

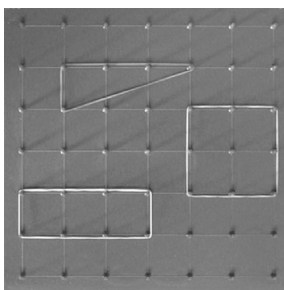
IZ NASTAVNE PRAKSE

Primjena geoploče u nastavi matematike

ALEKSANDRA ČIŽMEŠIJA¹, TANJA SOUCIE² I RENATA SVEDREC³

Uvod

Geoploča je (drvena ili plastična) ploča s čavlicima koji su raspoređeni u kvadratnu mrežu oko kojih je moguće rastezati elastične (gumene) vrpce. Geoploču je 1952. godine osmislio egipatski matematičar **Caleb Gattegno** (1911. – 1988.), a on je izradio i prve nastavne materijale za primjenu geoploče u nastavi geometrije.⁴



Slika 1. Primjer geoploče

U Europi (i ostatku svijeta) moguće je nabaviti gotove geoploče različitih boja i veličina. Posebno su prikladne prozirne ploče koje je – za potrebe analiziranja problema i/ili diskusije rješenja – moguće staviti na grafoskop.

Kao nastavno pomagalo geoploča je vrlo primjenjiva u osnovnoškolskoj nastavi matematike kao pomoć pri istraživanju konceptata kao što su opseg, površina, svojstva geometrijskih likova, pojam razlomka te crtanje likova u koordinatnom sustavu. Geoploča učenicima omogućava vizualizaciju te im daje mogućnost da „rade” geometriju. Pruža im mogućnost da samostalno otkrivaju matematiku te razmjenjuju matematičke ideje, čime razvijaju svoje komunikacijske vještine i matematički rječnik.

¹Aleksandra Čižmešija, PMF - Matematički odsjek Sveučilište u Zagrebu

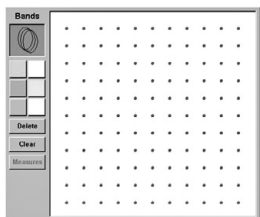
²Tanja Soucie, OŠ Gustava Krkleca, Zagreb

³Renata Svedrec, OŠ Otok, Zagreb

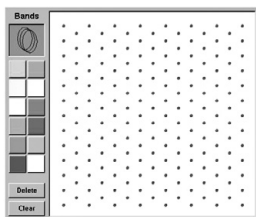
⁴Različite interaktivne aktivnosti dostupne su na adresi <http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.2/>

Korištenje geoploče učenicima omogućuje postavljanje i rješavanje matematičkih problema, potiče ih na istraživanje, sustavnost, kreativnost i ustrajnost u radu, tako da oni postaju aktivni sudionici u procesu učenja.

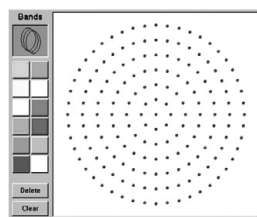
Osim klasičnih *geoploča* (s čavlicima raspoređenima u kvadratnu mrežu, slika 2.), koriste se još tzv. *izometričke geoploče* (čavlici raspoređeni u mrežu rombova sa šiljastim kutom veličine 60° , slika 3.) i *kružne geoploče* (slika 4.)



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.



Slika 5. Primjer kružne geoploče

Geoploču je moguće napraviti i u „kućnoj radinosti” – od drva ili deblje plutene ploče s 25 čavlića raspoređenih u kvadratnu mrežu (5×5), na jednakim razmacima (udaljenostima), primjerice 1 cm. Umjesto rada na konkretnoj (originalnoj ili priručnoj) geoploči, moguće je koristiti i samo *točkasti papir* (slika 6.).



Slika 6.

Ukoliko je dostupno, učenici u razredu ili kod kuće mogu koristiti i elektronske aplikacije koje su (besplatno) dostupne na različitim internetskim adresama (kao što su npr. <http://nrich.maths.org/5648>, <http://mste.illinois.edu/users/pavel/java/geoboard/>, http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_125_g_1_t_3.html, http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_172_g_2_t_3.html ili <http://www.mathplayground.com/geoboard.html>)

Zašto koristiti *geoploču*?

Učenici se s geometrijskim pojmovima upoznaju od najranijeg doba, no često su njihova znanja površna i nedorečena zbog konceptualnog nerazumijevanja opsega i površine geometrijskih likova. Začudujuće je koliko učenika, čak i u višim razredima, miješa ta dva pojma te koliko često potpuno pogrešno vjeruju će se povećavanjem površine lika nužno povećati i njegov opseg ili obrnuto.

Još je veći problem s (ne)razumijevanjem mjernih jedinica. Zatražite li od svojih učenika da opišu npr. kvadratni centimetar (ili kvadratni decimetar), uglavnom će znati simbolom zapisati cm^2 (dm^2) bez stvarnog razumijevanja što to znači. No, koristeći *geoploču* učenici će *vidjeti* površinu lika prebrojavajući *jedinične kvadratiće* koji prekrivaju lik. Time *kvadratna jedinica* (*jedinični kvadratić*) dobiva novi smisao!

Nadalje, *Nacionalni okvirni kurikulum za matematičko područje* od učenika očekuje da će, između ostaloga, moći stvarati i istraživati pretpostavke o matematičkim objektima, pravilnostima i odnosima; skicirati jednostavne ravninske oblike te ih nacrtati i konstruirati pomoću geometrijskog pribora (i jednostavnoga računalnoga programa za crtanje); prepoznati sukladne i slične trokute; približno i točno odrediti udaljenost dviju točaka i površinu likova brojenjem jediničnih dužina i jediničnih kvadrata; prepoznati, imenovati, izgraditi i klasificirati ravninske (i prostorne) geometrijske oblike, te istražiti, uočiti i (precizno) opisati njihova geometrijska svojstva ... [3] Korištenje *geoploče* u nastavi matematike pridonijet će ostvarivanju postavljenih ciljeva.

No, upotreba *geoploče* ne mora nužno biti vezana uz geometriju. Ona se također može primijeniti za razvijanje pojma razlomka, crtanja u koordinatnom sustavu u ravnini, te u raznim drugim aktivnostima koje razvijaju matematičku logiku i sposobnosti rješavanja problema.

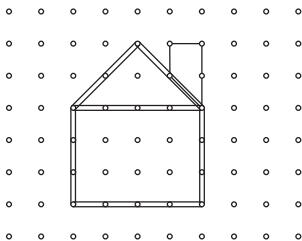
Potrebni materijali

Za rad u paru poželjno je svakom paru učenika osigurati *geoploču*, dovoljan broj elastičnih gumenih vrpca (različitih boja i duljina), a svaki će učenik trebati dovoljno *točkastog papira*, ravnalo ili trokut, te olovku i gumicu za brisanje.

Primjeri aktivnosti za niže razrede osnovne škole – klasična *geoploča*

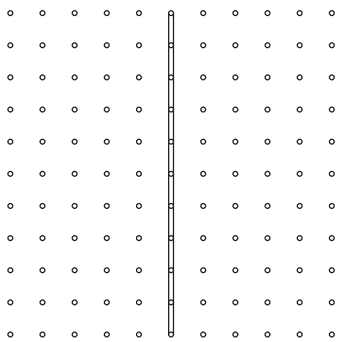
Kad upoznajemo učenike s novim nastavnim pomagalom, svakako im trebamo dati vremena da se s njime upoznaju. Nakon što učencima postavimo pitanja kao štu su *Kojeg je oblika geoploča?*, *Koliko se čavlića nalazi u svakom retku, a koliko u svakom stupcu?* te *Koliko se ukupno čavlića nalazi na geoploči?* možemo im zadati neke od sljedećih tipova zadataka.

1. Pomoću grafoskopa i geoploče prikažemo sliku koju smo unaprijed pripremili te učenici trebaju reproducirati istu na svojim geopločama (slika 7.). Učenike možemo poticati da imenuju likove koje smo koristili za izradu slike.

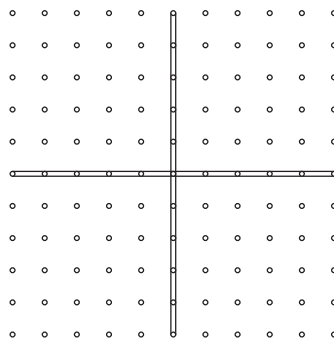


Slika 7.

2. Učenici sami „crtaju” svoje slike na geoploči i imenuju sve likove koje poznaju, a koje su koristili za izradu svoje slike.
3. Kako bismo vježbali vlastitu orijentaciju, možemo geoploču podijeliti na dva ili četiri dijela (slika 8. i slika 9.) te učenicima zadati zadatke tipa: *Koristeći elastične vrpce, prikaži neki geometrijski lik na desnoj strani geoploče. Prikaži neki geometrijski lik u gornjem lijevom dijelu. Koristeći elastične vrpce, napiši broj jedan u donjem desnom dijelu.*



Slika 8.



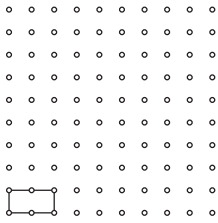
Slika 9.

4. Učenici „crtaju” jednostavnu sliku i pokušavaju svome paru (koji ne smije vidjeti njihovu sliku) objasniti kako nacrtati istu sliku na svojoj geoploči.
5. Učenicima zadamo da prikažu brojeve od 0 do 9 koristeći geoploču i elastične vrpce. (U četvrtom razredu možemo učenike pitati i koji su od tih brojeva osnosimetrični.) Isto se može ponoviti i sa slovima engleske abecede.

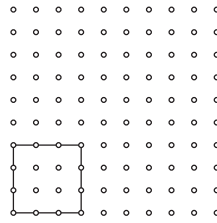
Nakon što su se učenici upoznali s geopločom, možemo je koristiti za različite nastavne aktivnosti.

Množenje

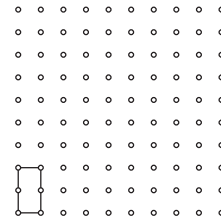
Učenicima podijelimo nastavne listiće na kojima je nacrtano desetak točkastih 10×10 geoploča. Učenicima na nekoliko primjera pokažemo kako mogu modelirati zadatke množenja (slika 10., slika 11. i slika 12.). Primjerice, pri množenju broja 2 s brojem 3, pomoću elastične vrpce „zaokružimo” dva retka od tri čavlića te prebrojimo ukupan broj zaokruženih čavlića. Zatim učenicima damo niz zadataka koje sami modeliraju i određuju umnoške. Učenici pri tome crtaju svoja rješenja na nastavni listić.



Slika 10.
 $2 \cdot 3 = 6$



Slika 11.
 $4 \cdot 4 = 16$

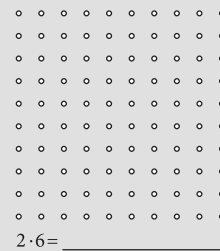
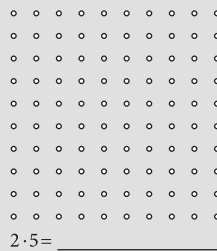
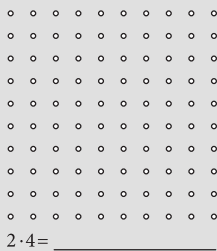
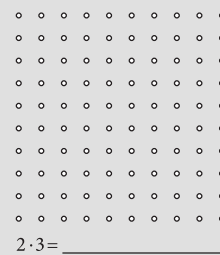
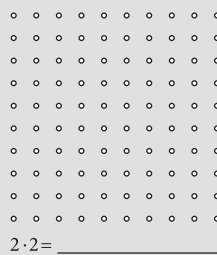
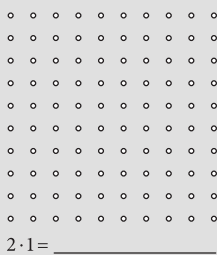


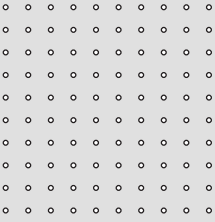
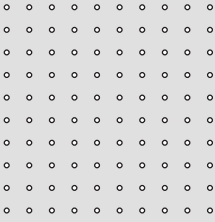
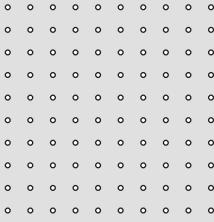
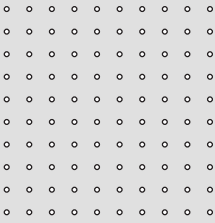
Slika 12.
 $3 \cdot 2 = 6$

Osim što ovom aktivnošću vizualiziraju množenje, učenici mogu na nizu različitih primjera uočiti da ako faktori zamijene mjesta, umnožak ostaje isti (primjerice, $2 \cdot 3 = 6$ i $3 \cdot 2 = 6$.) te tako otkriti svojstvo komutativnosti množenja.

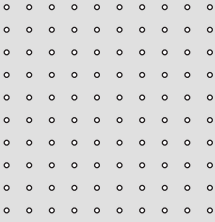
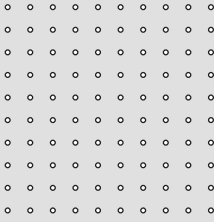
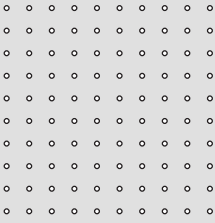
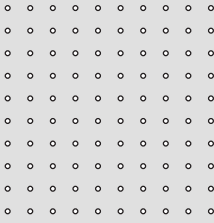
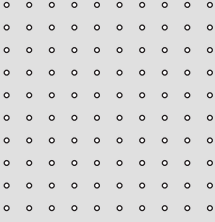
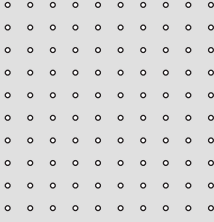
Primjer nastavnog listića

Koristeći geoploču, prikaži i odredi sljedeće umnoške. Svoje rezultate prikaži i na papiru.



 $2 \cdot 7 =$ _____	 $2 \cdot 8 =$ _____	 $2 \cdot 9 =$ _____
	 $2 \cdot 10 =$ _____	

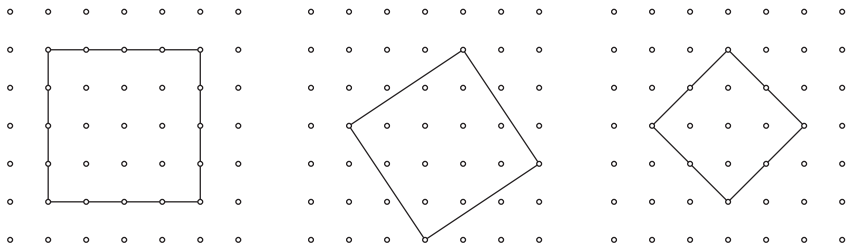
Primjer nastavnog listića

<p>Koristeći geoploču, prikaži i odredi sljedeće umnoške. Svoje rezultate prikaži i na papiru.</p>	 $2 \cdot 3 =$ _____	 $3 \cdot 2 =$ _____
<p>Što primjećuješ?</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>	 $3 \cdot 4 =$ _____	 $4 \cdot 3 =$ _____
	 $5 \cdot 6 =$ _____	 $6 \cdot 5 =$ _____

Geometrijski likovi

Geoploču možemo na razne načine upotrijebiti za istraživanje geometrijskih likova i njihovih svojstava.

1. Učitelj na geoploči prikaže geometrijski lik, a učenici ga imenuju. U toj aktivnosti svakako likove treba prikazati u različitim položajima (slika 13.).

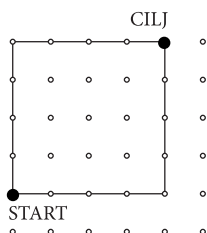


Slika 13. Različiti prikazi kvadrata

2. Učitelj učenicima zadaje geometrijski lik koji trebaju prikazati na geoploči. Učenici uspoređuju likove na svojim geopločama i, ako je potrebno, jedni druge korrigiraju.
3. Učitelj učenicima zadaje precizne upute o liku kojeg trebaju prikazati na geoploči. Primjeri takvih uputa uključuju:
 - a) Koristeći geoploču, prikaži lik koji ima četiri stranice jednakih duljina.
 - b) Koristeći geoploču, prikaži pravokutnik koji **nije** kvadrat.
 - c) Prikaži pravokutan trokut.
 - d) Prikaži trokut kojemu su sve stranice jednake duljine. Kako se taj trokut zove?
 - e) Prikaži jednakokračan trokut koji **nije** jednakostraničan.
 - f) Prikaži pravokutan jednakokračan trokut.
 - g) Prikaži jednakokračan tupokutan trokut.
 - h) Možeš li prikazati trokut koji ima dva prava kuta? Objasni.
 - i) Prikaži lik koji je i romb i kvadrat.
 - j) Prikaži lik koji je i pravokutnik i kvadrat.
 - k) Prikaži lik koji ima četiri stranice i koji ima **točno** jedan pravi kut.
 - l) Prikaži lik koji ima pet stranica i **točno** dva prava kuta.
 - m) Prikaži lik koji ima četiri stranice i **točno** jedan pravi te **točno** jedan tupi kut.

Igra strategije – Tko prvi do cilja [5]

Učenicima se elastičnom vrpcom „zaokruži” područje na kojem će igrati igru *Tko prvi do cilja* (slika 14). Zatim učenici dobivaju jedan disk (izrađen od papira, slika 15.) koji mogu staviti na čavlič geoploče.



Slika 14. Omeđeno polje za igru



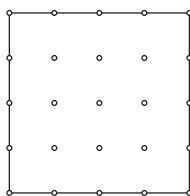
Slika 15. Disk za igru

Igrač koji je prvi na redu postavlja disk na start i pomiče disk na jedan od sljedećih načina: jedan čavlič udesno, jedan čavlič prema gore ili jedan čavlič po dijagonali udesno i prema gore. Igrač koji je sljedeći na redu pomiče disk na isti način, počevši od mjesta na kojemu je prethodni igrač završio. Igrači se izmjenjuju, a pobjednik je igrač koji prvi postavi disk na mjesto označeno kao cilj. Igrači igru trebaju odigrati nekoliko puta i pokušati odrediti pobjedničku strategiju.

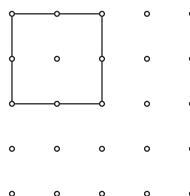
Primjeri aktivnosti za više razrede osnovne škole

Razlomci na geoploči

Učitelj prikazuje jedno cijelo, zatim prikazuje različite razlomke pomoću geoploče, a učenici ih imenuju (slika 16., slika 17.). Nakon toga učitelj zadaje razlomak, a učenici ga prikazuju pomoću geoploče.

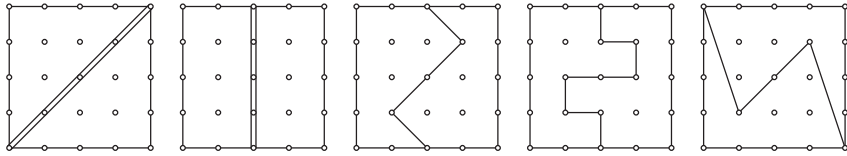


Slika 16.
Prikaz jednog cijelog



Slika 17.
Prikaz razlomka

Učenicima se također može zadati da prikažu što više različitih načina na koji se prikazano cijelo može podijeliti na jednake dijelove (polovine, slika 18). Ista se aktivnost može provesti za četvrtine i osmine.



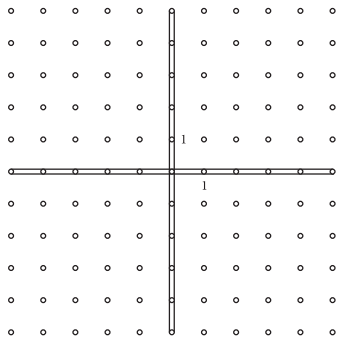
Slika 18. Primjeri podjela na jednake dijelove

Koordinatni sustav

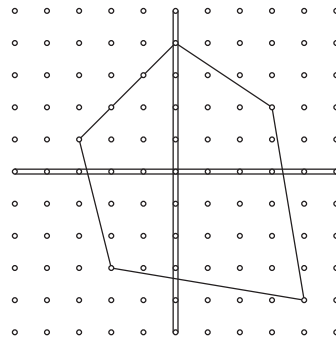
Koristeći dvije elastične vrpce na geoploči, učenici definiraju koordinatni sustav u ravnini (slika 19.).

Učenici zatim u koordinatnom sustavu prikazuju likove čiji su vrhovi zadani cjelobrojnim koordinatama.

Primjerice, učenici prikazuju lik čiji su vrhovi zadani koordinatama $(-2, -3)$, $(-3, 1)$, $(0, 4)$, $(3, 2)$, $(4, -4)$ (slika 20.).



Slika 19.



Slika 20.

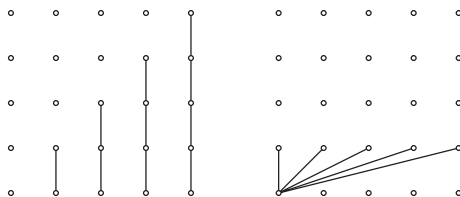
Učenici mogu slagati svoje likove ili slike i koordinatama zapisati upute koje drugima omogućuju prikazivanje njihovog lika ili slike u koordinatnoj ravnini.

Geoploča s definiranim koordinatnim sustavom u ravnini može služiti i za bingo. Učenici postavljaju devet diskova (kakvi su se koristili u igri *Tko prvi do cilja*) na bilo kojih devet točaka (čavlića) koordinatnog sustava. Učitelj izvlači i čita koordinate točaka, a učenici koji imaju disk postavljen na pročitanoj koordinati, uklanjaju taj disk. Učenik koji prvi ukloni svih devet diskova sa svoje geoploče - pobjeđuje.

Učenicima se može zadati i da u koordinatnom sustavu u ravnini na svojim geopločama prikažu pravce zadane jednadžbama, primjerice $y = x + 1$, $x = -2$, $y = 1$, $y = x$, itd [5]. U tom se slučaju preporuča da koordinatne osi budu izrađene od elastičnih vrpca jedne, a pravci od elastičnih vrpca neke druge boje.

Duljina dužine

Određivanje duljine dužine u horizontalnom i vertikalnom položaju učenicima uglavnom ne predstavlja nikakav problem – odgovor nalaze prebrojavanjem razmaka između čavlića. Za određivanje duljine dužine u kosom položaju potrebno je poznavanje i primjena Pitagorina poučka (dakle, prema vrijedećem Nastavnom planu i programu, primjenjivo je u osmom razredu osnovne škole) (slika 21.). [6]



Slika 21.

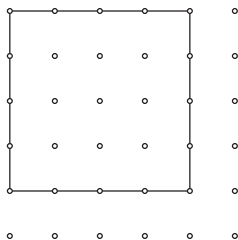
Opseg i površina

Primjeri zadataka koji mogu učenicima pomoći u razumijevanju pojmova opsega i površine:

a) Pomoću geoploče prikaži, te na točkastom papiru skiciraj što više likova čiji je opseg 16 cm. Odredi površinu svakog od tih likova.

b) Pomoću geoploče prikaži, te na točkastom papiru skiciraj što više likova čija je površina 6 cm². Odredi opseg svakog od tih likova.

c) Na geoploči je prikazan lik čiji je opseg 16 cm (slika 22.). Pomakni elastičnu vrpca tako da novi lik ima isti opseg kao zadani, ali manju površinu.



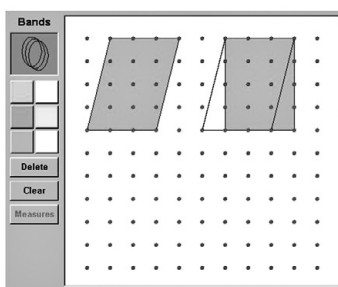
Slika 22.

d) Pomoću geoploče prikaži, te na točkastom papiru skiciraj što više kvadrata različitih dimenzija.

Površina lika

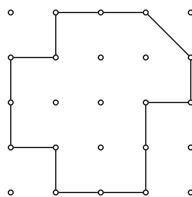
U višim će razredima osnovne škole većina učenika znati izračunati površinu pravokutnika i kvadrata (ako su poznate duljine njihovih stranica). Naučit će (prema odgovarajućim formulama) računati površine paralelograma, trapeza i trokuta, no pitanje je koliko učenika stvarno *razumije* zašto površine tih likova računaju baš tako!?

Umjesto „učenja formula”, korištenje geoploče učenicima omogućava razumijevanje postupka i ostaje kao trajnije znanje (i kad formule „ispare” iz sjećanja). Primjerice, površinu paralelograma računamo tako da zadani paralelogram transformiramo („rezanjem” duž jedne njegove visine) u odgovarajući pravokutnik jednake površine (slika 23.).



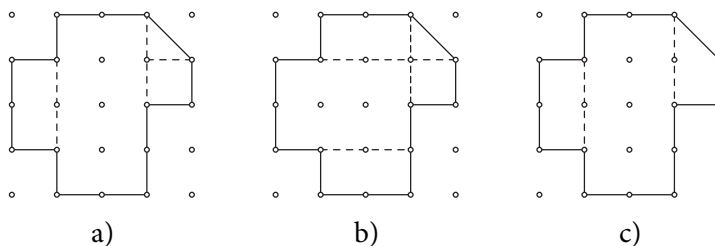
Slika 23.

Postupak „rezanja” tj. podjele lika posebno dolazi do izražaja kad je potrebno izračunati površinu nekog nepravilnog mnogokuta, kao što je mnogokut prikazan na slici 24.:



Slika 24.

Jasno je da za površinu takvog mnogokuta ne postoji „gotova formula”, nego se mnogokut dijeli na trokute i četverokute kojima učenici znaju izračunati (ili ovdje prebrojiti!) površinu. Neke od mogućih podjela prikazane su na slikama 25.a, 25.b i 25.c.



Slika 25.

Možda je ovo prilika zainteresiranim učenicima objasniti i primjenu Pickove formule za računanje površine mnogokuta u cjelobrojnoj mreži točaka. [8]

Zaključak

Korištenjem geoploče učenici će s više razumijevanja moći usporediti, grupirati i klasificirati geometrijske likove prema jednom ili više zadanih ili odabranih kriterija; uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima, idejama i pojmovima te stvarati i istraživati pretpostavke o matematičkim objektima, pravilnostima i odnosima među tim objektima. To će u konačnici rezultirati izgradnjom novih matematičkih znanja kroz rješavanje problema.

Potpuno je jasno da će za rješavanje pojedinih problema biti potrebno znati i primijeniti Pitagorin poučak, kao i formule za opsege i površine (osnovnih) trokuta i četverokuta. Također, u mnogim zadacima može biti korisna i Pickova formula.

No, imajmo na umu da rješavanje zadataka ne smijemo svesti *isključivo* na primjenu neke od „gotovih” formula. Naprotiv, isključiva (i često nekritička) primjena formula tipa $o = 2a + 2b$ ili $p = a \cdot b$ (i sl.) nije (posebno kod mlađih učenika) dobar način za usvajanje trajnih konceptualnih znanja.

Na taj način učenici stječu dojam da je cilj matematike memoriranje i primjena formula, što nikako nije i ne smije biti! Formule trebaju doći kasnije, nakon što učenici dobro usvoje koncepte.

Primjer nastavnog materijala

U nastavku dajemo primjer nastavnog materijala - nastavni listić *Paralelogrami na geoploči* [7]. Materijal je predviđen za rad u parovima, a namijenjen je učenicima šestoga razreda u cjelini Četverokut.

Radeći u parovima, učenici koriste geoploču i elastične vrpce za prikazivanje likova s traženim svojstvom/svojstvima, nakon čega svaki učenik za sebe crta odgovarajuću sliku/slike na točkastom papiru.

Optimalno vrijeme za rješavanje uvodnih i glavnog zadatka te analizu dobivenih rješenja je 60 minuta. Preostalo vrijeme do kraja blok-sata učenici u parovima rješavaju dodatne zadatke. Analiza rješenja dodatnih zadataka moguća je pred kraj blok-sata, ili još bolje na sljedećem satu pri analizi domaće zadaće.

Primjer nastavnog materijala – Paralelogrami na geoploči

Ciljevi:

- razvoj prostornog zora i podizanje razine geometrijskog mišljenja s razine vizualizacije na razinu neformalne dedukcije [5],
- prepoznavanje svojstava paralelograma kao karakteristike klase likova te uočavanje i formuliranje logičkih odnosa među svojstvima,
- razvoj osjećaja za površinu paralelograma s posebnim naglaskom na vezu površine paralelograma i površine njemu odgovarajućeg pravokutnika,
- primjena koncepta sukladnosti i sličnosti na paralelograme,
- eksperimentiranje s geometrijskim uzorcima.

Potrebni materijali:

- za svaki par učenika geoploča 5×5 i dovoljan broj elastičnih vrpca,
- za svakog učenika nastavni listić za zadacima,
- za svakog učenika točkasti papir 5×5 točaka i točkasti papir 11×11 točaka,
- za učitelja interaktivna geoploča za analizu rješenja.

Zadaci za učenike

Uvodni zadaci:

1. Na geoploči dimenzija 5×5 napravite paralelogram s osnovicom duljine 1.
2. Na geoploči dimenzija 5×5 napravite još tri paralelograma s osnovicom duljine 1 koji imaju jednaku površinu kao paralelogram iz zadatka 1.
3. Na geoploči dimenzija 5×5 napravite sve međusobno nesukladne paralelograme s osnovicom duljine 2. Koliko ih ima?
4. Na geoploči dimenzija 5×5 napravite nepravokutni paralelogram najveće moguće površine. Kolika je ta površina?

Glavni zadatak:

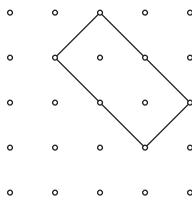
Na geoploči dimenzija 5×5 napravite sve međusobno nesukladne paralelograme. Nacrtajte odgovarajuće slike na točkastom papiru.

Zadatak za domaću zadaću

Izračunajte površinu svakoga od paralelograma iz prethodnog zadatka ako je udaljenost dviju susjednih točaka u retku/stupcu jednaka 1 cm.

Dodatni zadaci:

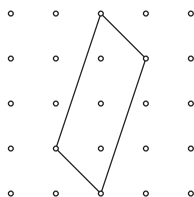
1. Na geoploči dimenzija 5×5 prikažite paralelogram s površinom jednakom površini pravokutnika na slici:



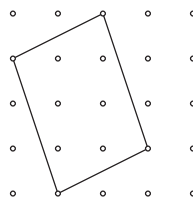
Nacrtajte odgovarajuću sliku na točkastom papiru.

2. Na geoploči dimenzija 5×5 prikažite paralelogram sukladan zadanom:

a)



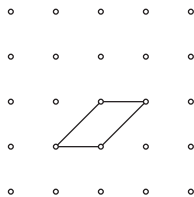
b)



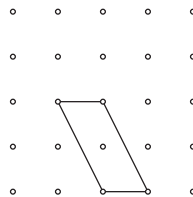
Nacrtajte odgovarajuće slike na točkastom papiru.

3. Na geoploči dimenzija 5×5 prikažite paralelogram sličan zadanom:

a)

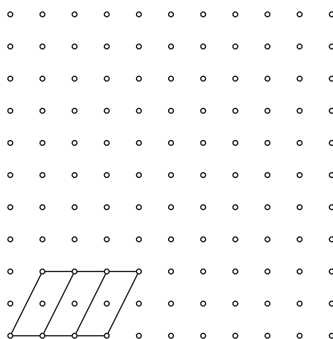


b)



Nacrtajte odgovarajuće slike na točkastom papiru.

4. Nastavite niz paralelograma na geoploči dimenzija 11×11 .



Nacrtajte odgovarajuću sliku na točkastom papiru i ispunite tablicu:

Duljina stranice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Površina	2	4	6							
Broj čavlića (točaka) na rubu	4	6	8							
Broj čavlića (točaka) u unutrašnjosti	1	2	3							

Literatura:

1. Jon Bradford, *Geoboard Teacher's Manual*, Ft. Collins, CO: Scott Resources, Inc., 1987.
2. Tom Scavo, *Geoboards in Classroom*, 1995.
3. *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje*, Zagreb, srpanj 2010.
4. Michael de Villiers, *Neka razmišljanja o Van Hieleovoj teoriji*, Zbornik radova 4. kongresa nastavnika matematike RH, Zagreb, 2010.
5. Charles Lund, *Math Explorations with a Geoboard*, IPMG Publishing, Minnesota, 2009.
6. Renata Svedrec, *Duljina dužine na geoboard ploči*, Matka broj 74, prosinac 2010.
7. Renata Svedrec, *Paralelogrami na geoboard ploči*, Matka broj 76, lipanj 2011.
8. Petar Mladinić, *Površina likova u cjelobrojnoj mreži*, Matka broj 77, rujan 2011.