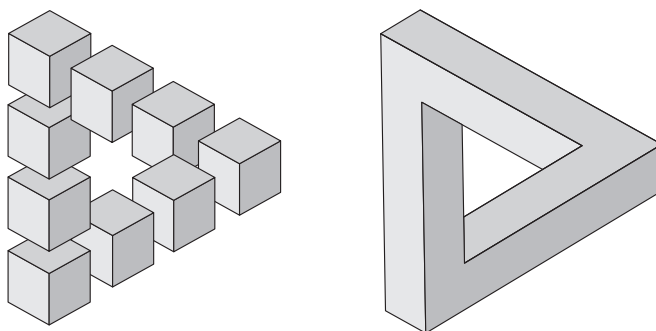


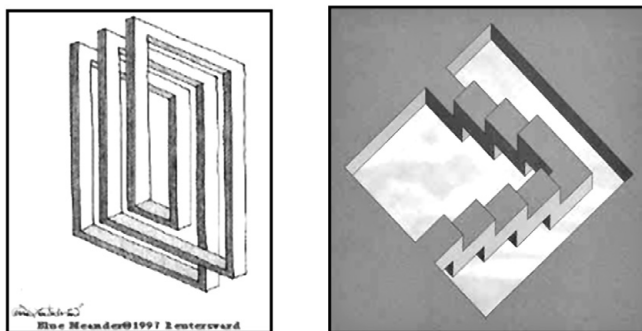
Nemoguće figure u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka

NIKOL RADOVIĆ¹, RENATA SVEDREC², TANJA SOUCIE³, IVANA KOKIĆ⁴

Nemoguće figure (iluzije) trijumf su mašte i razigranosti nad realnošću. Neki kažu da su *nemoguće figure* nelogična maska logičnosti. Vidjeti nešto i percipirati - nije isto. Najbolje to potvrđuju *nemoguće figure* prikazane na sljedećim slikama.



Slika 1. Penrose Triangle



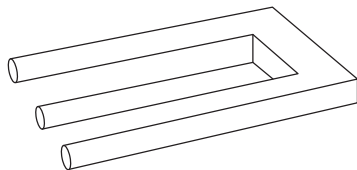
Slika 2. Oscar Reutersvärd

¹Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

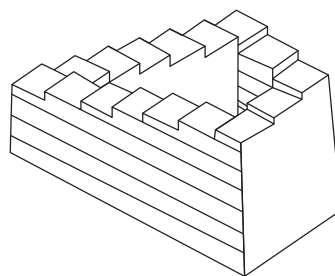
²Renata Svedrec, OŠ Otok, Zagreb

³Tanja Soucie, OŠ Gustava Krkleca, Zagreb

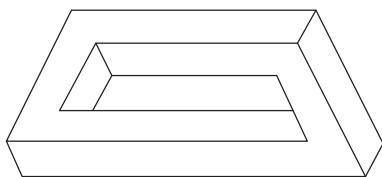
⁴Ivana Kokić, OŠ Trnsko, Zagreb



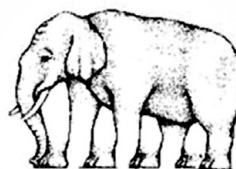
Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.



Koliko nogu ima ovaj slon?

Slika 6.



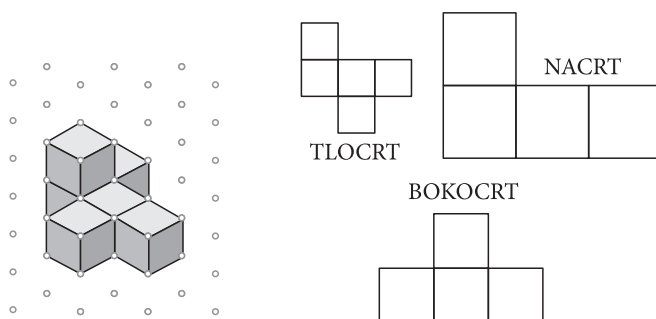
Slika 7. Escher



Slika 8. Escher

Pri proučavanju geometrijskih figura u *dvodimenzijском svijetu* sve se čini logično, baš kako treba. Problem nastaje kada te dvodimenzijske tvorevine treba rekonstruirati u trodimenzijском okruženju. Dakle, problem je u vizualizaciji prostora. *Nemoguće iluzije* idealne su za proučavanje. Tema nije standardna. Iskustvo nas uči da su takve teme učenicima posebno zanimljive (jer im se čini da *rade* nešto što *nije* matematika/geometrija). To učiteljima omogućava poučavanje matematike kroz nestandardne aktivnosti i *prikrivene* metode deskriptivne geometrije. U Poučku 49 prikazane su (kroz primjere) aktivnosti osmišljene za postupno upoznavanje učenika s *prikrivenim* metodama deskriptivne geometrije ili vizualizacijom prostora. Poučavanje se može podijeliti na tri koraka:

1. Korak – crtanje/konstruiranje projekcija geometrijske figure *složene* od kocica u kvadratnoj mreži kako bi se odmah uočavala veza među projekcijama, a time i odnosi dimenzija. Tako će se izbjeći situacija prikazana na slici 9. Jesu li ovo projekcije istog tijela?



Slika 9.

2. Korak - crtanje/konstruiranje projekcija bilo koje geometrijske figure;

3. Korak - konstruiranje geometrijske figure prema zadanim projekcijama u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka, pri čemu je preporuka već zadane projekcije prvo nacrtati/konstruirati u kvadratnoj mreži i time odrediti dimenziju, jer mora postojati poveznica između projekcija, tj. neke dužine koje vidimo, primjerice i u tlocrtu i nacrtu, ne mogu biti različitih duljina; ne smijemo svaku projekciju crtati/konstruirati u posebnome mjerilu.

U želji da osmislimo nastavne aktivnosti s temom *vizualizacije prostora*, došle smo na ideju crtati/konstruirati *nemoguće geometrijske figure* u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka i tako vježbati *prostorni zor*. Primjeri koji slijede su pripremljene aktivnosti za učenike, koje su rješavali na satu. Većina je konstrukcija *nemogućih figura/iluzija* (Matka 76, 77) zahtjevnija, ili bolje rečeno kompliciranija za crtati, ali i za objasniti. Izometrijska mreža pojednostavljuje samu konstrukciju, što je dodatna motivacija za učenike. Sve aktivnosti mogu se crtati/konstruirati klasično (trokut, šestar) ili uporabom bilo kojeg programa dinamične geometrije kao alata za crtanje. Kako bismo izbjegli komentare tipa *urednost i preciznost ne stanuju ovdje* - sve aktivnosti učenici su radili pomoću dinamične geometrije kao alata za crtanje. Pokazalo se da program dinamične geometrije kao alat omogućava učenicima crtanje/konstruiranje geometrijskih figura na ekranu (jednom od mogućih dvodimenzijskih oblika). Dinamičnost za posljedicu ima da se nacrtana/konstruirana geometrijska figura može „šetati” po ekranu, mijenjati dimenzije, te sagledati iz nekog „zgodnijeg” kuta, a to je kod crtanja/konstruiranja *nemogućih figura* ponekad više nego potrebno. Ovaj način rada pokrenuo je i učenike koji imaju različite grafomotoričke poteškoće. Oni pitaju, komentiraju i objašnjavaju korake konstrukcije - za razliku od klasičnog rada, kada ti isti učenici šute ili iz njih morate izvlačiti riječi. Budući da učenicima nije bio stran rad matematike/geometrije na računalu, u primjerima nisu dani koraci konstrukcija u programu dinamične geometrije.

Na slici 10. nacrtana je *nemoguća figura* u interaktivnoj izometrijskoj trokutastoj mreži točaka (<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125/>). Ako imate priliku, svakako s učenicima probajte ovu aktivnost. Pazite, samo se čini jednostavno,

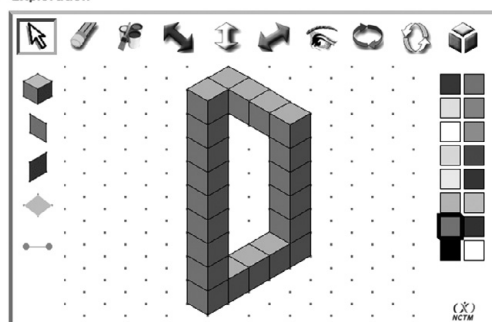
no nije baš tako. Ovakav način rada od učenika zahtijeva smišljanje koraka slaganja kockica, strategija od koje kockice početi slagati (*odozgo prema dolje, ili od lijeva prema desno, ili od desna prema lijevo*), kako riješiti preklapanja nekih kockica, njihovih strana, ... Dakle, nije dovoljno samo *lijepljenje kocke do kocke*. Što s kockama u mimosmjernim ravninama? Bolje rečeno, učenik mora predvidjeti korake *crtanja/slaganja*, mora *vidjeti* sve korake unaprijed.

Isometric Drawing Tool

Use this interactive tool to create dynamic drawings on isometric dot paper. Draw figures using edges, faces, or cubes. You can shift, rotate, color, decompose, and view in 2-D or 3-D. Start by clicking on the cube along the left side; then, place cubes on the grid where you would like them.

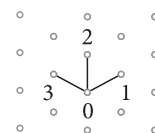
☑ Instructions

☑ Exploration



Slika 10.

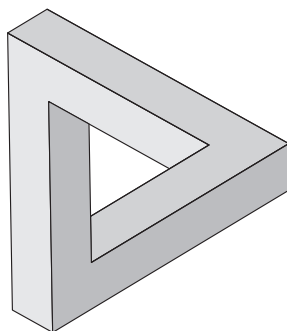
Zbog jednostavnijeg objašnjenja samih konstrukcija, prvo ćemo u lijevom donjem kutu nacrtati/konstruirati tri dužine $\overline{01}$, $\overline{02}$, $\overline{03}$ sa zajedničkom točkom 0. Zvat ćemo ih *os - dužine*, slika 11. Tim dužinama bit će definirani/određeni smjerovi crtanja bridova *nemogućih figura*.



Slika 11.

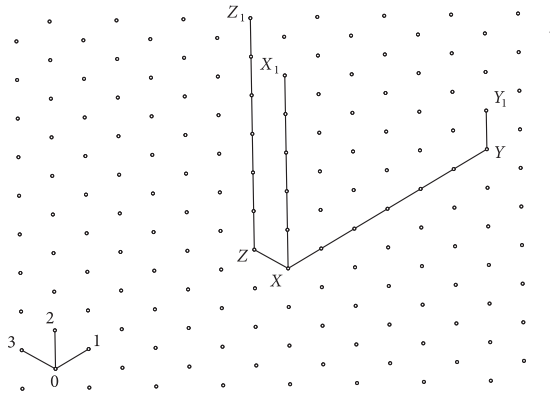
Primjer 1. (KONSTRUKCIJA 1)

Nacrtajmo/konstruirajmo *nemogućí trokut* sa slike 12.



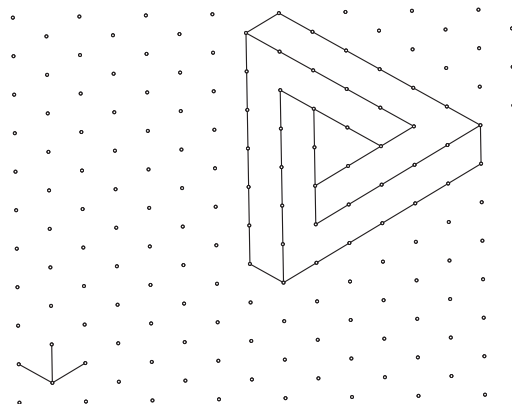
Slika 12.

- U lijevom donjem kutu ekrana nacrtajmo/konstruirajmo *os – dužine*.
- Odaberemo proizvoljnu točku, X .
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid *nemogućeg trokuta* \overline{XY} koji je usporedan s dužinom $\overline{01}$ i vrijedi $|XY| = 6|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid *nemogućeg trokuta* \overline{XZ} koji je usporedan s dužinom $\overline{03}$ i vrijedi $|XZ| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{ZZ_1}$, $\overline{XX_1}$, $\overline{YY_1}$ usporedne s dužinom $\overline{02}$, za koje redom vrijedi: $|ZZ_1| = 6|01|$, $|XX_1| = 5|01|$, $|YY_1| = |01|$, slika 13.



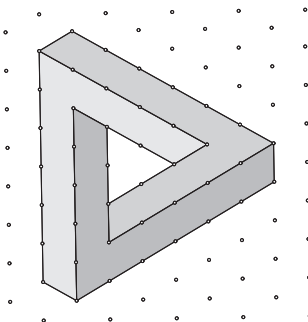
Slika 13.

- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{Z_1Z_2}$, $\overline{X_1X_2}$, $\overline{Y_1Z_3}$ usporedne s dužinom $\overline{03}$, za koje redom vrijedi: $|Z_1Z_2| = 5|01|$, $|X_1X_2| = 3|01|$, $|Y_1Z_3| = 6|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{Z_2T_2}$, $\overline{Y_1T_1}$ usporedne s dužinom $\overline{01}$, za koje redom vrijedi: $|Z_2T_2| = 3|01|$, $|Y_1T_1| = 5|01|$.
- Polupravac T_1T_2 i dužina $\overline{X_1X_2}$ sijeku se u točki T_3 . Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{T_1T_3}$.
- „Brisanjem” oznaka vrhova i *os – dužina* konstruirali smo *geometrijsku figuru* u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka, slika 14.



Slika 14.

- Bojenjem površina tonovima sive boje, postizemo efekt trodimenzionalnosti nemoguće geometrijske figure, slika 15.

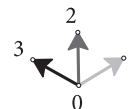


Slika 15.

Primjer 2. (KONSTRUKCIJA 2)

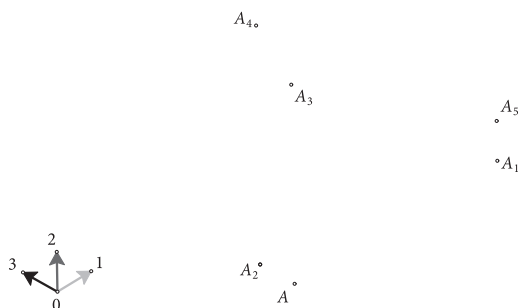
U ovoj konstrukciji izometrijska trokutasta mreža tačaka bit će *nevidljiva*, a opet ćemo je primjenjivati tako što ćemo primjenjivati geometrijsku transformaciju ravnine – *translaciju*, i opet podignuti razinu *prostornog zora*.

- U lijevom donjem kutu ekrana nacrtajmo tri vektora $\overline{01}$, $\overline{02}$, $\overline{03}$ sa zajedničkom početnom tačkom 0, slika 16. Tim vektorima (pa i suprotnim) bit će definirano „šetanje” tačaka po ekranu.



Slika 16.

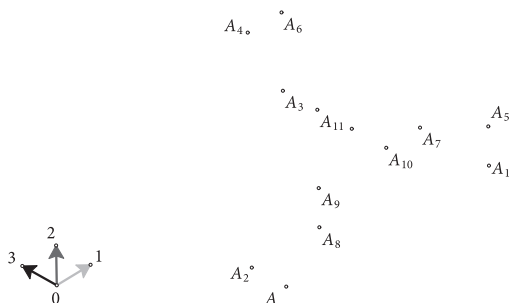
- Nacrtajmo proizvoljnu tačku, A .
- Točku A transliramo u tačku A_1 za vektor $6 \overline{01}$.
- Točku A transliramo u tačku A_2 za vektor $\overline{03}$.
- Točku A transliramo u tačku A_3 za vektor $5 \overline{02}$; tačku A_2 transliramo u tačku A_4 za vektor $6 \overline{02}$; i tačku A_1 transliramo u tačku A_5 za vektor $\overline{02}$, slika 17.



Slika 17.

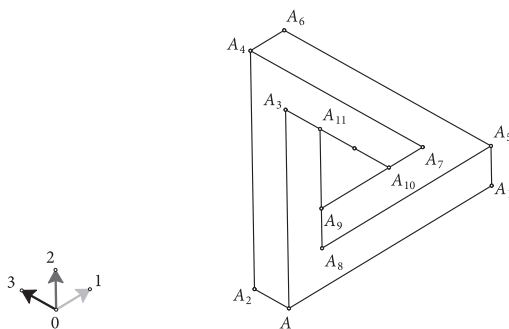
- Translatirajmo tačku A_4 u tačku A_6 za vektor $\overline{01}$, te u tačku A_7 za vektor $5 \overline{03}$.

- Translatirajmo točku A_3 u točku A_{10} za vektor $3\overline{30}$, te u točku A_{11} za vektor $\overline{30}$.
- Translatirajmo točku A_5 u točku A_8 za vektor $5\overline{10}$, te točku A_8 u točku A_9 za vektor $\overline{02}$, slika 18.



Slika 18.

- Nacrtajmo/konstruirajmo dužine $\overline{AA_1}, \overline{AA_2}, \overline{A_2A_4}, \overline{AA_3}, \overline{A_1A_5}, \overline{A_3A_{10}}, \overline{A_4A_6}, \overline{A_5A_6}, \overline{A_4A_7}, \overline{A_7A_9}, \overline{A_8A_{11}}$.
- Konstruirali smo *geometrijsku figuru* u *nevidljivoj* izometrijskoj trokutastoj mreži točaka, slika 19.



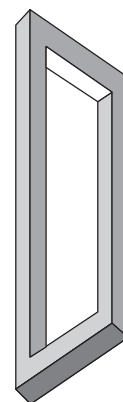
Slika 19.

- Bojenjem *površina* tonovima sive boje, „brisanjem” oznaka vrhova i *vektora*, konstruirali smo *nemogući trokut*, slika 19.

Primjer 3.

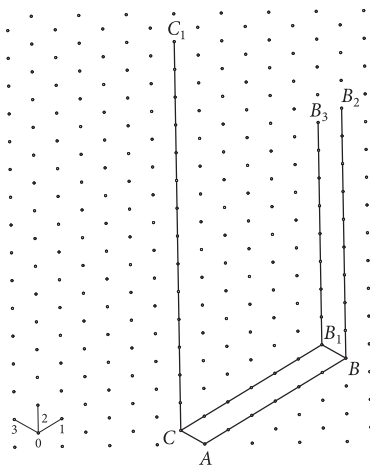
Nacrtajmo/konstruirajmo *nemogući pravokutnik* sa slike 20.

- Kao i u Primjeru 1., prvo nacrtamo *os – dužine* i neku točku A .
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid *nemogućeg pravokutnika* \overline{AB} koji je usporedan s dužinom $\overline{01}$ i vrijedi: $|XY| = 6|01|$.



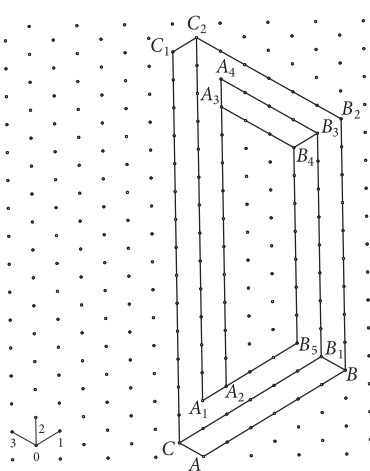
Slika 20.

- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove *nemogućeg pravokutnika* \overline{AC} i $\overline{BB_1}$ koji su usporedni s dužinom $\overline{03}$ i vrijedi: $|AC| = |BB_1| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{CC_1}$, $\overline{B_1B_3}$, $\overline{BB_2}$ usporedne s dužinom $\overline{02}$ za koje redom vrijedi: $|CC_1| = 14|01|$, $|B_1B_3| = 8|01|$, $|BB_2| = 9|01|$, slika 21.

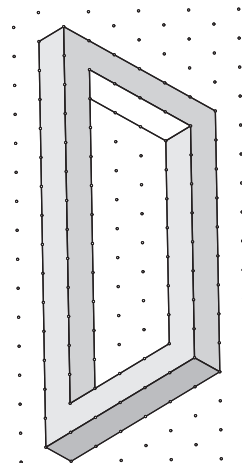


Slika 21.

- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{C_1C_2}$, $\overline{B_3B_4}$ usporedne s dužinom $\overline{01}$ za koje redom vrijedi: $|C_1C_2| = |B_3B_4| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{B_3A_4}$ i $\overline{B_4A_3}$ koji su usporedni s dužinom $\overline{03}$ i vrijedi: $|B_3A_4| = 4|01|$, $|B_4A_3| = 3|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{C_2A_1}$, $\overline{A_4A_2}$, $\overline{B_5B_4}$ usporedne s dužinom $\overline{02}$ za koje redom vrijedi: $|C_2A_1| = 13|01|$, $|A_4A_2| = 11|01|$, $|B_5B_4| = 7|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{A_1B_5}$, slika 22.



Slika 22.



Slika 23.

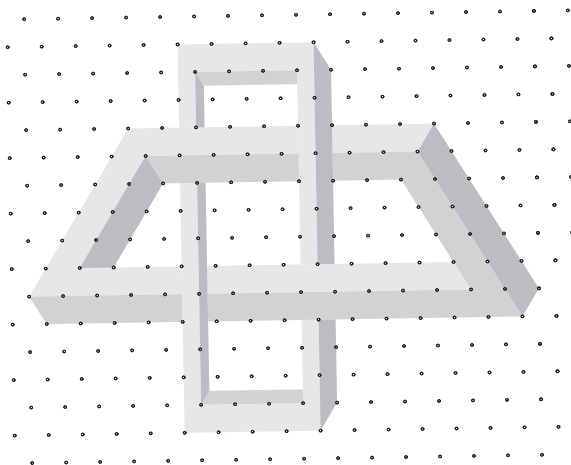
- „Brisanjem” oznaka vrhova i os – dužina konstruirali smo *nemogući pravokutnik* u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.
- Bojenjem *površina* tonovima sive boje vizualizirali smo *nemoguću figuru*, slika 23.

Zadatak 1.

- Nacrtaj/konstruiraj *nemogući pravokutnik* u *nevidljivoj izometrijskoj trokutastoj mreži*.
- Napiši korake konstrukcije.

Primjer 4.

Ako u **Primjeru 3.** konstruirani *nemogući pravokutnik* rotiramo za kut veličine 90° , konstruirat ćemo *nemogući pravokutnik* u *nemogućem pravokutniku*, slika 24.



Slika 24.

Zadatak 2.

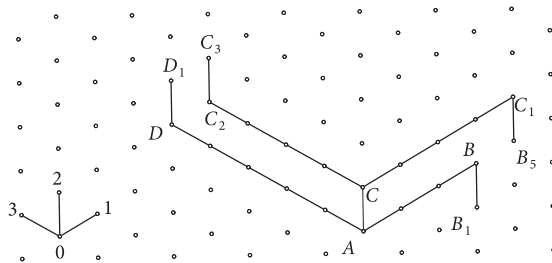
- Nacrtaj/konstruiraj *nemogući pravokutnik* u *nemogućem pravokutniku* u *nevidljivoj izometrijskoj trokutastoj mreži*.
- Napiši korake konstrukcije.

Primjer 5.

Nacrtajmo/konstruirajmo *nemoguće stepenice*.

- Kao i u prethodnim **Primjerima**, krećemo od os – dužina nacrtanih u lijevom kutu ekrana i proizvoljne točke A .
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid *nemogućih stepenica* \overline{AB} koji je usporedan s dužinom $\overline{O1}$ i vrijedi: $|AB| = 3|O1|$.

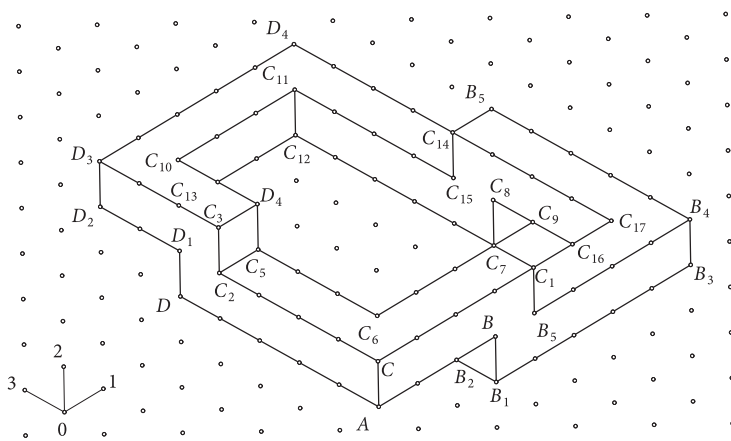
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid *nemogućih stepenica* \overline{AC} koji je usporedan s dužinom $\overline{02}$ i vrijedi: $|AC| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid *nemogućih stepenica* \overline{AD} koji je usporedan s dužinom $\overline{03}$ i vrijedi: $|AD| = 5|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{CC_1}$ koji je usporedan s dužinom $\overline{01}$ i vrijedi: $|CC_1| = 4|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{CC_2}$ koji je usporedan s dužinom $\overline{03}$ i vrijedi: $|CC_2| = 4|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{DD_1}, \overline{C_2C_3}, \overline{BB_1}, \overline{C_1B_5}$ usporedne s dužinom $\overline{02}$ i duljine $|01|$, pri čemu bridovi $\overline{DD_1}, \overline{C_2C_3}$ «idu prema gore», a bridovi $\overline{BB_1}, \overline{C_1B_5}$ «prema dolje» slika 25.



Slika 25.

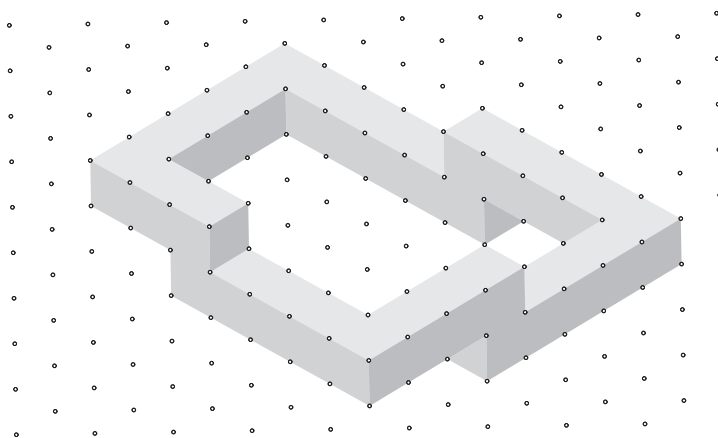
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{C_2C_5}, \overline{C_3D_4}$ usporedne s dužinom $\overline{01}$ za koje redom vrijedi: $|C_2C_5| = |C_3D_4| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{B_1B_2}, \overline{C_1C_7}$ usporedne s dužinom $\overline{03}$ za koje redom vrijedi: $|B_1B_2| = |C_1C_7| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{C_5C_6}$ usporedan s dužinom $\overline{03}$, gdje vrijedi: $|C_5C_6| = 3|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{C_6C_7}$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{C_3D_3}, \overline{D_1D_2}, \overline{D_4C_{10}}$ usporedne s dužinom $\overline{03}$ za koje redom vrijedi: $|C_3D_3| = 3|01|$, $|D_1D_2| = 2|01|$, $|D_4C_{10}| = 2|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{D_2D_3}$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{D_3D_4}, \overline{C_{10}C_{11}}, \overline{B_1B_3}, \overline{B_5B_4}, \overline{C_1C_{17}}$ usporedne s dužinom $\overline{01}$ za koje redom vrijedi: $|D_3D_4| = 5|01|$, $|C_{10}C_{11}| = 3|01|$, $|B_1B_3| = 5|01|$, $|B_5B_4| = 4|01|$, $|C_1C_{17}| = 2|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{B_3B_4}$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{C_{11}C_{12}}$ usporedne s dužinom $\overline{02}$, gdje vrijedi: $|C_{11}C_{12}| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{C_{12}C_7}$.

- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{C_{12}C_{13}}$ usporedne s dužinom $\overline{01}$, gdje vrijedi: $|C_{12}C_{13}| = 2|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{D_4C_{14}}, \overline{C_{11}C_{15}}$ usporedne s dužinom $\overline{03}$ za koje vrijedi: $|C_{11}C_{15}| = |D_4C_{14}| = 4|01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo bridove $\overline{C_{15}C_{14}}, \overline{B_5C_{14}}$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{C_7C_8}$ usporedne s dužinom $\overline{02}$, gdje vrijedi: $|C_7C_8| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{C_7C_9}$ usporedne s dužinom $\overline{01}$, gdje vrijedi: $|C_7C_9| = |01|$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo brid $\overline{C_8C_{10}}$ usporedne s dužinom $\overline{03}$, gdje vrijedi: $|C_8C_{10}| = 2|01|$, slika 26.



Slika 26.

- „Brisanjem” oznaka vrhova i os – dužina konstruirali smo nemoguće stepenice u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.
- Bojenjem površina tonovima sive boje vizualizirali smo nemoguće stepenice, slika 27.

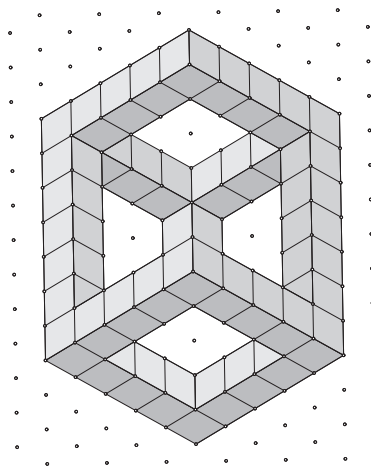
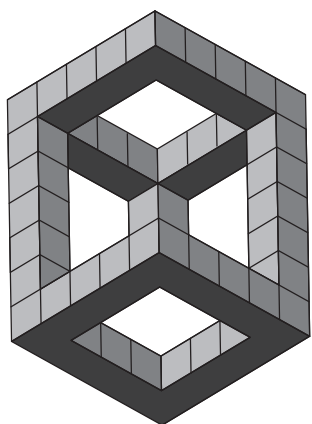


Slika 27.

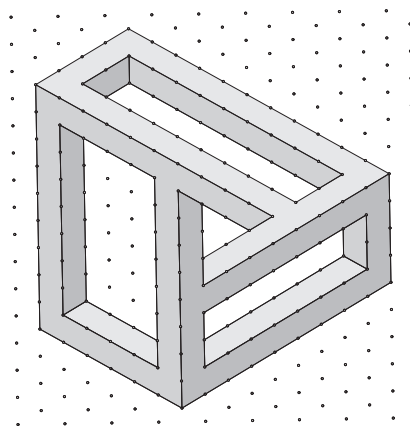
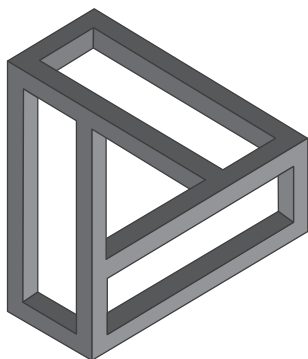
Zadatak 3.

- Nacrtaj/konstruiraj *nemoguće stepenice* u nevidljivoj izometrijskoj trokutastoj mreži.
- Napiši korake konstrukcije.

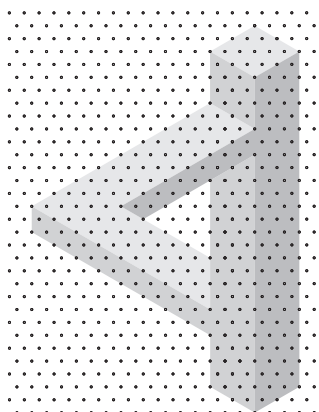
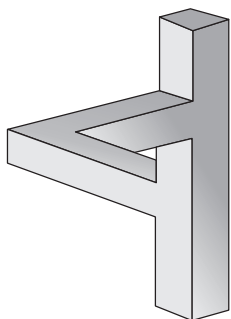
Na sljedećim su slikama učenički radovi, pri čemu je uz svaku sliku dan i original.



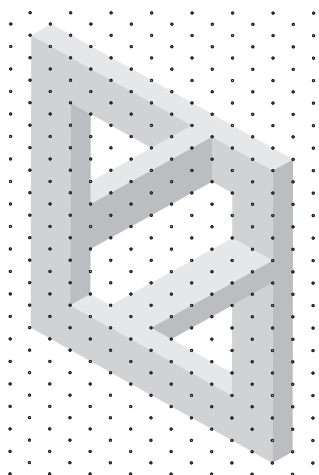
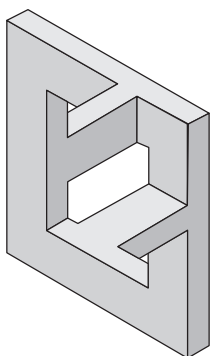
Slika 28.



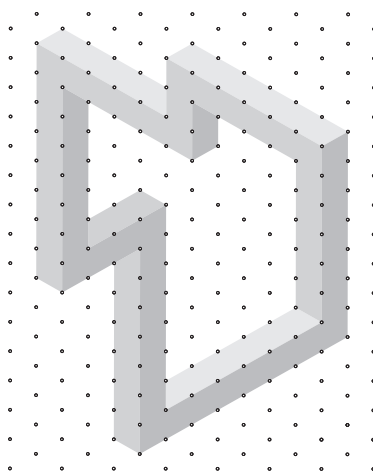
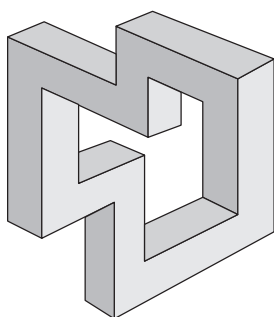
Slika 29.



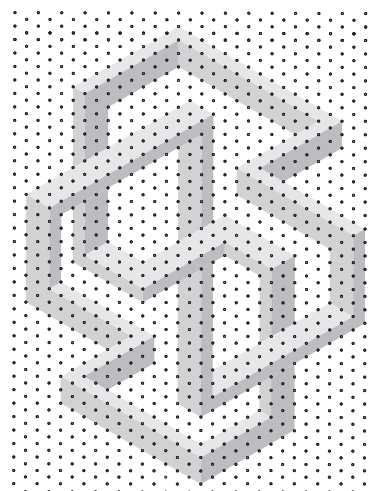
Slika 30.



Slika 31.



Slika 32.



Slika 33.

Literatura:

1. M. Garden: *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton & Company, New York, 2001.
2. N. Radović: *Nemoguće figure*, Matka 14 (2005./2006.) 53, 8 – 11.
3. N. Radović: *Nemoguće figure i još malo*, Matka 14 (2005./2006.) 54, 94 – 97.
4. N. Radović: *Koktel iluzija*, Matka 15 (2006./2007.) 58, 79 – 83.
5. T. Pappas: *The Joy of Mathematics Discovering Mathematics All Around You*, Wide World Publishing/ Tetra, San Carlos, 2006.
6. N. Radović: *Nemoguće figure*, Matka 19 (2010./2011.) 76, 276 – 281.

Internet adrese:

- <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125> (17.5.2012.)
- <http://www.eyetricks.com/0703.html> (17.5.2012.)
- <http://www.eyetricks.com/5101.htm> (17.5.2012.)
- <http://opticalillusion4u-1.webs.com> (17.5.2012.)
- <http://opticalillusion4u-1.webs.com/p10.htm> (17.5.2012.)
- <http://www.mathorama.com/geom/lessons/impossible.html> (17.5.2012.)
- <http://imp-world.narod.ru/english/library/grey/grey34.html> (17.5.2012.)
- <http://im-possible.info/english/art/reutersvard/reut5.html> (17.5.2012.)