Razni dokazi Cauchy-Schwarz-Bunjakovskijeve nejednakosti

Ljiljana Arambašić[1] i Ana Kralj[2]

Neka je X unitaran prostor uz skalarni produkt $(\cdot,\cdot)$. Tada za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|,$$

pri čemu je $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ norma elementa x. Slučaj $|(x, y)| = \|x\|\|y\|$ nastupa točno onda kada su x i y linearno zavisni vektori. Ovo je jedna od najosnovnijih i najpoznatijih nejednakosti u matematici, a naziva se Cauchy-Schwarz-Bunjakovskijeva nejednakost (što ćemo kratiti u CSB nejednakost). Naziv je dobila po trojici poznatih matematičara koji su prvi objavili nejednakost ovog tipa za posebne slučajeve: A.-L. Cauchy (1821.) za sume, te V. Bunjakovski (1859.) a zatim i A. Schwarz (1888.) za integrale. CSB nejednakost često koristimo u rješavanju raznih zadataka, ali i u dokazima teorema iz svih područja matematike. To je i razlog zbog kojeg i u novijim radovima često nailazimo na njene generalizacije.

Mnogi nama poznati skupovi zapravo su unitarni prostori. Na primjer, za svaki $n \in \mathbf{N}$, skup svih uređenih n-torki realnih brojeva $\mathbf{R}^n$ je unitaran prostor uz skalarni produkt elemenata

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ definiran kao

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n .$$

Tada CSB nejednakost poprima oblik

$$(1) \qquad |a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2},$$

za proizvoljne $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. Pritom se jednakost postiže ako i samo ako postoji $c \in \mathbf{R}$, tako da je $a_i = b_i$ za sve $i = 1, \ldots, n$, ili $b_i = c a_i$ za sve $i = 1, \ldots, n$.

Dokazati CSB nejednakost nije teško. Stoga je zanimljivo da se i danas smišljaju novi načini kako je dokazati, odnosno interpretirati. U ovom radu iznosimo nekoliko različitih dokaza CSB nejednakosti (1).

[1]Ljiljana Arambašić, PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu
[2]Ana Kralj, prof. mat.

Prije nego prijeđemo na dokaze, uočimo da je za (1) dovoljno provjeriti da za sve $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in \mathbf{R}$ vrijedi

(2) $$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

To je posljedica poznate relacije

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \le |a_1||b_1| + |a_2||b_2| + \ldots + |a_n||b_n|$$

i primjene (2) na pozitivne brojeve $|a_1|,\ldots,|a_n|,|b_1|,\ldots,|b_n|$ s desne strane nejednakosti.

1. Dokazi

Za početak navodimo jedan vrlo jednostavan i kratak dokaz. Unatoč tome, ovaj način dokazivanja nije jako čest u standardnim udžbenicima.

Dokaz 1. Za zadane n te $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,\ldots,n$, označimo

$$A := \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad B := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \qquad C := \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

Možemo pretpostaviti da je $C > 0$, jer je za $C = 0$ tvrdnja trivijalno ispunjena. Tada je

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \frac{B}{C}b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\frac{B}{C}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + \frac{B^2}{C^2}\sum_{i=1}^{n} b_i^2$$
$$= A - 2\frac{B^2}{C} + \frac{B^2}{C} = A - \frac{B^2}{C}.$$

Zbog $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \frac{B}{C}b_i\right)^2 \ge 0$ slijedi $A - \frac{B^2}{C} \ge 0$, to jest $B^2 \le AC.$ □

Sljedeći dokaz provodi se koristeći kvadratnu funkciju. Dobro je poznato da, ako je $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadratna funkcija takva da je $f(x) \ge 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$, tada je $a > 0$ i $D \le 0$, pri čemu je D diskriminanta kvadratne funkcije f.

Dokaz 2. Neka su A, B, C kao maloprije, pri čemu je $A > 0$. Promatrajmo kvadratnu funkciju

$$f(x) = Ax^2 - 2Bx + C.$$

Uočimo da je

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2x^2 - 2a_ib_ix + b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_ix - b_i\right)^2.$$

Prema tome, $f(x) \ge 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$, dakle $D \le 0$. Kako je

$$D = 4B^2 - 4AC = \left(2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

slijedi CSB nejednakost.

Jednakost u (2) znači $D=0$, a tada *f* ima realnu nultočku *c*.

Tada je $0=f(c)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i c-b_i\right)^2$ odakle slijedi $b_i=ca_i, i=1,\dots,n$.

□

Za sve $a,b\in\mathbf{R}$ vrijedi $(a-b)^2\geq 0$, uz jednakost ako i samo ako su *a* i *b* jednaki. Ovo možemo zapisati i kao

$$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}. \tag{3}$$

Sljedeći dokaz zasniva se na ovoj jednostavnoj nejednakosti.

Dokaz 3. Označimo

$$A:=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad B:=\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Možemo pretpostaviti da je $A\neq 0$ i $B\neq 0$ (na primjer, $A=0$ bi značilo da su svi a_i jednaki 0, a tada je (2) trivijalno ispunjena). Prema (3) vrijedi

$$\frac{a_i}{A}\frac{b_i}{B}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{A^2}+\frac{b_i^2}{B^2}\right),\quad i=1,\dots,n, \tag{4}$$

odakle sumiranjem po svim $i = 1, \dots, n$ slijedi

$$\frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{A^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}{B^2}\right)=1,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq AB=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jednakost će se dostići točno onda kada je postignuta jednakost u (4) za sve *i*, a to je ako i samo ako je

$$\frac{a_i}{A}=\frac{b_i}{B},\quad i=1,\dots,n,$$

odnosno, $a_i=cb_i$, $i=1,\dots,n$, gdje smo stavili $c=\frac{A}{B}$.

□

Kao i svaki put kada imamo relaciju koja ovisi o prirodnom broju *n*, metoda matematičke indukcije prirodno se nameće kao način dokazivanja. Navodimo dva induktivna dokaza.

Dokaz 4. Za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna, a za $n = 2$ vrijedi sljedeći niz implikacija:

$$\begin{aligned}(a_1b_2-a_2b_1)^2\geq 0 \quad&\Rightarrow\quad 2a_1a_2b_1b_2\leq a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2\\ &\Rightarrow\quad a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+2a_1a_2b_1b_2\leq a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \qquad (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \\
&\Rightarrow \qquad |a_1b_1 + a_2b_2| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\
&\Rightarrow \qquad a_1b_1 + a_2b_2 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki n, tj. da je

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

za sve $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbf{R}$. Dokažimo da vrijedi i za $n + 1$.

Prema pretpostavci indukcije, odmah možemo zaključiti da je

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i + a_{n+1}b_{n+1} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + a_{n+1}b_{n+1}. \tag{5}$$

Nadalje, kako znamo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$, uzimajući

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}, \qquad B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

dobivamo ogradu za desnu stranu u (5):

$$AB + a_{n+1}b_{n+1} \le \sqrt{A^2 + a_{n+1}^2}\sqrt{B^2 + b_{n+1}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2},$$

što kompletira naš dokaz za $n + 1$. Prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbf{N}$.

□

Dokaz 5. Za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i $x, y > 0$ lako provjerimo da vrijedi

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{x+y} \le \frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y}. \tag{6}$$

(Nakon raspisivanja, ova se nejednakost svodi na $(\alpha y - \beta x)^2 \ge 0.$). Zanimljivo je da ova nejednakost sama sebe generalizira. Naime, ako su $\gamma \in \mathbf{R}$ i $z > 0$, tada zamjenom $\beta \Leftrightarrow \beta + \gamma$ i $y \Leftrightarrow y + z$ dobivamo

$$\frac{(\alpha + (\beta+\gamma))^2}{x + (y+z)} \le \frac{\alpha^2}{x} + \frac{(\beta+\gamma)^2}{y+z},$$

pa primjenom (6) na drugi član zdesna slijedi

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{x+y+z} \le \frac{\alpha^2}{x} + \frac{\beta^2}{y} + \frac{\gamma^2}{z}.$$

Induktivno se dobije da za sve n vrijedi

$$\frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^2}{x_1 + \dots + x_n} \le \frac{\alpha_1^2}{x_1} + \dots + \frac{\alpha_n^2}{x_n},$$

gdje su $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{R}$ i $x_1,\dots,x_n > 0$.

Odavde, uvrštavajući

$$\alpha_i = a_i b_i, \quad x_i = b_i^2, \quad i = 1,\ldots,n,,$$

slijedi

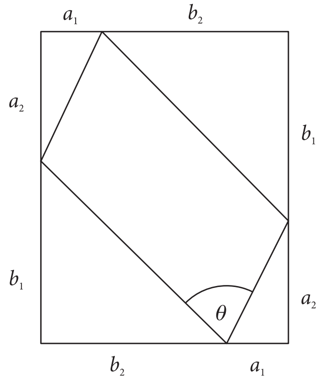
$$\frac{(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2}{b_1^2 + \ldots + b_n^2} \le \frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2} + \ldots + \frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2} = a_1^2 + \ldots + a_n^2,$$

i time je dokaz upotpunjen.

□

Zadržimo se sada na slučaju $n = 2$ i dajmo nekoliko interpretacija. Iako se u sljedećem dokazu spominje trigonometrijska funkcija, dokaz je prikladan i za osnovnu školu jer se spominjanje sinusa može izbjeći činjenicom da od svih paralelograma zadanih stranica, najveću površinu ima onaj koji je upravo pravokutnik.

Dokaz 6. (*Slučaj* $n = 2$.) Neka su a_1, a_2, b_1, b_2 pozitivni realni brojevi. Nacrtajmo pravokutnik sa stranicama duljina $a_1 + b_2$ i $a_2 + b_1$ i razdijelimo ga kao na slici.



Očito je površina nacrtanog pravokutnika jednaka zbroju površina dvaju pravokutnih trokuta sa stranicama duljina a_1 i a_2, dvaju pravokutnih trokuta sa stranicama duljina b_1 i b_2, te paralelograma sa stranicama $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ i $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Dakle,

$$\begin{aligned}(a_1 + b_2)(a_2 + b_1) &= 2 \cdot \frac{a_1a_2}{2} + 2 \cdot \frac{b_1b_2}{2} + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}\sin\theta \\ &\le a_1a_2 + b_1b_2 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2},\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$(a_1 + b_2)(a_2 + b_1) - a_1a_2 - b_1b_2 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Kako je lijeva strana jednaka $a_1b_1 + a_2b_2$, slijedi

$$a_1b_1 + a_2b_2 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

□

Dokaz sličan prethodnome može se pronaći na internetskoj stranici http://www-stat.wharton.upenn.edu/~steele/Publications/Books/CSMC/New Problems/paintings.pdf (strana 4).

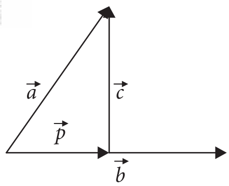
Za učenike koji su obradili vektore u ravnini može biti zanimljiva sljedeća interpretacija. Naime, ovdje se CSB nejednakost svodi na činjenicu da duljina ortogonalne projekcije vektora u smjeru nekog drugog vektora nikad ne može premašiti duljinu samog vektora.

Dokaz 7. (*Slučaj* $n = 2$.) Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva vektora u ravnini, oba različita od nul-vektora. Tada se $\vec{a}$ može napisati kao zbroj dvaju vektora od kojih je jedan kolinearan vektoru $\vec{b}$, a drugi okomit na $\vec{b}$. Drugim riječima,

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} + \vec{c},$$

za neki $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\vec{c} \perp \vec{b}$. Skalar l lako je odrediti. Naime, okomitost vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ znači da je njihov skalarni produkt $\vec{b} \cdot \vec{c}$ jednak nuli. (U ravnini se skalarni produkt može zadati kao $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$, pri čemu je $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$.) Tada je

$$0 = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} - \lambda\vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda\vec{b} \cdot \vec{b} \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}.$$



Pritom smo s $\left|\vec{b}\right|$ označili duljinu vektora $\vec{b}$.

Vektor $\vec{p} := \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}$ predstavlja ortogonalnu projekciju vektora $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{b}$.

Kako vektori $\vec{a}$, $\vec{p}$ i $\vec{c}$ čine pravokutan trokut, prema Pitagorinom poučku imamo

$$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\vec{p}\right|^2 + |c|^2,$$

što zajedno s

$$\left|\vec{p}\right| = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|^2}\left|\vec{b}\right| = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$$

daje

$$\left|\vec{a}\right|^2 = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2}{\left|\vec{b}\right|^2} + \left|\vec{c}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2.$$

Kako je $\left|\vec{c}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \geq 0$, slijedi $\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2 \leq \left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$, što je upravo CSB nejednakost.

Ovaj dokaz je zanimljiv i zato što pokazuje da je greška (tj. razlika $\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right|^2$) u CSB nejednakosti jednaka $\left|\vec{c}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$. Također, jasno je da slučaj jednakosti nastupa ako i samo ako je $\vec{c} = \vec{0}$, to jest, ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori.

□

Za kraj navedimo dva zadatka koji se mogu lako riješiti pomoću CSB nejednakosti.

Zadatak 1. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ i sve pozitivne realne brojeve $a_1,\ldots,a_n$ vrijedi

$$\sum_{i,j=1(i\neq j)}^{n} \frac{a_i}{a_j} \geq n^2 - n\,.$$

Primjenom CSB nejednakosti na $\sqrt{a_1},\ldots,\sqrt{a_n}$, te $\frac{1}{\sqrt{a_1}},\ldots,\frac{1}{\sqrt{a_n}}$ imamo

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2. \tag{7}$$

Lijeva strana jednaka je $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} = n + \sum_{i,j=1(i\neq j)}^{n} \frac{a_i}{a_j}$, pa odavde slijedi tražena relacija.

Jednakost će nastupiti ako i samo ako imamo jednakost u (7), tj. ako i samo postoji $c > 0$ tako da je $\sqrt{a_i} = c\frac{1}{\sqrt{a_i}}$, $i = 1,\ldots,n$, tj. ako i samo ako su svi a_i međusobno jednaki.

Zadatak 2. Za svaki n i sve pozitivne $a_1,\ldots,a_n$ vrijedi

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Direktno iz (2) slijedi

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\,\sqrt{a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_1^2}\,.$$

Uočimo da se jednakost postiže ako i samo ako postoji $c > 0$ sa svojstvom da je

$$a_1 = ca_2\,, \quad a_2 = ca_3\,, \quad a_{n-1} = ca_n\,, \quad a_n = ca_1\,,$$

odakle je $a_1 = ca_2 = c^2a_3 = \ldots = c^na_1$. Kako je $a_1 \neq 0$ i $c > 0$, slijedi $c = 1$, pa se jednakost postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Literatura:

1. J. W. Cannon, *The Cauchy-Schwarz Inequality: A Geometric Proof*, The American Mathematical Monthly 96 (1989.), 7, 630-631.
2. F. Dubeau, *Cauchy-Bunyakowski-Schwarz Inequality Revisited*, The American Mathematical Monthly 97 (1990.), 5, 419-421.
3. A. Kralj, *Cauchy-Schwarz-Bunjakovskijeva nejednakost*, diplomski rad, PMF -Matematički odsjek, 2011.
4. N. Lord, *Cauchy-Schwarz: As Easy as...*, The Mathematical Gazette 75, 474, p. 442., 1991.
5. R. G. Nelsen, *Proof Without Words: The Cauchy-Schwarz Inequality,* Mathematics Magazine, February, 1994.
6. M. J. Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, Cambridge University Press, New York, 2004.