Još neki dokazi leptirovog teorema

Šefket Arslanagić[1], Alija Muminagić[2]

U [2] su dana četiri razna dokaza **Leptirovog teorema (Butterfly's theorems)**, od kojih su dva čisto planimetrijska, jedan je dan pomoću trigonometrije, a jedan pomoću računala.

Ovaj teorem glasi:

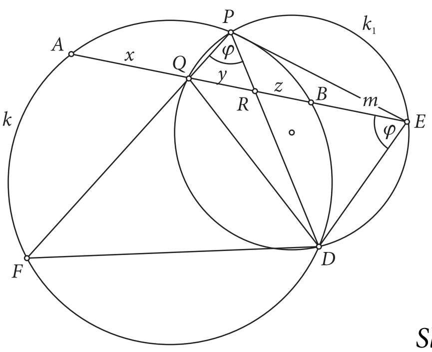
Neka je dana tetiva $\overline{AB}$ kružnice k, čije je polovište točka M. Točkom M nacrtane su dvije proizvoljne tetive, $\overline{EF}$ i $\overline{CD}$. Tetive $\overline{CF}$ i $\overline{ED}$ sijeku pravac AB u točkama Q i R. Tada je točka M ujedno i polovište dužine $\overline{QR}$, tj. $|MQ| = |MR|$.

Sada ćemo dati još četiri razna dokaza ovog teorema koristeći planimetriju, trigonometriju, Menelajev teorem i analitičku geometriju.

Dokaz 1. Najprije ćemo dokazati jednu lemu.

Lema 1. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{FD}$ dvije tetive kružnice k (bez zajedničkih točaka), a točka P je na luku $\widehat{AB}$ na kojemu se ne nalaze točke F i D. Pravci PF i PD sijeku tetivu $\overline{AB}$ u točkama Q i R. Tada izraz $\dfrac{|AQ|\cdot|RB|}{|QR|}$ ima konstantnu vrijednost, dok se točka P kreće lukom $\widehat{AB}$.

Dokaz. Neka kružnica k_1 opisana trokutu ΔPQD siječe produžetak tetive $\overline{AB}$ u točki E (slika 1.).



Slika 1.

[1]Šefket Arslanagić, Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu BiH
[2]Alija Muminagić, Nykøbing, Danska

Tada je $\varphi = |\measuredangle FPD| = |\measuredangle QPD|$ (tetiva $\overline{FD}$ je konstantne duljine). Četverokut $PQED$ je tetivni (upisan u kružnicu k_1) pa je $|\measuredangle QED| = |\measuredangle QPD| = \varphi$ (obodni kutovi nad istim lukom $\widehat{QD}$). Dakle, za sve položaje točke $P \in k$, kut $\measuredangle AED$ je konstantan, tj. kružnica opisana oko trokuta ΔPQD uvijek siječe produžetak tetive $\overline{AB}$ u točki E, bez obzira na položaj točke P.

Odavde slijedi da je $|BE| = m$, tj. konstante duljine. Na osnovi teorema o potenciji točke R u odnosu na kružnice k i k_1, imamo:

$$|AR| \cdot |RB| = |PR| \cdot |RD| = |QR| \cdot |RE|. \tag{1}$$

Označimo li da je $|AQ| = x$, $|QR| = y$, $|RB| = z$ i $|BE| = m$, dobivamo iz (1):

$$(x + y) \cdot z = y \cdot (z + m),$$

a odavde

$$xz + yz = yz + ym\text{, tj.}$$

$$\frac{xz}{y} = m(= \text{const})$$

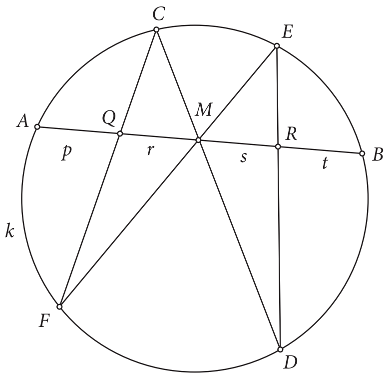
ili

$$\frac{|AQ| \cdot |RB|}{|QR|} = m(= \text{const})\text{, što je trebalo dokazati.}$$

Prijeđimo sada na dokaz Leptirovog teorema.

Prema dokazanoj lemi 1., imamo (slika 2.):

$$\frac{|AQ| \cdot |MB|}{|QM|} = \frac{|BR| \cdot |AM|}{|RM|}. \tag{2}$$



Slika 2.

Stavljajući u (2) da je $|AQ| = p$, $|QM| = r$, $|MR| = s$ i $|RB| = t$, dobivamo:

$$\frac{p(s+t)}{r} = \frac{t(r+p)}{s}. \tag{3}$$

Kako je točka M polovište dužine $\overline{AB}$, to je

$$r + p = s + t. \tag{$*$}$$

Sada iz jednakosti (3), zbog jednakosti ($*$), slijedi da je

$$\frac{p}{r} = \frac{t}{s},$$

a odavde je

$$\frac{p}{r} + 1 = \frac{t}{s} + 1, \text{ tj.}$$

$$\frac{p+r}{r} = \frac{t+s}{s},$$

te na osnovi jednakosti ($*$):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s},$$

odnosno

$$r = s, \text{ tj.}$$

$|MQ| = |MR|$, što je trebalo dokazati.

Napomena 1: Ako je $\overline{AB}$ promjer (dijametar) kružnice k, Leptirov teorem je trivijalan.

Dokaz 2. Opet ćemo dokazati jednu lemu.

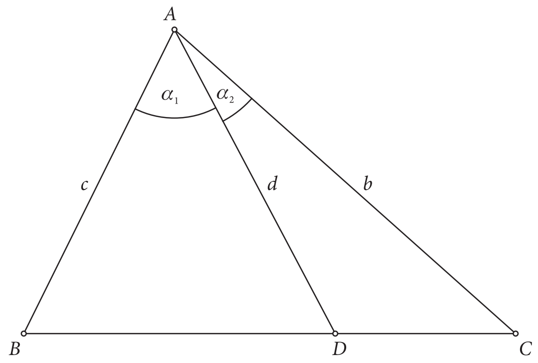
Lema 2. Neka točka D pripada stranici $\overline{BC}$ trokuta ΔABC i neka je $\alpha_1 = |\measuredangle BAD|$ i $\alpha_2 = |\measuredangle CAD|$. Tada vrijedi jednakost

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{|AD|} = \frac{\sin\alpha_1}{|AC|} + \frac{\sin\alpha_2}{|AB|}. \tag{4}$$

Dokaz. Imamo da je

$$p_{\Delta ABC} = p_{\Delta ABD} + p_{\Delta ADC}. \tag{5}$$

Neka je $|AB| = c$, $|AD| = d$ i $|AC| = b$ (slika 3.). Sada iz (5) slijedi:



Slika 3.

$$\frac{1}{2}bc\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2}cd\sin\alpha_1 + \frac{1}{2}bd\sin\alpha_2$$

$$\Leftrightarrow bc\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = cd\sin\alpha_1 + bd\sin\alpha_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{bcd} = \frac{cd}{bcd}\sin\alpha_1 + \frac{bd}{bcd}\sin\alpha_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{d} = \frac{\sin\alpha_1}{b} + \frac{\sin\alpha_2}{c},$$

a ovo je (4), što je trebalo dokazati.

Prijeđimo sada na dokaz Leptirovog teorema. Na osnovi teorema o potenciji točke M u odnosu na kružnicu k, vrijedi:

$$|MC| \cdot |MD| = |ME| \cdot |MF| = x\,. \qquad (**)$$

Primjenom leme 2. na trokut ΔMED, slijedi da je (sl. 4):

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{|MR|} = \frac{\sin a}{|MD|} + \frac{\sin\beta}{|ME|}, \qquad (6)$$

gdje je $|\measuredangle EMR| = |\measuredangle FMQ| = \alpha$, te $|\measuredangle DMR| = |\measuredangle CMQ| = \beta$ (vršni kutovi), a primjenom leme 2. na trokut ΔMCF slijedi:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{|MQ|} = \frac{\sin a}{|MC|} + \frac{\sin\beta}{|MF|}\,. \qquad (7)$$

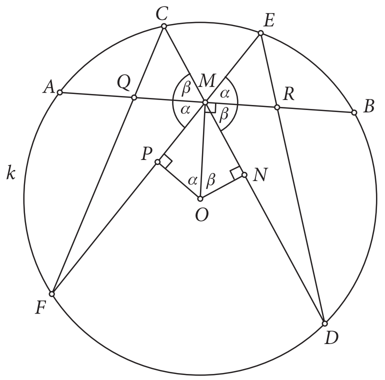
Nakon oduzimanja jednakosti (7) od (6) dobivamo:

$$\left(\frac{1}{|MR|}-\frac{1}{|MQ|}\right)\sin(\alpha+\beta)=\left(\frac{1}{|ME|}-\frac{1}{|MF|}\right)\sin\beta-\left(\frac{1}{|MC|}-\frac{1}{|MD|}\right)\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{|MQ|-|MR|}{|MR|\cdot|MQ|}\sin(\alpha+\beta)=\frac{|MF|-|ME|}{|ME|\cdot|MF|}\sin\beta-\frac{|MD|-|MC|}{|MC|\cdot|MD|}\sin\alpha,$$

a odavde zbog $(**)$:

$$\frac{|MQ|-|MR|}{|MR|\cdot|MQ|}\sin(\alpha+\beta)=\frac{|MF|-|ME|}{x}\sin\beta-\frac{|MD|-|MC|}{x}\sin\alpha. \tag{8}$$



Slika 4.

Neka je točka *O* središte kružnice *k* i neka su točke *P* i *N* nožišta okomica iz točke *O* na pravce *EF* i *CD*. Sada imamo:

$$|FP|=|PE|\Rightarrow|MF|-|MP|=|MP|+|ME|,$$

a odavde je

$$|MF|-|ME|=2|MP|. \tag{9}$$

Osim toga je $|\measuredangle POM|=|\measuredangle FMQ|=\alpha$ i $|\measuredangle NOM|=|\measuredangle DMR|=\beta$ (kutovi s okomitim kracima). U trokutu ΔOMP je $\cos\measuredangle OMP=\frac{|MP|}{|OM|}$, tj. $\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{|MP|}{|OM|}$, a odavde je:

$$|MP|=|OM|\cos(90^\circ-\alpha)=|OM|\sin\alpha. \tag{10}$$

Sada iz (9) i (10) slijedi:

$$|MF|-|ME|=2|OM|\sin\alpha. \tag{11}$$

Slično d obivamo da je $|MD|-|MC|=2|MN|$ kao i $|MN|=|OM|\sin\beta$, tj.

$$|MD|-|MC|=2|OM|\sin\beta. \tag{12}$$

Sada iz (8), (11) i (12) dobivamo:

$$\frac{|MQ|-|MR|}{|MR||MQ|}\sin(\alpha+\beta)=\frac{2|OM|\sin\alpha}{x}\sin\beta-\frac{2|OM|\sin\beta}{x}\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{|MQ|-|MR|}{|MR||MQ|}\sin(\alpha+\beta)=\frac{2|OM|}{x}(\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta),\text{ tj.}$$

$$\frac{|MQ|-|MR|}{|MR||MQ|}\sin(\alpha+\beta)=0.$$

Kako je $0<\alpha+\beta<180°$, to je $\sin(\alpha+\beta)>0$, pa mora biti:

$$\frac{|MQ|-|MR|}{|MR||MQ|}=0,$$

a odavde je

$$|MQ|-|MR|=0,\text{ tj. } |MQ|=|MR|,\text{ što je trebalo dokazati.}$$

Dokaz 3. Neka se tetive $\overline{FC}$ i $\overline{DE}$ sijeku u točki S. Označimo $|AM|=|BM|=a$. Promatrajmo trokut ΔQRS i pravac FE koji ga siječe (slika 5). Na osnovi Menelajevog teorema dobivamo sljedeću jednakost:

$$\frac{|QM|}{|MR|}\cdot\frac{|RE|}{|ES|}\cdot\frac{|SF|}{|FQ|}=1. \qquad (13)$$

Pravac CD siječe trokut ΔQRS, pa opet na osnovi Menelajevog teorema imamo:

$$\frac{|QM|}{|MR|}\cdot\frac{|RD|}{|SD|}\cdot\frac{|SC|}{|CQ|}=1. \qquad (14)$$

Množeći jednakosti (13) i (14), dobivamo:

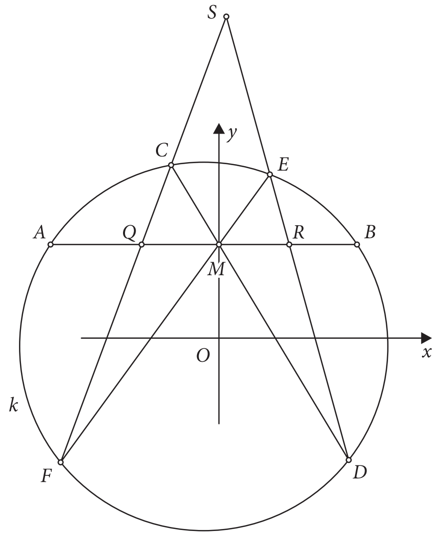
$$\frac{|QM|^2}{|MR|^2}\cdot\frac{|RE|}{|ES|}\cdot\frac{|SF|}{|FQ|}\cdot\frac{|RD|}{|SD|}\cdot\frac{|SC|}{|CQ|}=1. \qquad (15)$$

Na osnovi potencije točke S u odnosu na kružnicu k imamo:

$$|SF|\cdot|SC|=|SD|\cdot|SE|. \qquad (16)$$

Zbog (16) sada dobivamo iz (15):

$$\frac{|QM|^2}{|MR|^2}=\frac{|FQ|\cdot|CQ|}{|RE|\cdot|RD|} \qquad (17)$$



Slika 5.

Opet na temelju potencije točke Q u odnosu na kružnicu k, zbog $|AM|=|BM|=a$ imamo:

$$|FQ|\cdot|CQ|=|AQ|\cdot|BQ|=\big(a-|MQ|\big)\big(a+|MQ|\big)=a^2-|MQ|^2, \qquad (18)$$

i analogno

$$|RE|\cdot|RD|=|BR|\cdot|AR|=\big(a-|MR|\big)\big(a+|MR|\big)=a^2-|MR|^2. \qquad (19)$$

Najzad iz (17), (18) i (19) dobivamo:

$$\frac{|QM|^2}{|MR|^2}=\frac{a^2-|MQ|^2}{a^2-|MR|^2},$$

a odavde se lako dobiva $|MQ|^2=|MR|^2$, odnosno

$|MQ|=|MR|$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 4. Koristit ćemo analitičku geometriju. Uvest ćemo koordinatni sustav xOy, gdje je točka O (središte kružnice k) ishodište koordinatnog sustava, $Ox \parallel AB$ i $Oy \perp AB$ $\big(M\in Oy\big)$ (sl. 5). Točka M ima koordinate $M(0, c)$, pravac AB ima jednadžbu $y = c$, a pravac FE ima jednadžbu $y=\lambda x+c$. Kružnica k ima jednadžbu $x^2+y^2=R^2$. Nađimo sjecišta kružnice k i pravca FE, tj. riješimo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ y=\lambda x+c\,. \end{cases}$$

Odavde dobivamo jednadžbu:

$$\big(1+\lambda^2\big)x2+2\lambda cx+c^2-R^2=0, \qquad (20)$$

čija su rješenja x_1 i x_2 kojima odgovaraju vrijednosti $y_1=\lambda x_1+c$ i $y_2=\lambda x_2+c$. Dakle, imamo točke $E\big(x_1,y_1\big)$ i $F\big(x_2,y_2\big)$. Analogno dobivamo sjecišta kružnice k čija je jednadžba $x^2+y^2=R^2$ i pravca CD čija je jednadžba $y=\mu x+c$ $\big(\mu\neq\lambda\big)$. Dobivamo jednadžbu:

$$\big(1+\mu^2\big)x^2+2\mu cx+c^2-R^2=0 \qquad (21)$$

čija su rješenja x_1' i x_2' kojima odgovaraju vrijednosti $y_1' =\mu x_1'+c$ i $y_2' =\mu x_2'+c$. Sada imamo točke $C\big(x_1',y_1'\big)$ i $D\big(x_2',y_2'\big)$. Sada pravac CF ima jednadžbu:

$$CF\colon\ \frac{x-x_1'}{x_2-x_1'}=\frac{y-y_1'}{y_2-y_1'}.$$

Rješavanjem sustava jednadžbi AB: $y=c$ i CF: $\dfrac{x-x_1'}{x_2-x_1'}=\dfrac{y-y_1'}{y_2-y_1'}$,

dobivamo koordinate sjecišta $Q=FC\cap AB$:

$$x = x_1' + \frac{c-y'}{y_2-y_1'}\left(x_2-x_1'\right) = x_1' - \frac{\mu x_1'\left(x_2-x_1'\right)}{y_2-y_1'} = x_1'\left[1-\frac{\mu\left(x_2-x_1'\right)}{\lambda x_2-\mu x_1'}\right] = \frac{(\lambda-\mu)x_1'x_2}{\lambda x_2-\mu x_1'}. \quad (22)$$

Analogno, rješavanjem sustava jednadžbi

$$DE\colon\ \frac{x-x_2'}{x_1-x_2'} = \frac{y-y_2'}{y_1-y_2'} \ \text{ i } AB\colon\ y = c,$$

dobivamo koordinate njihova sjecišta $R = DE \cap AB$:

$$x = \frac{(\lambda-\mu)x_1x_2'}{\lambda x_1-\mu x_2'}. \quad (23)$$

Sada ćemo pokazati da je zbroj apscisa (22) i (23) jednak nuli, čime će Leptirov teorem biti dokazan. Imamo

$$\frac{(\lambda-\mu)x_1'x_2}{\lambda x_2-\mu x_1'} + \frac{(\lambda-\mu)x_1x_2'}{\lambda x_1-\mu x_2'} = \frac{(\lambda-\mu)\left[x_1'x_2\left(\lambda x_1-\mu x_2'\right)+x_1x_2'\left(\lambda x_2-\mu x_1'\right)\right]}{\left(\lambda x_2-\mu x_1'\right)\cdot\left(\lambda x_1-\mu x_2'\right)} =$$

$$= \frac{(\lambda-\mu)\left[\lambda x_1x_2\left(x_1'+x_2'\right)-\mu x_1'x_2'\left(x_1+x_2\right)\right]}{\left(\lambda x_2-\mu x_1'\right)\cdot\left(\lambda x_1-\mu x_2'\right)} = 0$$

jer iz jednadžbi (20) i (21) imamo na osnovi Viètovih pravila:

$$x_1+x_2 = -\frac{2\lambda c}{1+\lambda^2},\ x_1\cdot x_2 = \frac{c^2-R^2}{1+\lambda^2}, \text{ te } x_1'+x_2' = -\frac{2\mu c}{1+\mu^2},\ x_1'\cdot x_2' = \frac{c^2-R^2}{1+\mu^2}.$$

Ovim je pokazano da vrijedi $|MR| = |MQ|$, što je trebalo dokazati.

Literatura

[1] Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.

[2] Čerin, Z., *Poučci o leptirima*, Poučak, Vol. 2, br. 8, prosinac 2001, Zagreb.

[3] Palman, D., *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[4] Škljarski, D. O., Čencov, N. N., Jaglom, I. M., *Izabrani zadaci i teoremi planimetrije*, Nauka, Moskva, 1967. (na ruskom jeziku).