Zvjezdasti brojevi

Ivana Fundurulić[1]

Uvod

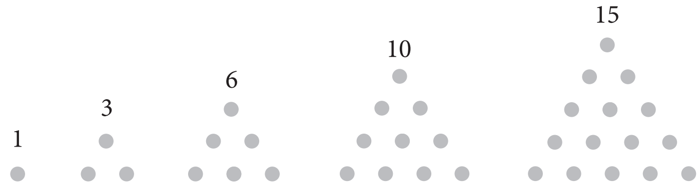
Figurativni brojevi prirodni su brojevi koji se dobivaju slaganjem točkica u određene oblike. Oni omogućuju jasno vizualno predočavanje algebarskih svojstava i relacija, a također su pomoć pri promatranju nizova i redova. Zato su pogodna tema za istraživanje koju je moguće predložiti učenicima 4. razreda za samostalan rad ili ih prezentirati kao dodatan zadatak. Na taj način učenici će sami uvidjeti ljepotu i čar matematike, jasnije će razumjeti gradivo, a razvijat će i sposobnost rješavanja novih, dosad neviđenih problema, što će biti korisno u njihovom daljnjem obrazovanju i općenito u životu.

Ovaj se članak zasniva na istraživanju Mateja Oroza, učenika 4. razreda međunarodnog programa 15. gimnazije, koji je proučavao dvije grupe figurativnih brojeva: jednostavnije, **trokutaste**, te nešto kompliciranije, **zvjezdaste brojeve**. Isto tako, kao značajan doprinos pri istraživanju ove teme poslužio je članak profesora B. Dakića iz 2005. godine (vidi [1]).

Kroz navedeno istraživanje nastojalo se uočiti matematičke pravilnosti, te konačno doći do nekih općenitih zaključaka.

Trokutasti brojevi

Krenut ćemo od točaka raspoređenih u obliku trokuta:



Proučavanjem trokuta moguće je uočiti:

1. u svakom koraku trokut ima jedan red više nego u prethodnom,
2. svaki sljedeći red ima jednu točku više nego prethodni (pa broj točaka u redu raste kao niz prirodnih brojeva: 1, 2, 3, 4...).

[1]Ivana Fundurulić, II. gimnazija, Zagreb

Poucak 50.indd 50 14.06.2012 22:30:45

U porastu ukupnog broja točaka uočena je pravilnost koja je omogućila predviđanje broja točaka i za trokute koji nisu bili grafički prikazani:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$
$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
$$S_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$
$$S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

Kasnije je vizualnom metodom (crtanjem trokuta) potvrđen ovaj izračun.

Članovi ovako dobivenog niza zapravo su primjeri **trokutastih brojeva** (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36...).

Nadalje, moguće je primijetiti da se broj točaka u svakom redu povećava na isti način kao i članovi aritmetičkog niza. Suma tih članova čini aritmetički red, vizualno predstavljen ukupnim brojem točaka u trokutu.

Kako bismo našli opći izraz za n-ti trokutasti broj, dovoljno je iskoristiti standardnu formulu za n-tu sumu članova aritmetičkog niza:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right],$$

gdje je $\boldsymbol{n}$ broj članova sume, $\boldsymbol{a_1}$ prvi član sume, a $\boldsymbol{d}$ diferencijal ili razlika između dva susjedna člana niza.

Za slučaj u kojem je $d = 1$ i $a_1 = 1$ možemo izraz malo prilagoditi, pa dobivamo sljedeće:

1)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \\ &= \frac{n}{2}\left[2\cdot 1 + (n-1)\cdot 1\right] \\ &= \frac{n}{2}\left[2 + n - 1\right] \\ &= \frac{n}{2}(n+1) \end{aligned}$$

Poucak 50.indd 51 14.06.2012 22:30:45

Ukupan broj točaka u pojedinom trokutu možemo izračunati i pomoću izraza:

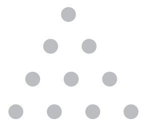
2)
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k, k \in N,$$

što je zapravo izraz za sumu prvih *n* prirodnih brojeva.

Bilo je jednostavno provjeriti valjanost dobivenih izraza (1) i 2)), pa je to i učinjeno za sume S_4 i S_7.

$$S_4 = \frac{4}{2} \cdot (4+1) = 2 \cdot 5 = 10$$
$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} k = 1+2+3+4 = 10$$

10



28

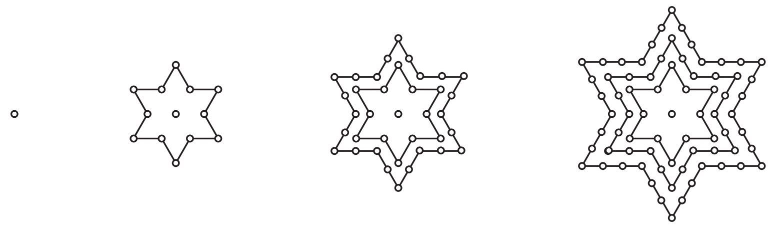
$$S_7 = \frac{7}{2} \cdot (7+1) = \frac{7}{2} \cdot 8 = 28$$
$$S_7 = \sum_{k=1}^{7} k = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$$

Zvjezdasti brojevi

Iduće pitanje koje se nametnulo bilo je: je li pravilo moguće primijeniti i na neke kompliciranije oblike?

U literaturi (vidi [1], [2]) se, osim trokutastih, spominju i kvadratni, te peterokutni brojevi.

No, zašto ne bismo stvari učinili još malo interesantnijima, te proučili neki oblik koji je još složeniji, recimo oblik zvijezde?



S_1 S_2 S_3 S_4

Poucak 50.indd 52 14.06.2012 22:30:45

Broj točaka u nacrtanim zvijezdama raste na sljedeći način:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 12 = 1 + \mathbf{1} \cdot 12 = 13$$
$$S_3 = 1 + 12 + 24 = 1 + \mathbf{3} \cdot 12 = 37$$
$$S_4 = 1 + 12 + 24 + 36 = 1 + \mathbf{6} \cdot 12 = 73$$

Način na koji se povećava broj točaka nije bilo teško uočiti. Budući da smo odabrali šesterokraku zvijezdu, znamo da je ona omeđena s dvostruko više, odnosno 12 strana. U svakom idućem koraku dodajemo po jednu točku na svaku stranu. Tako je broj točaka u svakom koraku za 12 veći nego u prethodnom.

Tako, na primjer, broj točaka za 5 korak možemo izračunati na sljedeći način:

$$12, 24, 36, 48 \rightarrow 12 + 24 + 36 + (36 + 12).$$

Pomoću ove formule može se pronaći broj točaka za peti i šesti korak, bez crtanja zvijezde:

$$S_5 = 1 + 12 + 24 + 36 + 48 = 1 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 12 = 1 + \mathbf{10} \cdot 12 = 121$$
$$S_6 = 1 + 12 + 24 + 36 + 48 + 60 = 1 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 12 = 1 + \mathbf{15} \cdot 12 = 181$$

Kada u navedenim izrazima izlučimo broj 12, možemo uočiti da je faktor, koji u tako zapisanim sumama množi broj 12, zapravo trokutasti broj iz 1. dijela istraživanja (1, 3, 6, 10, 15, 21...).

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 1 \cdot 12$$
$$S_3 = 1 + 3 \cdot 12$$
$$S_4 = 1 + 6 \cdot 12$$
$$S_5 = 1 + 10 \cdot 12$$
$$S_6 = 1 + 15 \cdot 12$$

Imajući to na umu, lako je doći do vrijednosti bilo koje druge sume, recimo S_7:

$$S_7 = 1 + \left(12 \cdot (1-1) + 12 \cdot (2-1) + 12 \cdot (3-1) + 12 \cdot (4-1) + 12 \cdot (5-1) + 12 \cdot (6-1) + 12 \cdot (7-1)\right) =$$
$$= 1 + (12 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 12 \cdot 6) =$$
$$= 1 + (0 + 12 + 24 + 36 + 48 + 60 + 72) =$$
$$= 1 + 252 =$$
$$= 253$$

Poucak 50.indd 53 14.06.2012 22:30:45

Iz svega navedenog moguće je doći i do općeg izraza koji bi vrijedio za bilo koji prirodni broj k $(k \in \mathbb{N})$.

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 12 \cdot (k-1)$$

$$S_n = 1 + 12 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot [(n-1)+1] = 1 + 12 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot n$$

Faktor 12 pojavljuje se isključivo zbog broja krakova zvijezde (bavili smo se šesterokrakom zvijezdom s ukupnim brojem od $2 \cdot 6 = 12$ dužina koje je omeđuju).

Kada bi zvijezda imala p krakova, bila bi omeđena s $2p$ dužina, pa bi opći izraz za zvijezdu s bilo kojim brojem krakova glasio:

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2p \cdot (k-1)$$

$$S_n = 1 + 2p \cdot \frac{n-1}{2} \cdot n$$

Oba izraza provjerena su testiranjem na zvijezdi s 5 krakova.

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 2 \cdot 5 \cdot (2 - 1) = 1 + 10 = 11$

$S_3 = 1 + 2 \cdot 5 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 5 \cdot (3 - 1) = 1 + 10 + 20 = 31$

$S_4 = 1 + 2 \cdot 5 \cdot (2 - 1) + 2 \cdot 5 \cdot (3 - 1) + 2 \cdot 5 \cdot (4 - 1) = 1 + 10 + 20 + 30 = 61$

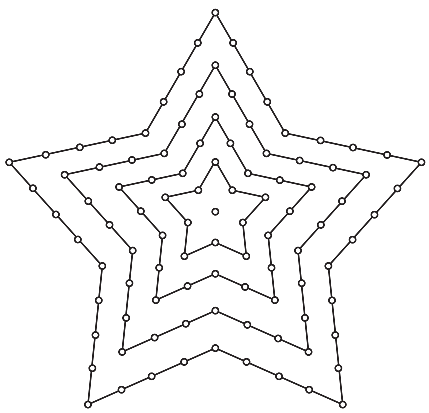
$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{2-1}{2} \cdot 2 = 1 + 10 = 11$

$S_3 = 1 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{3-1}{2} \cdot 3 = 1 + 30 = 31$

$S_4 = 1 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{4-1}{2} \cdot 4 = 1 + 60 = 61$

Crtanjem opisane zvijezde provjerena je valjanost općih izraza.



Poucak 50.indd 54 14.06.2012 22:30:45

Brojenjem točaka lako je pokazati da opća formula vrijedi.

Ipak, i tako zadana formula ima određena ograničenja:

1) Budući da se radi o broju točaka, ograničeni smo na skup cijelih brojeva.

2) Izraz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2p(k-1) = \lim_{k\to\infty}\left[2p(k-1)\right] = \lim_{k\to\infty}(2pk-2p) = \infty$$

pokazuje da nema matematičkih ograničenja kod povećavanja broja točaka. Broj točaka moguće je izračunati za bilo koji broj krakova i bilo koji korak. Ipak, prilikom crtanja zvijezda javlja se vizualno ograničenje. Naime, ako broj točaka previše povećamo, nećemo moći razlučiti jednu od druge. Isto tako, što više povećamo broj krakova, zvijezda će sve više nalikovati na kružnicu, te će vizualan prikaz postati nepregledan i nepraktičan.

Zaključak

Trokutasti i zvjezdasti brojevi prikladna su tema za istraživanje u 4. razredu srednje škole jer se daju povezati s geometrijskim nizovima i redovima. Učenike se zadavanjem ovakve teme može zainteresirati, potaknuti na razmišljanje i samostalno zaključivanje, kao na i primjenu matematičkih alata kao što je *Sketchpad*. Tema je i vizualno atraktivna, pa je pogodna za postere ili prezentacije u razredu.

Što dalje?

Ukoliko vas je zainteresirala ova tema i želite je detaljnije istražiti ili se okušati u njezinoj primjeni, proučite niže navedenu literaturu (vidi [2], [3], [4]). Ovdje izdvajam dva od niza zadataka ovog nepresušnog područja koje potiče maštu i kreativnost od razdoblja Starih Grka i Euklida, pa sve do današnjih dana.

Zadatak 1. Svaki je cijeli broj trokutast, ili se može zapisati kao suma dvaju trokutastih brojeva, ili pak kao suma triju trokutastih brojeva. Provjeri!

Zadatak 2. Nađi najmanji kvadrat koji se može zapisati kao zbroj kubova triju ili više uzastopnih brojeva.

Literatura:

[1] Dakić B., *Figurativni brojevi, Miš,* godina VII, br. 31, 2005.

[2] Dudeney, H. E., *Amusements in Mathematics* New York: Dover, pp. 67 and 167, 1970.

[3] McDaniel, W. L., *Triangular Numbers in the Pell Sequence*, *Fib. Quart.* **34**, 105-107, 1996.

[4] Ming, L., *On Triangular Fibonacci Numbers, Fib. Quart.* **27**, 98-108, 1989.

Poucak 50.indd 55 14.06.2012 22:30:45