim načinom rada učitelj dobiva povratnu informaciju koliko učenika „*vidi*“ i može povezati trodimenzijsko s dvodimenzijskim, uz vježbanje na geometrijskom/matematičkom argumentiranju (a to, priznat ćete, nije baš uvijek lako). Naravno da se s vremenom, nakon više provedenih aktivnosti, uočava napredak.

U Aktivnosti 1. B zadana su složenija tijela izgrađena od jediničnih kockica. Svakome od tijela treba do crtati projekcije, na kraju komentirati i razriješiti eventualne nedoumice.

U Aktivnosti 2. zadatak je iz nacrtanih projekcija nacrtati u kvadratnoj mreži geometrijsku figuru. No, neke od projekcija su „podvaljene“ i zahtijevaju razmišljanje, a isto tako može se dogoditi da iz istih projekcija učenici vide različite geometrijske figure.

**Aktivnost 01**

A

Neka su tijela složena od kockica sa stranama obojenim u različite boje (nasuprotne strane su istih boja) crvenu, plavu, crnu i žutu. U tablici su nacrtane neke od projekcija.

a) Provjeri da li su nacrtane projekcije točne. Objasni.

b) Popuni prazna mjesta.

TIJELO	POGLED SPRIJEDA	POGLED ODOZGO	POGLED S DESNA

B

Neka su tijela složena od kockica sa stranama obojenim u različite boje (nasuprotne strane su istih boja) crvenu, plavu, crnu i žutu.

Popuni tablicu.

TIJELO	POGLED SPRIJEDA	POGLED ODOZGO	POGLED S DESNA

Aktivnost 02

1. Prema projekcijama tijela skiciraj tijelo.

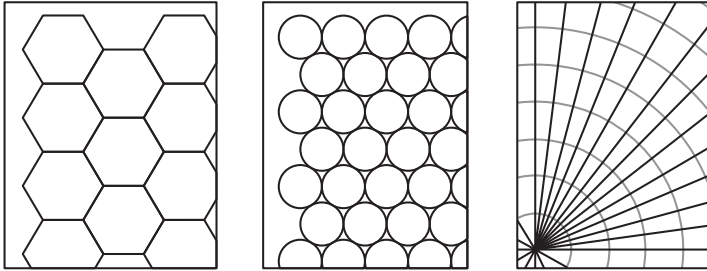
TJELO	POGLED SPRIJEDA	POGLED ODOZGO	POGLED S DESNA

TLOCRT	NACRT	BOKOCRT

Naš cilj nije proći kroz sve metode deskriptivne geometrije, nego pokazati kako je uporabom dinamične geometrije kao alata moguće crtati/konstruirati različite geometrijske figure i tako vizualizirati prostor. Pokazalo se da program dinamične geometrije kao alat omogućava učenicima crtanje/konstruiranje geometrijskih figura na ekranu (jednom od mogućih dvodimenzijskih oblika). Dinamičnost ima za posljedicu da se nacrtana/konstruirana geometrijska figura može „šetati” po ekranu, mijenjati dimenzije, te sagledati iz nekog „zgodnijeg” kuta. Kroz Aktivnosti 1. i 2. vidljivo je da su metode deskriptivne geometrije, crtanje projekcija geometrijskih figura na tri ravnine, kao i konstrukcija geometrijske figure iz projekcija (*kosa aksonometrija; ortogonalna i kosa projekcija*) „pojednostavljene” su primjenom izometrijske mreže točaka, a crtanjem projekcija na kvadratnoj mreži odmah su definirane dimenzije promatranih prostornih figura.

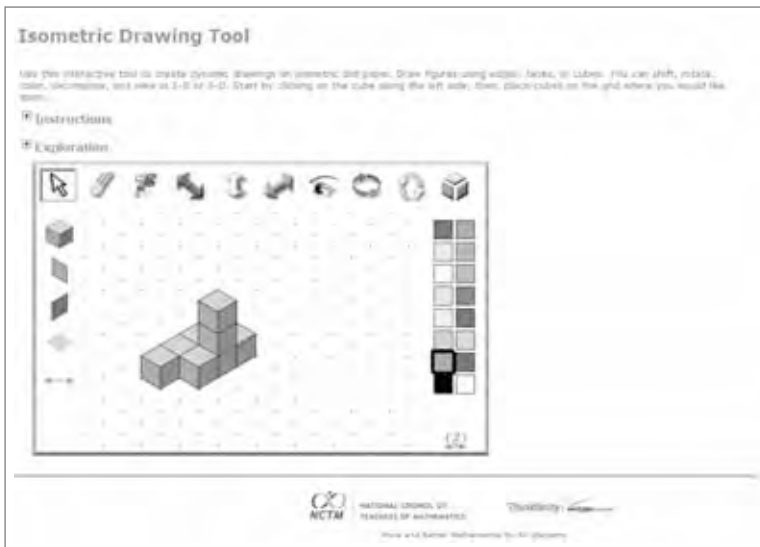


Na internetu se mogu naći već gotove izometrijske mreže točaka koje je moguće isprintati i na njima crtati/konstruirati geometrijske figure; primjerice, na adresi: <http://incompetech.com/graphpaper/> mogu se naći izometrijske mreže različitih oblika (šesterokuta, osmerokuta, polarni...), slika 8.



Slika 8.

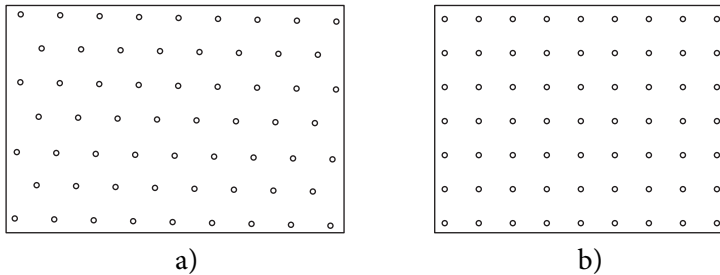
No, osim ovih statičnih mreža, moguće je naći i interaktivne izometrijske mreže. Primjerice, na adresi: <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125> nalazi se alat za izometrijski (3D) prikaz geometrijske figure, slika 9.



Slika 9.

Izometrijske mreže u/na kojima ćemo mi crtati/konstruirati geometrijske figure bit će trokutaste (slika 10.a) ili kvadratne (slika 10.b), već ranije konstruirane/nacrtane u programu dinamične geometrije i spremljene kao posebna datoteka koju možemo, prema potrebi, kopirati koliko puta želimo. Posebno treba naglasiti da su početne dvije točke konstrukcije označene nekom drugom bojom jer će one biti

pomične/dinamične, što će imati za posljedicu dinamičnost izometrijskog papira, tj. mijenjanje dimenzije, „okretanje” konstruirane geometrijske figure, a napose mogućnost provjere točnosti same konstrukcije.



Slika 10.

Primjeri koji slijede su pripremljene aktivnosti koje su učenici rješavali na satu. Učenicima nije bio stran rad matematike/geometrije na računalu, tako da u primjerima nisu dani koraci konstrukcija u programu dinamične geometrije. Svaki je učenik radio na svom računalu, brzinom koja njemu odgovara, s mogućnošću povratka na prethodno riješene primjere, kao i na neku od uvodnih Aktivnosti. Ovaj način rada omogućava učitelju komunikaciju sa svakim učenikom, tj. može doznati razmišljanja pojedinog učenika o koracima u rješavanju pojedinog zadatka, o „različitim” vide-njima projekcija *podmetnutih geometrijskih figura* (projekcije su zadane tako da ima više različitih točnih rješenja), kao i na kojem je stupnju njihov prostorni zor, a ima i mogućnost pravovremenog ispravljanja krivih koraka pomoću „okretanja” i „šeta-nja” figure, pa i njezinih projekcija na ekranu.

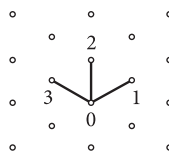
Na kraju su zadani zadaci za samostalni rad.

### Primjer 1.

Nacrtaimo kocku u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.

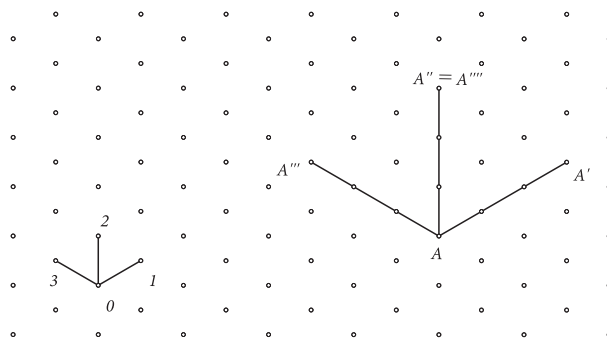
Rješenje:

- U lijevom donjem kutu nacrtamo/konstruiramo tri dužine  $\overline{01}$ ,  $\overline{02}$ ,  $\overline{03}$  sa zajedničkom točkom 0. Zvat ćemo ih *os-dužine*, slika 11. Tim dužinama bit će definirani/određeni smjerovi crtanja bridova kocke. Prisjetimo se: *nasuprotni bridovi kocke međusobno su usporedni*, a to svojstvo **moraju** imati i bridovi kocke nacrtane u izometrijskoj trokutastoj mreži. To ćemo svojstvo primjenjivati i u drugim primjerima pri crtanju/konstruiranju geometrijskih figura.



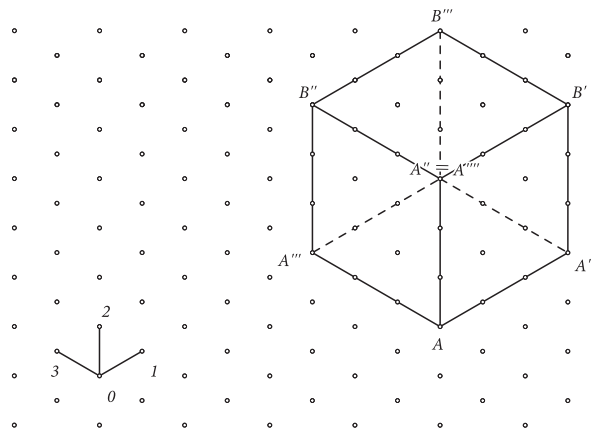
Slika 11.

- Odaberimo neku točku koja će biti vrh kocke i označimo je slovom  $A$ . Za koc-ku znamo da su njezine projekcije kvadrati iste duljine stranice, a to znači da će naša kocka imati duljinu stranice jednaku 3 mjerne jedinice, pri čemu je mjerna jedinica jednaka duljini jedne od dužina koje definiraju *os-dužine* (točke su vrho-  
vi jednakostraničnog trokuta, pa su duljine stranica/udaljenost točaka jednaka), primjerice  $|01|$ .
- Brid kocke  $\overline{AA'}$  usporedan je s dužinom  $\overline{01}$  i vrijedi  $|AA'| = 3|01|$ . Slično, brid kocke  $\overline{AA''}$  usporedan je s dužinom  $\overline{02}$  i vrijedi  $|AA''| = 3|01|$ . Brid kocke  $\overline{AA'''}$  usporedan je s dužinom  $\overline{03}$  i vrijedi  $|AA'''| = 3|01|$ .
- Četvrti vrh baze kocke točka  $A''''$  bit će identičan točki  $A''$ , slika 12.



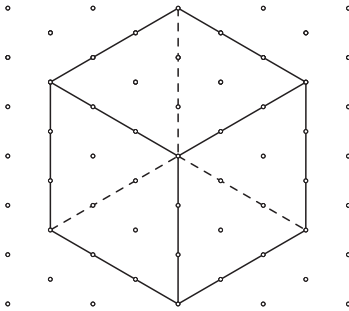
Slika 12.

- Bridovi kocke  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{A'''B''}$ ,  $\overline{A''''B''''}$  usporedni su s dužinom  $\overline{02}$  i duljine jednake  $3|01|$ .
- Bridovi kocke  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{AA''}$ ,  $\overline{AA'''}$ ,  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{A'''B''}$ ,  $\overline{A''''B''''}$ ,  $\overline{A''''B''}$ ,  $\overline{B''A''}$  su vid-  
ljivi pa ih crtamo punom crtom, dok su bridovi  $\overline{A'A''''}$ ,  $\overline{A''''A''''}$ ,  $\overline{A''''B''''}$  nevidljivi  
pa ih crtamo isprekidanom crtom, slika 13.
- Napomena: *kada bi kocka bila izrađena od žice, svi bi njezini bridovi bili vidljivi.*

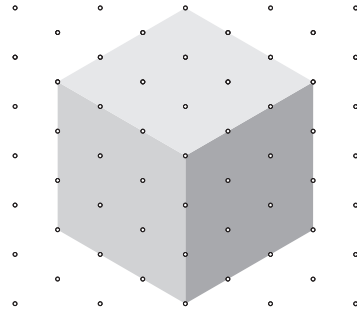


Slika 13.

- „Brisanjem” oznaka vrhova i *os-dužine*, slika 14., nacrtali/konstruirali smo kocku u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.
- Kako bismo pridonijeli trodimenzijskome prikazu, strane kocke obojit ćemo tonovima jedne boje, primjerice sive, slika 15.



Slika 14.

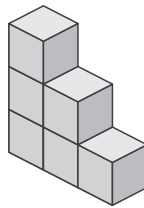


Slika 15.

- Time smo vizualizaciju iz nižih razreda osnovne škole, kada se preporuča bojenje strana kocke različitim bojama, dignuli na višu razinu.

**Primjer 2.**

a) Nacrtajmo projekcije geometrijske figure sastavljene od šest kockica sa slike 16.

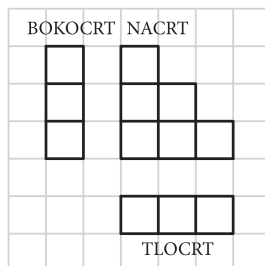


Slika 16.

b) Nacrtajmo/konstruirajmo tu geometrijsku figuru u izometrijskoj trokutastoj ravnini točaka.

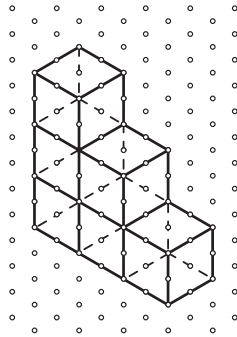
*Rješenje:*

- Projekcije nacrtajmo u kvadratnoj mreži, slika 17. Time su odmah definirane dimenzije za crtanje/konstruiranje geometrijske figure u izometrijskoj trokutastoj mreži.



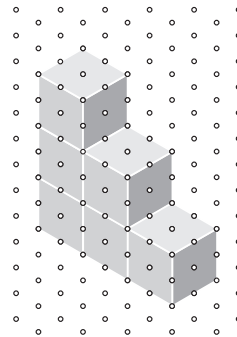
Slika 17.

- Kako je geometrijska figura sastavljena od kockica, ponavljamo konstrukciju iz **Primjera 1.**, slika 18.



Slika 18.

- Napomena. Pri crtanju/konstruiranju nevidljivih bridova dogodit će se da se preklapaju vidljivi i nevidljivi brid. Treba naglasiti da se uvijek crta vidljivi brid, tj. *puna crta*.
- Dodavanjem boje odnosno „brisanjem” nevidljivih bridova, konstruirana je geometrijska figura prema slici 16.

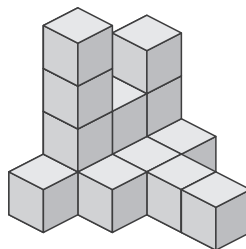


Slika 19.

### Zadatak 1.

Nacrtaj/konstruiraj:

- a) Projekcije tijela na slici 20.

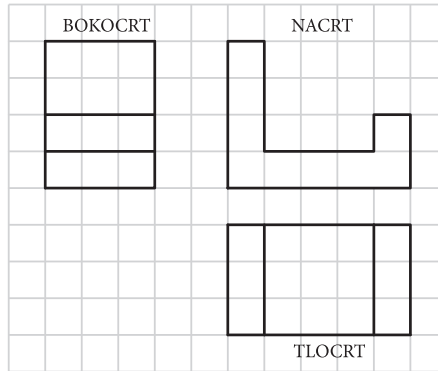


Slika 20.

- b) Nacrtaj/konstruiraj to tijelo u izometrijskoj trokutastoj mreži.

**Primjer 3.**

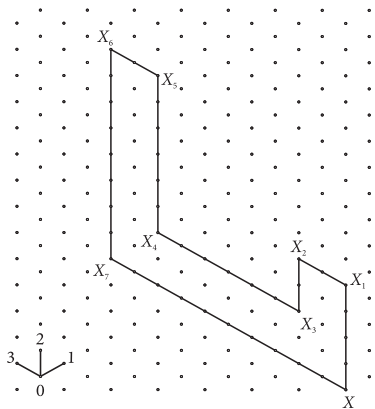
Prema projekcijama na slici 21. konstruirajmo geometrijsku figuru u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.



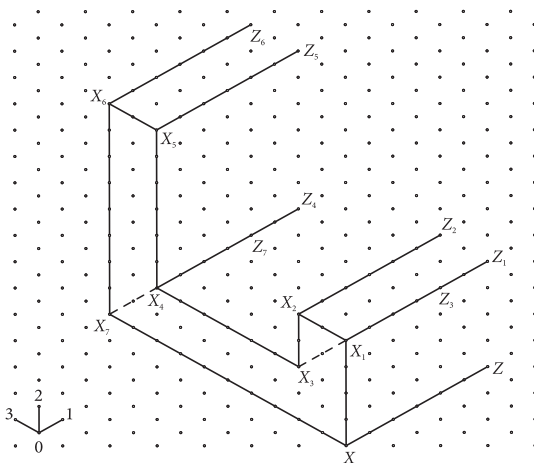
Slika 21.

Rješenje:

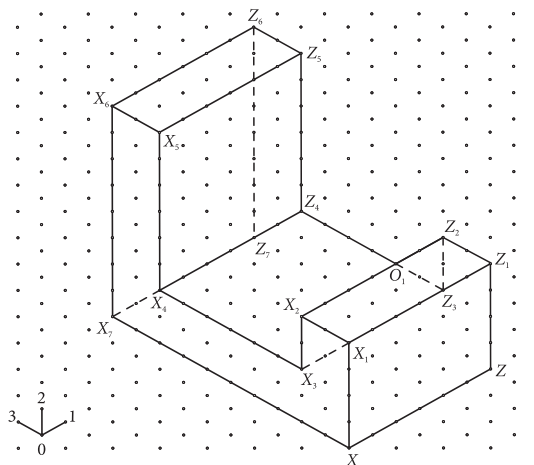
- Geometrijska figura na slici 21. nije sastavljena od kockica, ali je konstrukcija trodimenzijske slike u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka slična.
- U lijevom donjem kutu nacrtamo *os-dužine* i odaberemo neku točku. Neka to bude točka  $X$ . Od nje konstruiramo dalje.
- Konstruirajmo prvo „nacrt” geometrijske figure, pri čemu ćemo dimenzije iz projekcija udvostručiti.
- Brid  $\overline{XX_1}$  figure usporedan je s dužinom  $\overline{O_2}$ , a brid  $\overline{XX_7}$  usporedan je s dužinom  $\overline{O_3}$ .
- Bridovi  $\overline{X_1X_2}$ ,  $\overline{X_3X_4}$ ,  $\overline{X_5X_6}$  usporedni su s dužinom  $\overline{O_3}$ , a bridovi  $\overline{X_2X_3}$ ,  $\overline{X_4X_5}$ ,  $\overline{X_6X_7}$  usporedni su s dužinom  $\overline{O_2}$ , slika 22.
- Bridovi  $\overline{XZ}$ ,  $\overline{X_1Z_1}$ ,  $\overline{X_2Z_2}$ ,  $\overline{X_3Z_3}$ ,  $\overline{X_4Z_4}$ ,  $\overline{X_5Z_5}$ ,  $\overline{X_6Z_6}$ ,  $\overline{X_7Z_7}$  usporedni su s dužinom  $\overline{O_1}$  i sukladnih su duljina. No, neki bridovi (npr.  $\overline{X_1Z_1}$  i  $\overline{X_3Z_3}$ ) će se preklapati, pa će nevidljivi dio brida (isprekidana crta) biti dužina  $\overline{X_3X_1}$  crta do vidljivog dijela brida, slika 23.
- Bridovi  $\overline{Z_2Z_1}$ ,  $\overline{Z_4Z_5}$ ,  $\overline{Z_5Z_6}$  bit će vidljivi, dok će brid  $\overline{Z_3Z_4}$  dijelom biti vidljiv od točke  $Z_4$  do točke  $O_1$  (presjek bridova  $\overline{Z_3Z_4}$  i  $\overline{X_2Z_2}$ ) te nevidljiv od točke  $O_1$  do točke  $Z_3$ .
- Bridovi  $\overline{Z_3Z_2}$ ,  $\overline{Z_6Z_7}$  bit će nevidljivi, slika 24.
- „Brisanjem” oznaka vrhova i *os-dužine*, konstruirali smo geometrijsku figuru u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka prema projekcijama danim na slici 21.
- „Brisanjem” nevidljivih bridova te bojenjem tonovima sive boje, vizualizirali smo geometrijsku figuru, slika 25.



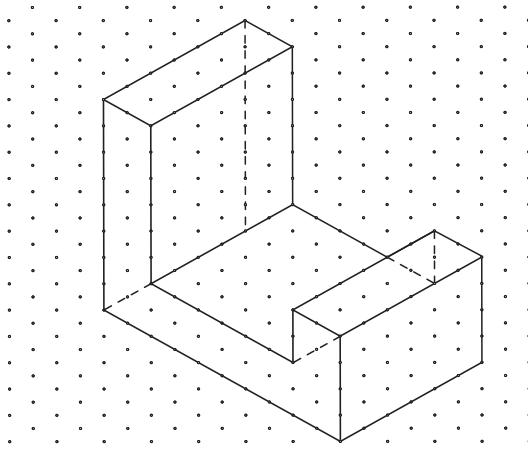
Slika 22.



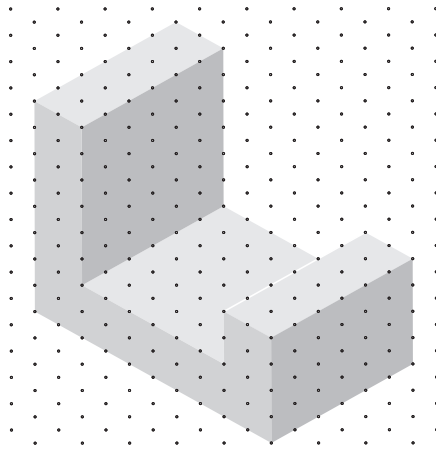
Slika 23.



Slika 24.



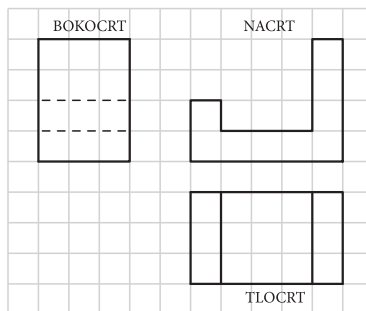
Slika 25.



Slika 26.

**Zadatak 2.**

Prema projekcijama na slici 27. konstruiraj geometrijsku figuru u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.

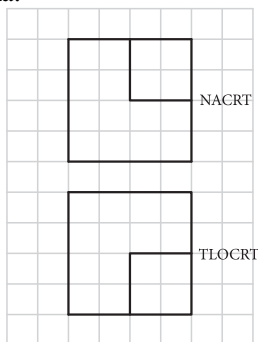


Slika 27.



**Primjer 4.**

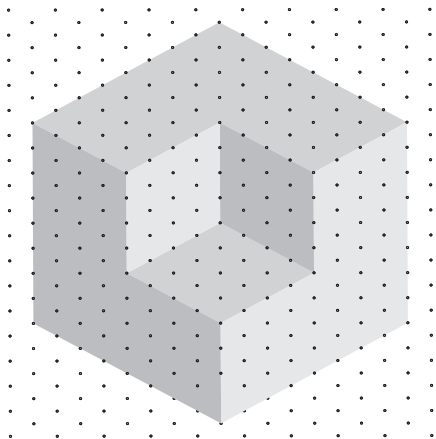
Na slici 28. su projekcije neke geometrijske figure. Konstruirajmo tu figuru u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.



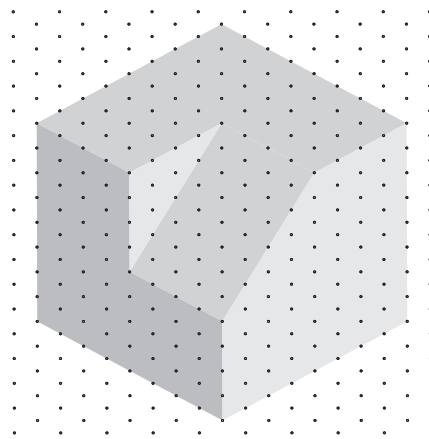
Slika 28.

*Rješenje:*

- Osnova ove geometrijske figure je kocka na kojoj se nešto dodaje ili oduzima (točnije bi bilo reći da se nešto izrezuje). Sama se konstrukcija zasniva na onoj iz Primjera 1.
- Na slikama 29. i 30. prikazana su učenička rješenja.



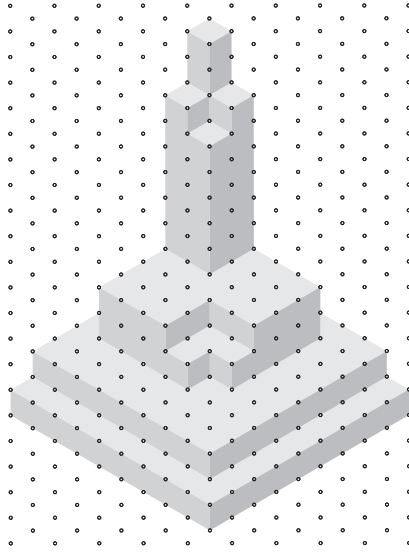
Slika 29.



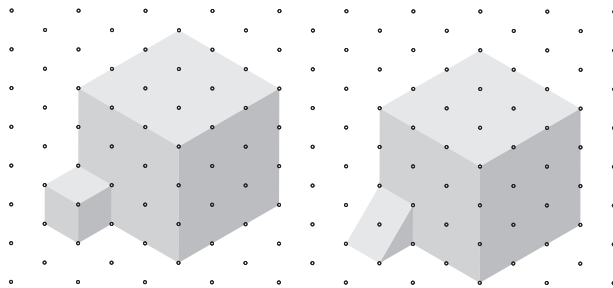
Slika 30.

- Oba su prikaza točna. Kako u zadatku nije zadana treća projekcija, rješenje ima više mogućnosti. Takve zadatke treba prokomentirati i prikazati svima sva rješenja koja su učenici konstruirali jer iz toga mogu samo naučiti i „progledati”.

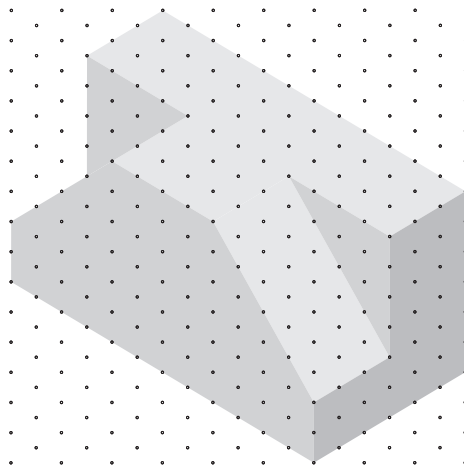
Na sljedećim su slikama učenički radovi.



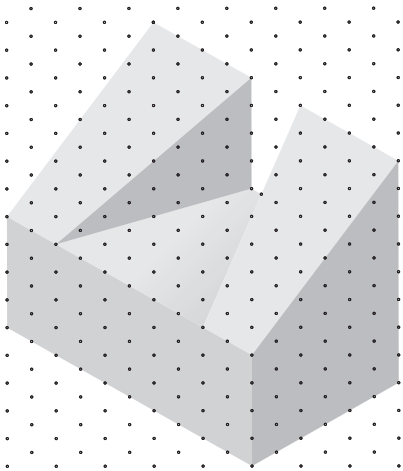
*Slika 31.*



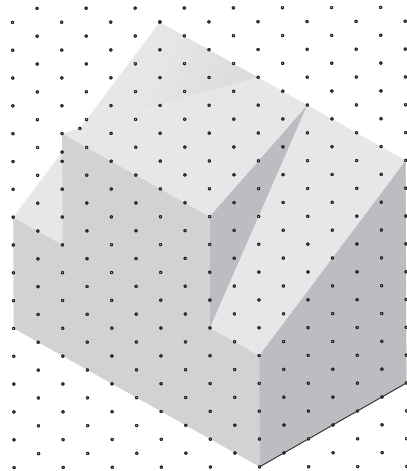
*Slika 32.*



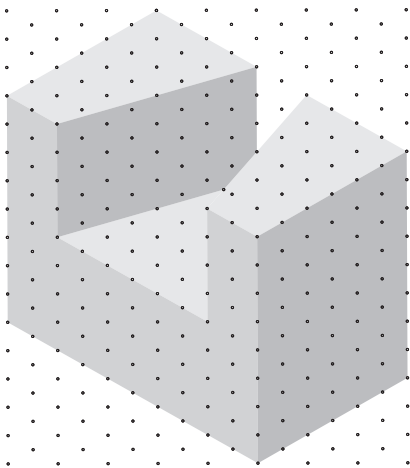
*Slika 33.*



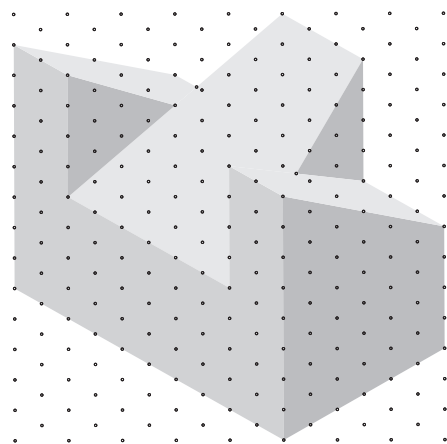
Slika 34.



Slika 35.



Slika 36.



Slika 37.

### Literatura:

- [1] \*\*\* Okvirni nacionalni kurikulum, Poučak 39, Zagreb, 2009.
- [2] A. Čižmešija, R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie. *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole*, Zbornik radova 4. Kongresa nastavnika matematike, Zagreb, HMD i Školska knjiga, 2010., 143 – 162.
- [3] V. Niče. *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

- [4] D. Palman. *Deskriptivna geometrija*, Element, Zagreb, 1996.
- [5] V. O. Gordon, M. A. Sementsov – Ogievski. *A Course in Descriptive Geometry*, MIR Publishers, Moscow, 1980.
- [6] R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, I. Kokić. *Tajni zadatak 008 – udžbenik i vježbenica s CD-om iz matematike za osmi razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [7] \*\*\* 101 ideja za projekt za The Geometer's Sketchpad, Key Curriculum Press, Proven grupa, Zagreb, 2006.
- [8] \*\*\* *A Guide to Effective Instruction in Mathematics – Geometry and Spatial Sense*, Ministry of Education, Ontario, 2005.
- [9] L. B. Triglia, S. Sammarone, R. Zizzo. *Disegno Tecnico – Metodo tradizionale – uso del computer*, Zanichelli, 1992.

**Internetske adrese:**

- [http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125/03.11.2011./](http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125/03.11.2011/)
- [http://incompetech.com/graphpaper/03.11.2011./](http://incompetech.com/graphpaper/)