

Funkcije u nastavi matematike – motivacijski primjeri iz geologije

DIJANA ILIŠEVIĆ,¹ DANKA KRIVO²

Sažetak

Geologija je znanost koja se bavi proučavanjem Zemlje. U ovom radu pokazat ćemo nekoliko primjera iz geologije koji mogu poslužiti kao motivacija prilikom obrade elementarnih funkcija u nastavi matematike.

1. Uvod

Geologija je znanost koja pokušava objasniti kako je Zemlja formirana i kako se mijenja, a proučava tlo, stijene, planine, rijeke, oceane i druge dijelove Zemlje. Velika većina geoloških procesa može se opisati matematičkim modelima. U svrhu dobivanja što točnijih rezultata, potrebno je razmatrati što više parametara koji utječu na pojedinu pojavu ili proces. Samim time i matematički model postaje sve složeniji. Ovisno o potrebi, ti modeli mogu se pojednostavniti, a da pritom konačni rezultati ostaju približno točni. Stoga se u praksi često koriste aproksimacije tih modela elementarnim funkcijama. Cilj ovog rada je pokazati veći broj primjera koji opisuju razne geološke situacije, a koji mogu biti vrlo korisni za motivaciju učenika prilikom obrade raznih elementarnih funkcija.

2. Primjeri

2.1. Linearna i afina funkcija

Često se u literaturi, pogotovo školskoj, *afina funkcija*

$$f(x) = ax + b, \quad x \in \mathbf{R}$$

pojavljuje pod nazivom *linearna funkcija*. Linearna funkcija je poseban oblik afine funkcije za koju je $a \neq 0$ i $b = 0$, tj. funkcija oblika $f(x) = ax$.

¹Dijana Ilišević, PMF - Matematički odsjek Sveučilište u Zagrebu

²Danka Krivo, OŠ Dubovac, Karlovac

Razlog poistovjećivanja vrlo vjerojatno leži u tome što je graf obiju funkcija pravac. Ilustrirajmo razliku među ovim funkcijama na primjeru određivanja starosti taloga na dnu jezera.

Slika 1. prikazuje kako se različite tvari u vodi s vremenom talože na dnu jezera. Cilj nam je prikazati starost pojedinih slojeva ispod dna jezera u ovisnosti o dubini na kojoj se nalaze.



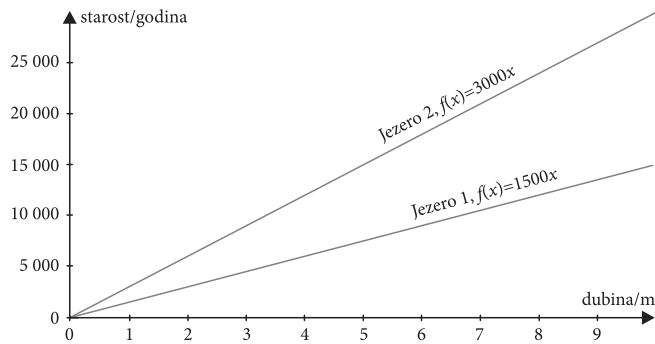
Slika 1. Sedimentacija na dnu jezera.
Noviji sediment polako zakopava već postojeći talog.

Pretpostavimo li da se s vremenom približno jednaka količina tvari taloži na dnu, odnosno da je talog na dubini od dva metra dvostruko stariji od taloga na dubini od jednog metra, na dubini od tri metra trostruko stariji i tako dalje, tada starost taloga i dubinu na kojoj se taj talog nalazi smatramo *proporcionalnim veličinama*. Drugim riječima, koliko se puta dubina ispod dna jezera poveća, toliko je puta talog na toj dubini stariji. Upravo takvu ovisnost opisuje linearna funkcija. Formalno, označimo li sa x dubinu ispod dna jezera, onda starost taloga na toj dubini opisuje funkcija $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ takva da vrijedi

$$f(x) = kx, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2.1)$$

pri čemu je k konstanta, tj. *koeficijent proporcionalnosti*. Napomenimo da se k razlikuje od jezera do jezera, ovisno o okolini u kojoj se jezero nalazi. Iz (2.1) zaključujemo da se za jako veliki k starost taloga značajno povećava s porastom dubine, tj. talog se sporo akumulira.

Na Slici 2. dani su grafički prikazi za dva različita jezera, u oznaci *Jezero 1* i *Jezero 2*. Kod *Jezero 1* potrebno je 1500 godina za metar taloga ($k_1 = 1500$), a kod *Jezero 2* potrebno je 3000 godina za metar taloga ($k_2 = 3000$). Vidljivo je da je pravac koji odgovara *Jezeru 2* strmiji, tj. starost taloga brže raste s dubinom nego kod *Jezero 1*.



Slika 2. Linearna ovisnost

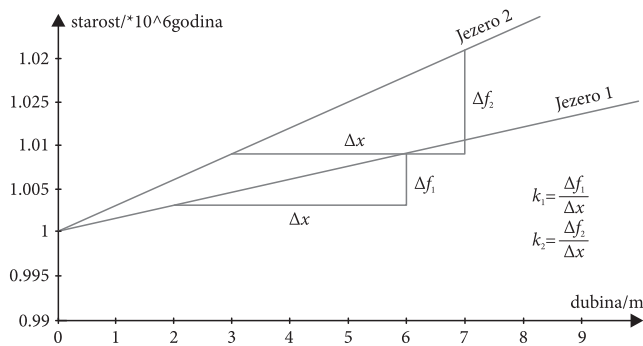
Pretpostavimo sada da su navedena jezera presušila prije milijun godina i da od tada nije bilo novih taloga. Ponovo želimo prikazati starost pojedinih slojeva ispod dna jezera u ovisnosti o dubini na kojoj se nalaze. U ovoj situaciji moramo uzeti u obzir da gornji slojevi kod oba jezera već imaju određenu dob te se starost taloga na dubini x može prikazati funkcijom

$$f_1(x) = 1500x + 10^6$$

za Jezero 1, odnosno funkcijom

$$f_2(x) = 3000x + 10^6$$

za Jezero 2.



Slika 3. Afina ovisnost

Uočavamo da starost taloga na dubini od dva metra nije dvostruko veća od starosti taloga na dubini od jednog metra. Dakle, te dvije veličine nisu proporcionalne. Međutim, njihova promjena jest. Naime, ako se dva puta poveća razlika dubine taloga, tada se dva puta poveća i razlika u njihovoj starosti. Takvu ovisnost opisuje afina funkcija.

2.2. Kvadratna funkcija i polinomi višeg stupnja

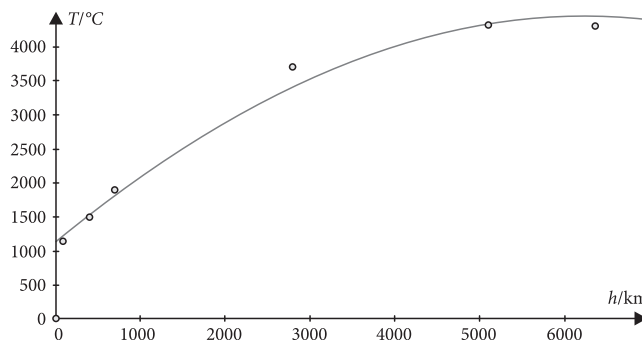
Poznato je da temperatura u unutrašnjosti Zemlje raste s povećanjem dubine. Tu ovisnost možemo aproksimirati pravcem do otprilike 100 km ispod površine. Problem nastaje na većim dubinama. U sljedećoj tablici dane su izmjerene vrijednosti temperature na različitim dubinama, pri čemu su korištene različite geofizičke metode:

h / km	$T / ^\circ\text{C}$
0	10
100	1 150
400	1 500
700	1 900
2 800	3 700
5 100	4 300
6 360	4 300

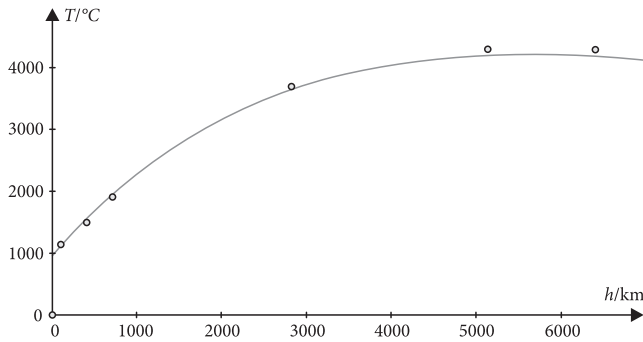
Krivulja koja dobro aproksimira izmjerene vrijednosti na dubinama većim od 100 km je graf funkcije

$$T(h) = -8.255 \cdot 10^{-5} h^2 + 1.05h + 1100. \quad (2.2)$$

Funkcija T zadana sa (2.2) primjer je *kvadratne funkcije*. Slika 4. ilustrira aproksimaciju izmjerenih vrijednosti pomoću vrijednosti funkcije T .



Slika 4. Aproksimacija ovisnosti temperature u unutrašnjosti Zemlje o dubini pomoću funkcije zadane s (2.2)



Slika 5. Aproximacija ovisnosti temperature u unutrašnjosti Zemlje o dubini pomoću funkcije zadane s (2.3)

Važno je primijetiti da funkcija T iz (2.2) ne daje točne vrijednosti prikazane u tablici iz prethodnog odlomka. Točniju aproksimaciju, posebno za vrijednosti između 2000 i 4000 km, daje nam funkcija

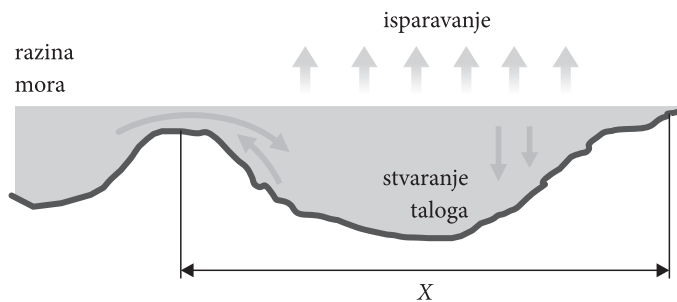
$$T(h) = ah^4 + bh^3 + ch^2 + dh + e, \quad (2.3)$$

gdje je $a = -1.2 \cdot 10^{-12}$, $b = 2.85 \cdot 10^{-8}$, $c = -0.00031$, $d = 1.64$ i $e = 930$. Funkcija T zadana sa (2.3) primjer je *polinoma četvrtog stupnja*.

Iz Slike 5. vidljivo je da su sada odstupanja manja, ali je račun znatno složeniji. Stoga se u praksi primjenjuju oba izraza, (2.2) i (2.3), ovisno o tome je li naglasak na preciznosti ili jednostavnosti računa.

2.3. Racionalna funkcija

Slika 6. prikazuje model zatvorene uvale. Morska voda normalnog saliniteta utječe u uvalu, a zatim isparava, tako da se salinitet u uvali povećava do trenutka kada se veće čestice odvajaju od vode i talože na dno uvale.



Slika 6. Model zatvorene uvale

Prema [3] jednostavan matematički model ovog procesa opisan je *racionalnom funkcijom*

$$S(x) = \frac{S_0 \alpha X}{\alpha X - x}, \quad (2.4)$$

pri čemu S_0 označava salinitet morske vode na ulazu u uvalu, X širinu uvale, a $\alpha \in \mathbf{R}$ je konstanta. Vrijednost konstante α uvjetovana je područjem koje promatramo i razlikuje se od uvale do uvale. Preciznije, za $\alpha > 0$ funkcija S je rastuća, tj. salinitet unutar promatrane uvale je to veći što je veća udaljenost x od ulaza u uvalu. S druge strane, uvale kod kojih je izražen utjecaj dotoka slatke vode modeliramo za $\alpha < 0$ (u tom slučaju funkcija S je padajuća). Primjer takve uvale je Riječki zaljev. Testirajmo valjanost našeg modela na temelju podataka koji su dobiveni kao rezultat GLOBE projekta: *Analiza mora u Riječkom zaljevu* (vidjeti [4]). Širina Riječkog zaljeva X je 25 km, a salinitet S_0 na ulazu u zaljev (Vela vrata) iznosi 32 promila. Želimo li izračunati salinitet, primjerice, u Opatiji koja je 22.5 km udaljena od Velih vrata, uvrštavanjem u (2.4) uz $\alpha = -1.8$ nalazimo $S(22.5) = 21.33$. Računamo li salinitet na drugoj mjernoj postaji, primjerice Rivi, dobivamo da je $S(25) = 20.57$. Oba rezultata odstupaju od izmjerenih podataka za 1.57 promila po apsolutnom iznosu, iz čega zaključujemo da (2.4) predstavlja dobru aproksimaciju stvarne situacije.

2.4 Eksponencijalna funkcija

Prilikom taloženja nove količine sedimenta, voda iz već postojećeg sedimenta istisne se van. Dakle, kada se sediment tek nataloži, njegova poroznost je jako velika i s vremenom (tj. taloženjem novog sedimenta) se smanjuje. Ako pretpostavimo da se po jednom kilometru dubine količina vode smanji na pola, tada bi poroznost na različitim dubinama trebala iznositi kako je prikazano sljedećom tablicom:

dubina (km)	poroznost
0	0.6
1	0.3
2	0.15
3	0.075
4	0.0375

Lako uočavamo da ovisnost poroznosti ϕ o dubini h možemo prikazati funkcijom $\phi(h) = 0.6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^h$,

odnosno

$$\phi(h) = 0.6 \cdot 2^{-h}. \quad (2.5)$$

Primijetimo da poroznost nikada neće biti nula (uvijek će postojati određena količina vode u sedimentu). Funkcija zadana sa (2.5) primjer je *opće eksponencijalne funkcije*, pa zaključujemo da poroznost eksponencijalno pada s dubinom.

Funkcija koja daje mnogo preciznije rezultate za poroznost ϕ na dubini h je

$$\phi(h) = \phi_0 \cdot e^{-\frac{h}{\lambda}}, \quad (2.6)$$

gdje je λ konstanta ovisna o području koje promatramo, a predstavlja dubinu na kojoj se poroznost smanjuje za približno jednu trećinu. Preciznije, ako umjesto h u (2.6) uvrstimo λ , dobivamo

$$\phi(\lambda) = \phi_0 \cdot e^{-\frac{\lambda}{\lambda}} = \phi_0 \cdot e^{-1} \approx \phi_0 \cdot \frac{1}{2.718} \approx \frac{1}{3} \phi_0.$$

Općenito, funkcije oblika

$$f(x) = f_0 \cdot e^{kx}, \quad (2.7)$$

pri čemu je f_0 nekakva početna vrijednost i $k \in \mathbf{R}$ konstanta, imaju veliku primjenu u geologiji. Primjerice, jedan od načina određivanja starosti slojeva Zemljine kore je određivanje starosti fosila pronađenih u tim slojevima. Starost fosila određuje se pomoću radioaktivnog raspada kemijskih elemenata koji opisuje upravo funkcija oblika (2.7). Naime, svi živi organizmi tijekom života apsorbiraju izotop ugljika C-14 koji se po ugibanju organizma s vremenom raspada. Dakle, starost nekog organizma određuje se po količini C-14 u pronađenom fosilu. Ako sa N_0 označimo broj čestica izotopa ugljika C-14 u početnom trenutku, tada je broj čestica u trenutku $t > 0$ dan sa

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}, \quad (2.8)$$

pri čemu je k konstanta. Vrijednost konstante k moguće je izračunati ukoliko je poznato vrijeme poluraspada³ izotopa ugljika. Uočimo da je $k < 0$ s obzirom da se broj čestica s vremenom smanjuje.

2.5 Logaritamska funkcija

Potres je iznenadno gibanje tla koje oslobađa elastičnu energiju nakupljenu u stijenama i pritom stvara seizmičke valove koji se sferno rasprostiru iz izvora. Fraza: „Mali potresi uzrokuju male valove, a veliki potresi velike valove” objašnjava pojam *magnitude* potresa.

³Vrijeme poluraspada τ je vrijeme potrebno da se početni broj čestica smanji na pola. Dakle, k računamo iz jednadžbe $N(\tau) = \frac{1}{2} N_0$.

Magnituda je najčešće navođena mjera veličine potresa i izražava se u stupnjevima po Richteru⁴. Predstavlja mjeru energije oslobođene u žarištu potresa. Jedna od veza između magnituda M i energije potresa E uključuje *logaritamsku funkciju*:

$$\log E = 11.8 + 1.5M. \quad (2.9)$$

Uzmemo li, primjerice, $M = 8.9$, koliko je izmjereno u ožujku 2011. kada je razorni potres zatresao područje Japana (vidjeti [7]), tada iz (2.9) dobivamo energiju od čak $1.4 \cdot 10^{25}$ J. Stoga ne čudi da je spomenuti potres u kori Zemlje izazvao rascjep dugačak 240 km i širok 80 km. Napomenimo da E predstavlja energiju oslobođenu u žarištu potresa isključivo u obliku seizmičkih valova, što je samo mali dio ukupne energije oslobođene prilikom potresa.

Drugi način određivanja veličine potresa je izraziti magnitudu M kao funkciju intenziteta I promatranog potresa, tj. kao funkciju oblika

$$M(I) = \log \frac{I}{I_0}, \quad (2.10)$$

gdje je I_0 intenzitet potresa nulte razine⁵. Najjači potres u Hrvatskoj, jačine oko 6.3 stupnja po Richteru, zabilježen je u Zagrebu 1880. godine (vidjeti [8]). Usporedimo intenzitet tog potresa i onog u Japanu. Iz (2.10) slijedi

$$I(M) = I_0 \cdot 10^M, \quad (2.11)$$

pa uvrštavanjem vrijednosti $M = 8.9$ i $M = 6.3$ te računanjem omjera $\frac{I(8.9)}{I(6.3)}$ slijedi

$$I(8.9) = 398.1 \cdot I(6.3).$$

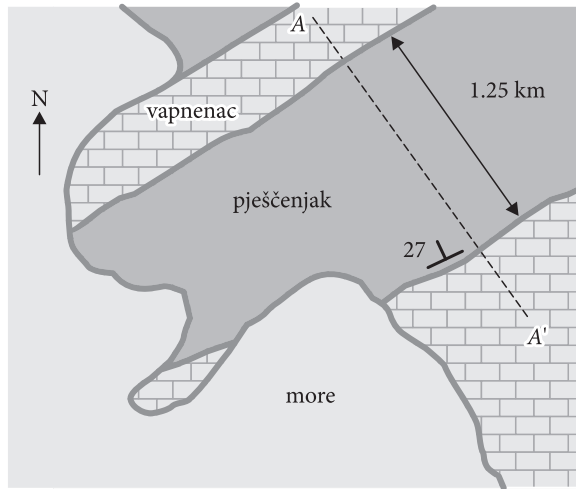
Dakle, nedavni potres u Japanu približno je četiri stotine puta intenzivniji od najjačeg potresa ikada zabilježenog u našoj zemlji.

2.6 Trigonometrijske funkcije

Na Slici 7. dana je geološka karta koja pokazuje naizmjenični slijed pješčanog i vapnenačkog područja. Jedno od pješčanih područja ima prividnu širinu na površini $l = 1.25$ km i nagib ispod površine pod kutom $\alpha = 27^\circ$. Htjeli bismo izračunati stvarnu širinu h ovog pješčanog nanosa.

⁴Američki seizmolog Charles Richter 1935. g. konstruirao je tablicu maksimalnih amplituda gibanja tla i epicentralne udaljenosti, i iskoristio je za modeliranje prve jednadžbe za određivanje magnituda potresa. Koristio je logaritamsku vezu između veličine potresa i opaženog gibanja tla.

⁵Potres prilikom kojeg je oslobođena energija $E = 10^{11.8}$ J.

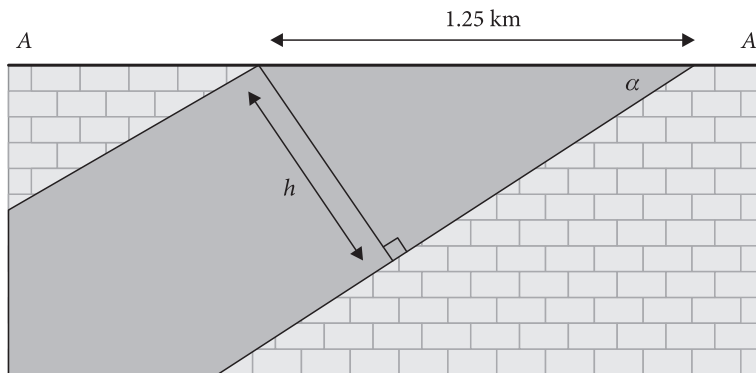


Slika 7: Geološka karta: tlocrt

Primjenjujući trigonometriju pravokutnog trokuta, iz Slike 8. vidimo da vrijedi

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \sin \alpha .$$

Uvrštavajući odgovarajuće vrijednosti, dobivamo da je visina pješčanog nanosa $h = 567$ m.



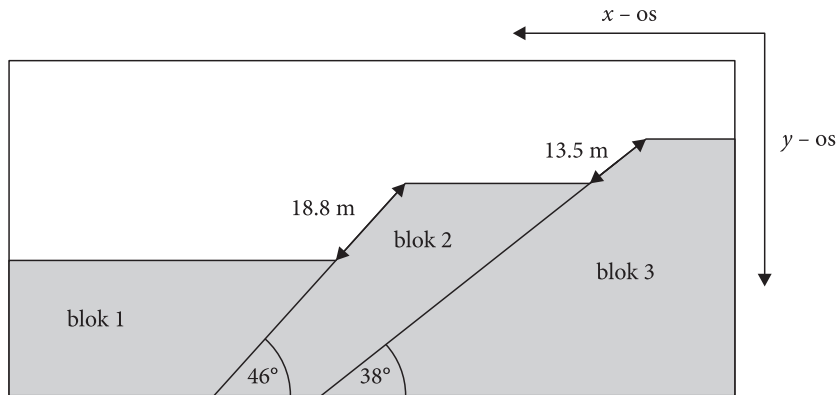
Slika 8: Geološka karta: vertikalni presjek

Na Slici 9. prikazana su dva usko smještena rasjeda različitih duljina i nagiba pomaka. Želimo odrediti ukupni relativni pomak bloka 1 u odnosu na blok 3. Izrazimo pomoću vektora pomak bloka 1 u odnosu na blok 2:

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= 18.8 \cos 46^\circ \vec{i} + 18.8 \sin 46^\circ \vec{j} \\ &= 13.1 \vec{i} + 13.5 \vec{j} \end{aligned}$$

i pomak bloka 2 u odnosu na blok 3:

$$\begin{aligned}\vec{s}_2 &= 13.5 \cos 38^\circ \vec{i} + 13.5 \sin 38^\circ \vec{j} \\ &= 10.6 \vec{i} + 8.3 \vec{j}.\end{aligned}$$



Slika 9: Usko smješteni rasjedi

Ukupni pomak odgovara rezultatnom vektoru

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = 23.7 \vec{i} + 21.8 \vec{j},$$

čija je duljina jednaka

$$|\vec{s}| = \sqrt{23.7^2 + 21.8^2} = 32.2 \text{ m},$$

a kut nagiba

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{21.8}{23.7} = 42^\circ 36' 32''.$$

To znači da se blok 1 u odnosu na blok 3 pomaknuo za 32.2 m pod kutom od $42^\circ 36' 32''$.

Literatura

- [1] D. Krivo, *Primjena matematike u geologiji*, diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2011.
- [2] S. Kurepa, *Matematička analiza, 1.dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [3] D. Waltham, *Mathematics: A Simple Tool for Geologists*, Blackwell, Oxford, 2000.
- [4] *Analiza mora u Riječkom zaljevu*, Okoliš - glasilo MZOPU-a,
<http://okolis.mzopu.hr/default.asp?ID=402>
- [5] <http://hr.wikipedia.org/wiki/Geologija>
- [6] <http://www.ucl.ac.uk/Mathematics/geomath>