Novih pet dokaza leptirovog teorema

Šefket Arslanagić[1], Alija Muminagić[2]

U [3] su dana četiri dokaza **Leptirovog teorema (Butterfly's theorem)**, a u [2] još četiri dokaza istoga teorema. Slijedi još pet dokaza ovog teorema.

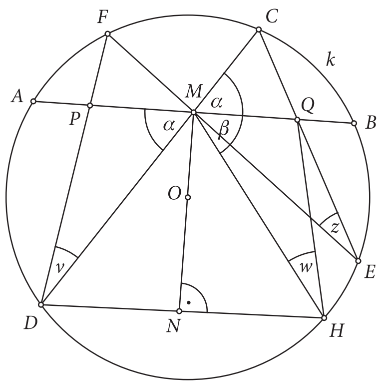
Ovaj teorem glasi:

Neka je dana tetiva $\overline{AB}$ *kružnice k, a njeno polovište je točka M. Točkom M nacrtane su dvije proizvoljne tetive* $\overline{EF}$ *i* $\overline{CD}$*. Tetive* $\overline{CE}$ *i* $\overline{FD}$ *tada sijeku pravac AB redom u točkama Q i P. Tada je točka M ujedno i polovište dužine* $\overline{PQ}$*, tj.* $|MP| = |MQ|$.

Dokaz 1. Nacrtajmo tetivu $\overline{DH}$, $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$; $H \in k$ te dužinu $\overline{MN}$, $\overline{MN} \perp \overline{DH}$, $N \in \overline{DH}$ kao i dužine $\overline{MH}$, $\overline{QH}$ i $\overline{EH}$ (sl. 1). Kako je $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$ i $\overline{MN} \perp \overline{DH}$, to je $\overline{MN} \perp \overline{AB}$, što znači da simetrala $\overline{MN}$ tetive $\overline{AB}$ prolazi kroz središte O kružnice k pa je $|MD| = |MH|$, te je zbog toga:

$$\Delta MND \cong \Delta MNH,$$

odakle slijedi da je $|\angle DMN| = |\angle HMN|$, odnosno $\alpha = \beta$, gdje je $\alpha = |\angle DMP|$ i $\beta = |\angle HMB|$.



Slika 1.

[1]Šefket Arslanagić, Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, B i H
[2]Alija Muminagić, Nykøbing, Danska

Sada zbog $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$ i $\left|\widehat{AD}\right|$[3] $= \left|\widehat{BH}\right|$ slijedi:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\left|\widehat{AD}\right| + \left|\widehat{CB}\right|\right), \text{ tj.}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\left|\widehat{BH}\right| + \left|\widehat{CB}\right|\right), \text{ te zbog } \alpha = \beta:$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\left|\widehat{BH}\right| + \left|\widehat{CB}\right|\right).$$

Ali, vrijedi također $|\angle CEH| = \frac{1}{2}\left|\widehat{CAH}\right|$. Nakon zbrajanja dviju posljednjih jednakosti, dobivamo:

$$\beta + |\angle CEH| = \frac{1}{2}\left(\left|\widehat{BH}\right| + \left|\widehat{CB}\right| + \left|\widehat{CAH}\right|\right),$$

a odavde, zbog $\left|\widehat{BH}\right| + \left|\widehat{CB}\right| + \left|\widehat{CAH}\right| = 360°$, vrijedi da je

$$\beta + |\angle CEH| = 180°,$$

pa je četverokut $MQEH$ tetivni te se oko njega može opisati kružnica. Sada slijedi da je $|\angle MHQ| = |\angle MEQ|$, tj. $w = z$ (obodni kutovi nad istim lukom $\widehat{MQ}$). Sa slike 1. uočavamo da je $|\angle FDC| = |\angle FEC|$, tj. $v = z$ (obodni kutovi nad istim lukom $\widehat{FC}$ kružnice k). Sada zbog $\alpha = \beta$, $|MD| = |MH|$ i $v = z$ slijedi da je $\Delta MPD \cong \Delta MQH$, a odavde $|MP| = |MQ|$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 2. Točkom P nacrtajmo pravac p, $p \parallel \overline{CE}$. Neka je $EF \cap p = \{K\}$ i $CD \cap p = \{L\}$ (sl. 2). Slijedi da je $|\angle PLC| = |\angle ECL|$, pa je sada:

$$\Delta PML \sim \Delta QMC,$$

te je
$$\frac{|PL|}{|CQ|} = \frac{|MP|}{|MQ|}. \tag{1}$$

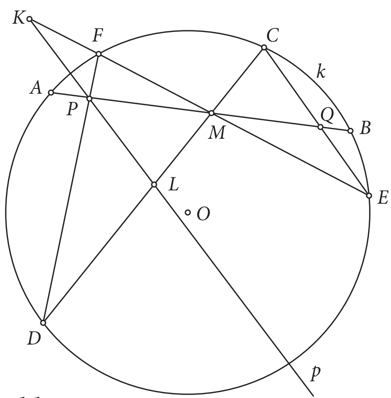
Kako je $|\angle PKM| = |\angle QEM|$, to je također

$$\Delta KMP \sim \Delta EMQ,$$

te je
$$\frac{|KP|}{|QE|} = \frac{|MP|}{|MQ|}. \tag{2}$$

Nakon množenja jednakosti (1) i (2) dobivamo:

$$\frac{|PL| \cdot |KP|}{|CQ| \cdot |QE|} = \frac{|MP|^2}{|MQ|^2}. \tag{3}$$



Slika 2.

[3] $\left|\widehat{AD}\right|$ - mjera (duljina) luka $\widehat{AD}$, a $|\angle DMP|$ - mjera (veličina) kuta $\angle DMP$

Kako je $|\angle FDM| = |\angle MEC|$ i $|\angle PKF| = |\angle MEC|$, to je $|\angle FDM| = |\angle PKF|$ kao i $|\angle KPF| = |\angle DPL|$ (vršni kutovi), pa slijedi da je

$$\Delta KFP \sim \Delta DLP ,$$

te odavde

$$\frac{|PL|}{|DP|} = \frac{|FP|}{|KP|}, \text{ tj.}$$

$$|PL| \cdot |KP| = |DP| \cdot |FP|. \tag{4}$$

Sada iz (3) i (4) dobivamo:

$$\frac{|MP|^2}{|MQ|^2} = \frac{|DP| \cdot |FP|}{|CQ| \cdot |QE|}. \tag{5}$$

Prema teoremu o potenciji točaka P i Q u odnosu na kružnicu k, imamo:

$$|DP| \cdot |FP| = |AP| \cdot |PB| \tag{6}$$

i

$$|CQ| \cdot |QE| = |BQ| \cdot |QA|. \tag{7}$$

Sada iz (5), (6) i (7) dobivamo:

$$\frac{|MP|^2}{|MQ|^2} = \frac{|AP| \cdot |PB|}{|BQ| \cdot |QA|} = \frac{(|MA| - |MP|)(|MA| + |MP|)}{(|MB| - |MQ|)(|MB| + |MQ|)} = \frac{|MA|^2 - |MP|^2}{|MB|^2 - |MQ|^2},$$

a odavde:

$$|MP|^2 \cdot |MB|^2 = |MQ|^2 \cdot |MA|^2,$$

te zbog $|MB| = |MA|$:

$$|MP|^2 = |MQ|^2, \text{ tj.}$$

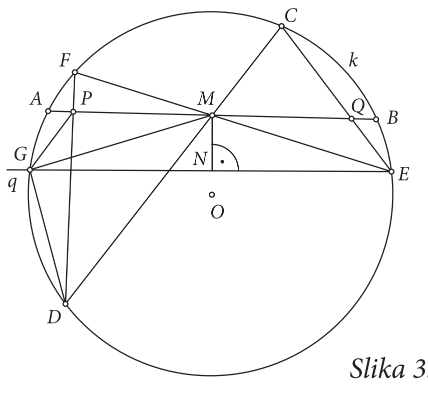
$|MP| = |MQ|$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 3. Točkom E nacrtajmo pravac q, $q \parallel \overline{AB}$ i neka je $q \parallel k = \{G\}$, tj. $\overline{EG} \parallel \overline{AB}$. Neka je $\overline{MN} \perp \overline{EG}$, gdje $N \in \overline{GE}$. Nacrtajmo dužine $\overline{PG}, \overline{MG}$ i $\overline{DG}$ (sl.3).

Sada imamo:

$$|\angle GDP| (|\angle GDF|) = |\angle GEF|, \tag{1}$$

$$|\angle PMG| = |\angle MGE|. \tag{2}$$



Slika 3.

Očigledno je dužina $\overline{MN}$ simetrala dužine $\overline{GE}$ pa je trokut ΔMGE jednakokračan, stoga vrijedi:

$$|GM| = |ME| \text{ i } |\angle GEF| = |\angle MGE| . \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) slijedi:

$$|\angle GDP| = |\angle PMG| . \tag{4}$$

Dakle, točke P, M, D i G su konciklične, tj. četverokut $PMDG$ je tetivni, pa je:

$$|\angle PGM| = |\angle PDM| . \tag{5}$$

Kako je

$$|\angle CEF| = |\angle PDM| \left(|\angle FDM| \right), \tag{6}$$

to iz (5) i (6) slijedi:

$$|\angle PGM| = |\angle QEM| \left(|\angle CEF| \right).$$

Prema tome je

$$|\angle QME| = |\angle MEG| \text{ i } |\angle MGE| = |\angle MEG|, \text{ a zbog (2) je } |\angle PMG| = |\angle MGE|.$$

Dakle, $|\angle PMG| = |\angle QME|$, te slijedi:

$$\Delta PMG \cong \Delta QME ,$$

a odavde

$|MP| = |MQ|$, što je trebalo dokazati.

Dokaz 4. Neka je dužina $\overline{D'F'}$ ($D', F' \in k$) simetrična slika dužine $\overline{DF}$ u odnosu na promjer kružnice k koji prolazi točkom M i okomit je na dužinu $\overline{AB}$ (sl.4). Neka je $\overline{D'F'} \cap AB = \{P'\}$.

Tada je

$$|\angle MFA| = \frac{1}{2}\left(|\widehat{FA}| + |\widehat{BE}| \right), \tag{1}$$

kao i

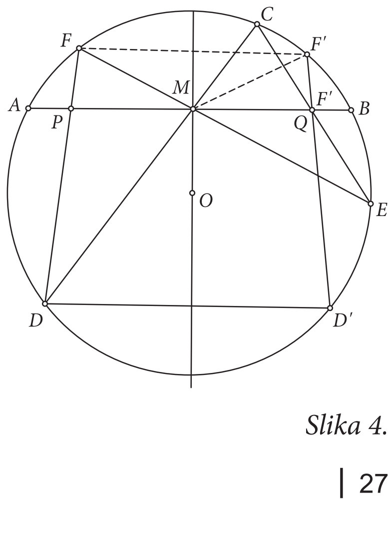
$|\angle FMA| = |\angle F'MB|$ (zbog simetrije i $\overline{AB} \perp \overline{MO}$),

te

$$|\widehat{F'A}| = |\widehat{FA}| \text{ (zbog simetrije).}$$

Sada iz (1) dobivamo:

$$|\angle F'MB| = \frac{1}{2}\left(|\widehat{F'B}| + |\widehat{BE}| \right) = \frac{1}{2}|\widehat{F'E}| . \tag{2}$$



Slika 4.

Također, vrijedi:

$$|\angle F'CE| = \frac{1}{2}\left|\widehat{F'E}\right|. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) slijedi:

$$|\angle F'MB| = |\angle F'CE|.$$

Dakle, četverokut $F'CMQ$ je tetivni te se može upisati u kružnicu. Sada dobivamo:

$$|\angle MF'Q|\left(|\angle MF'D'|\right) = |\angle MCQ|\left(|\angle MCE|\right), \tag{4}$$

$$|\angle MCE| = |\angle DFE|, \tag{5}$$

$$|\angle DFE| = |\angle D'F'M| \text{ (simetrija)} \tag{6}$$

$$|\angle D'F'M| = |\angle P'F'M|. \tag{7}$$

Sada iz (4), (5), (6) i (7) slijedi:

$$|\angle MF'Q| = |\angle MF'P'|,$$

a odavde slijedi da se točka *P'*, simetrična točki *P* u odnosu na točku *M*, podudara s točkom *Q*, te je $|MP| = |MQ|$, što je trebalo dokazati.

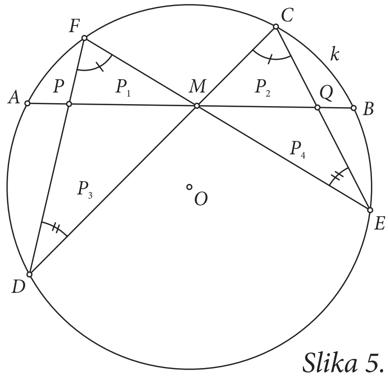
Dokaz 5. Označimo s p_1, p_2, p_3 i p_4 redom površine trokuta ΔMFP, ΔMCQ, ΔMDP, ΔMEQ (sl. 5). Kako je $|\angle DFM| = |\angle ECM|$ i $|\angle FDM| = |\angle CEM|$ (obodni kutovi nad istim lukom kružnice *k*), to imamo:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{|FP|\cdot|FM|}{|CQ|\cdot|CM|}, \text{ kao i}$$

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{|DP|\cdot|DM|}{|QE|\cdot|EM|},$$

a odavde nakon množenja:

$$\frac{p_1\cdot p_3}{p_2\cdot p_4} = \frac{|FP|\cdot|FM|\cdot|DP|\cdot|DM|}{|CQ|\cdot|CM|\cdot|QE|\cdot|EM|}. \tag{1}$$



Slika 5.

Kako je također:

$$|\angle FMP| = |\angle EMQ| \text{ i } |\angle DMP| = |\angle CMQ|,$$

to slijedi:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{|MP|\cdot|MD|}{|MQ|\cdot|MC|} \text{ i } \frac{p_1}{p_4} = \frac{|MF|\cdot|MP|}{|ME|\cdot|MQ|},$$

a odavde nakon množenja:

$$\frac{p_1\cdot p_3}{p_2\cdot p_4} = \frac{|MF|\cdot|MP|\cdot|MP|\cdot|MD|}{|MQ|\cdot|CM|\cdot|ME|\cdot|MQ|}. \tag{2}$$

Sada iz (1) i (2) dobivamo:

$$\frac{|FP|\cdot|DP|}{|CQ|\cdot|QE|}=\frac{|MP|^2}{|MQ|^2}. \tag{3}$$

Na temelju teorema o potenciji točaka P i Q u odnosu na kružnicu k, dobivamo:

$$|FP|\cdot|DP|=|AP|\cdot|BP| \tag{4}$$

i

$$|CQ|\cdot|QE|=|AQ|\cdot|BQ|. \tag{5}$$

Zbog kratkoće pisanja stavimo da je $|AM|=|BM|=a$, $|PM|=x$, $|QM|=y$.

Sada iz (3), (4) i (5) dobivamo:

$$\frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)}=\frac{x^2}{y^2}$$

ili

$$\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}=\frac{x^2}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2\left(a^2-x^2\right)=x^2\left(a^2-y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2=a^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2=y^2$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

$\Leftrightarrow |PM|=|QM|$, što je trebalo dokazati.

Literatura

1. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.
2. Arslanagić, Š., Muminagić, A., *Još neki dokazi leptirovog teorema*, Poučak, Vol. 11, br. 50, lipanj 2012., Zagreb.
3. Čerin, Z., *Poučci o leptirima*, Poučak, Vol. 2, br. 8, prosinac 2001., Zagreb.
4. Palman, D., *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
5. Sivašinskii, I. H., *Zadači po matematike dla vneklasnih zanatii*, Prosvešćenie, Moskva, 1968.
6. Škljarski, D. O., Čencov, N. N., Jaglom, I. M., *Izabrani zadaci I teoremi planimetrije*, Nauka, Moskva, 1967.