

Veliki uzlovi i poveznice dobivene rezanjem generaliziranih Möbius-listing tijela

GIELIS J.¹, TAVKELIDZE I.², RICCI P. E.³

1. Univerzalni prirodni oblici i matematika

Matematika je jezik egzaktne znanosti. Bez obzira daleko smo od cjelovite slike svijeta; geometrizacija fizike čini se jednostavnijom od biologije, kako je i I. M. Gelfand dobro razumio: *„Postoji još jedan fenomen koji se može usporediti u svojoj nezamislivosti s nezamislivošću učinka matematike u fizici - koji je primijetio Wigner – to je jednako nezamisliva neučinkovitost matematike u biologiji.”* Dva sastojka bila su ključna u prošlosti: združivanje uniformnih opisa određenih fenomena koničnih presjeka (Galileo, Kepler) s općenitijim određivanjem zakrivljenja na temelju izotropije i kružnica (Newton). Slična procedura združivanja uniformnih opisa kao generalizacije u jednom koraku koničnih presjeka s općenitijim okvirom Riemann-Finsler geometrije, topologije i primijenjene matematike jedan je od ciljeva suradnje autora. Ova se suradnja temelji na matematici stare škole, a nastoji produbiti i proširiti razumijevanje i primjenu (najvećim dijelom) matematike devetnaestog stoljeća.

Ovaj uniformni opis Gielisovim transformacijama [2,3] odnosi se na uniformni i opći opis prirodnih oblika [4], od osnovnih čestica do tipa modela prostora i vremena Velikoga praska (FLRV-) [5], stoga i naziv *univerzalni prirodni oblici*. Gielisove krivulje, plohe i transformacije postižu nešto značajno: one daju opći opis kvadrata, zvijezda, kružnica, piramida te velikog broja drugih apstraktnijih prirodnih oblika. One čine univerzalne prirodne oblike, kao što su presjeci konika u duhu grčke te moderne geometrije, mjerljivima i simetričnima.

Gielisove krivulje i plohe omogućavaju nam razumjeti kako drugi organizmi, suočeni s različitim uvjetima okoliša i građe organizma, doživljavaju svijet sa specifičnom geometrijom kao apstrakcije takve percepcije, rastući iz središnje točke. Za zvijezdu, cvijet, atome ili zvijezde, pravi kut i udaljenosti možda se mjere različito, a ne na naš euklidski način. Gielisove krivulje i (hiper) plohe uvode „blage” anizotropije pa se postavlja da su „najprirodnije krivulje i plohe u euklidskoj geometriji” [6]. Posebice

¹Johan Gielis, *University of Antwerp, Department of Bioscience Engineering 2020 Antwerp, Belgija*

²Ilia Tavkelidze, *Iv. Javakishvili Tbilisi State University, Department of Mathematics, Tbilisi 0186, Gruzija*

³Paolo Emilio Ricci, *Università Campus Bio-medico di Roma, 21 00128 Roma (Italija)*

primjena relevantnih Gielisovih transformacija na „najprirodnije” krivulje i plohe euclidске geometrije (za dimenziju 2: kružnice i logaritamske spirale) rezultira većinom (ravninskih) oblika koje primjećujemo u prirodi – u biologiji, fizici, kristalografiji, itd.

Bez obzira na njihovu moć, one su jednostavne generalizacije rada Gabrijela Laméa (1795.-1860.). Laméove krivulje kombiniraju različite ravninske oblike kao što su kvadrati, pravokutnici, rombovi, zvjezdasti mnogokuti, kružnice, elipse i druge konične presjeke u jednu jednadžbu. Ova klasa oblika poznata je pod nazivom *superkružnice* te *superelipse*. Gielisove transformacije postale su duboko utkane u matematiku, čistu i primijenjenu. Inkorporirane su i u geometriju, uključujući Riemann-Finsler geometriju i teoriju podmnogostrukosti (submanifold) [5, 6].



Slika 1. 5/2 struktura uzlova

2. Generalizirana Möbius-listing tijela GML_m^n

Krajem 1990-ih analitičke reprezentacije široke klase geometrijskih figura nazvanih „generalizirana zakrenuta i rotirana” („Generalized Twisting and Rotated”) GTR tijela proučavao je Ilia Tavkelidze [8 – 15]. Ta analitička reprezentacija dala je brojne klasične objekte (toruse, helikoide, Möbiusove vrpce i ine zavojne plohe, kao što je prikazano slikom 2). Gielisove funkcije također se mogu koristiti kao početna funkcija (krivulja) za tu generaliziranu klasu. U ovom slučaju na isti način mogu biti definirana tijela s unutrašnjom strukturom.

Generalizirana Möbiusova tijela GLM_m^n definirana su sljedećom analitičkom reprezentacijom:

$$X(\tau, \psi, \theta) = \left[R + p(\tau, \theta) \cos\left(\frac{n\theta}{m}\right) - q(\tau, \psi) \sin\left(\frac{n\theta}{m}\right) \right] \cos(\theta)$$

$$Y(\tau, \psi, \theta) = \left[R + p(\tau, \psi) \cos\left(\frac{n\theta}{m}\right) - q(\tau, \psi) \sin\left(\frac{n\theta}{m}\right) \right] \sin(\theta)$$

$$Z(\tau, \psi, \theta) = \left[p(\tau, \psi) \sin\left(\frac{n\theta}{m}\right) + q(\tau, \psi) \cos\left(\frac{n\theta}{m}\right) \right],$$

ili, alternativno,

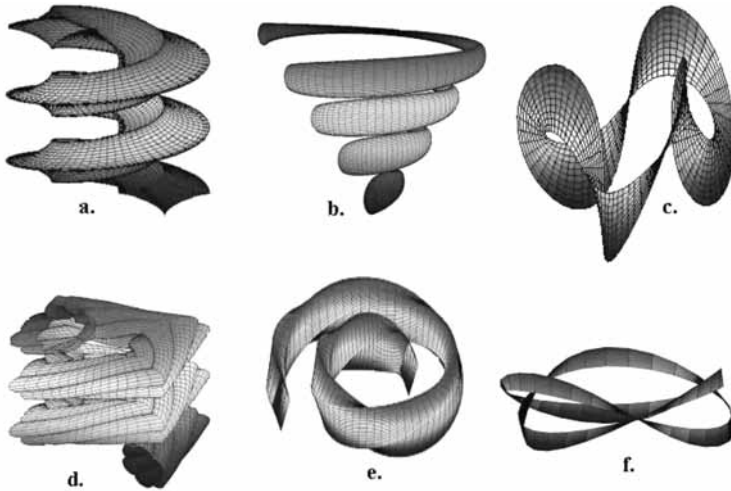
$$X(\tau, \psi, \theta) = \left[R + p(\tau, \psi) \cos\left(\psi + \frac{n\theta}{m}\right) \right] \cos(\theta)$$

$$Y(\tau, \psi, \theta) = \left[R + p(\tau, \psi) \cos\left(\psi + \frac{n\theta}{m}\right) \right] \sin(\theta)$$

$$Z(\tau, \psi, \theta) = \left[p(\tau, \psi) \sin\left(\psi + \frac{n\theta}{m}\right) \right].$$

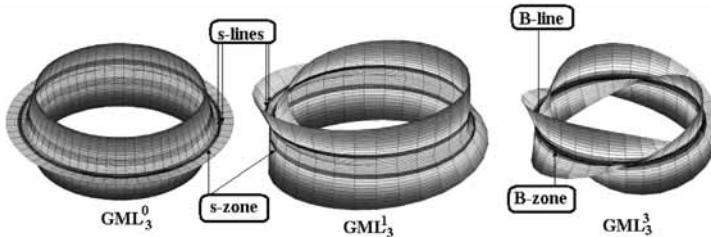
gdje su $p(\tau, \psi)$ i $q(\tau, \psi)$ dane funkcije koje mogu definirati m -simetrične plohe ili tijela, čiji krajevi mogu biti spojeni rotacijom ili uvijanjem. Generalizirane Möbius-Listing plohe i tijela su podskup GTR-a. Kraći zapis za GLM_m^n tijela ima gornji i donji indeks. Donji indeks označava simetriju tijela ili plohe, a gornji broj zakretaja. Tako je GLM_6^{12} torus valjak sa šest simetrija te 12 zakretaja (jasno, zakretaji su povezani s osima simetrije figure).

Na slici 3. je oblik s tri simetrije koji je ili nezakrenut ili ima neparan broj zakretaja (1 ili 3).



Slika 2. Primjeri GML tijela

Na GLM_m^n tijelima ili plohama mogu biti definirane B-linije i s-linije (slika 3) te također B-zone (zone koje sadrže B-linije) ili s-zone (zone koje ne sadrže B-linije). U ovoj grupi tijela ograničenje je dano činjenicom da su osnovne linije kružnice.



Slika 3. GLM_3^n tijela

Ove analitičke reprezentacije ili jednadžbe zamjena su za „recepte” ili „računalne algoritme” za generiranje Möbiusova traka, torusa, zavojnih ploha ili kompleksnijih oblika. One nisu samo jednostavne parametrizacije različitih oblika, već objedinjuju te oblike u jednu jednadžbu, omogućavajući kontinuirane transformacije iz kruga ili sfere u bilo koji drugi oblik, uključujući uzlove, određene poliedre, neovisne o topološkim ograničenjima.

U tom su smislu transformacije iz sfere do torusa, primjerice s prijelazima kao što su prstenasti, rogati i vretenasti torusi ili do uzlova, posve prirodne. Redukcija „recepta” na jednadžbe, s pratećim umanjivanjem kompleksnosti oblika, uvijek je vodila do napretka u znanosti. Ova „stara vrsta znanosti” bila je točna od grčkih matematičara do današnjih dana. Analitičke reprezentacije omogućavaju jednostavnije i lako obradive formulacije za odgovarajuća geometrijska proučavanja (naročito u geometriji i topologiji manjih dimenzija), primijenjenoj matematici te matematičkoj fizici.

3. Rezanjem GML ploha do trakastih uzlova i spojeva

Geometrija situs ili *analiza situs*, općepoznata kao topologija, motivacija je za istraživanje *GTR-GML tijela*, te se bavi Möbiusovim vrpčama, uzlovima i putovima. Möbiusova vrpca je matematička ikona. Ovaj „zakrenuti plašt valjka” dobiva se kada se jedan kraj pravokutne vrpce papira izokrene prije nego što se spoje oba kraja. Jednostavno kao što se čini, Möbiusove vrpce su jednostrane, neorijentirane plohe s nekim kontraintuitivnim svojstvima. Praćenje staze na Möbiusovoj vrpici pokazat će da ima samo jednu stranu te da se cijela vrpca može obojiti jednom bojom bez podizanja kista s papira. Kad bi se na neki način napravila identifikacija duž centralne linije (ili krivulje) prije spajanja, otkrilo bi se da je orijentacija plohe suprotna nakon spajanja. Möbiusovu vrpcu moguće je razrezati duž osnovne linije ili duž neke druge linije nazvane *s*-linijom te ovisi o broju danih zakretaja (parnom ili neparnom), pri čemu imamo četiri moguća ishoda [10, 11, 15].

Poučak 1: Rezanje duž B-linije daje dva slučaja:

Slučaj A: ako je broj zakretaja paran, tada je rezultat vrpca spojnice-2 (link-2) koja se sastoji od dvaju tijela, oba s istim brojem zakretaja kao originalna vrpca (slika 4 lijevo).

$$GML_2^{2\omega} \rightarrow^B 2 \times GML_2^{2\omega} \quad \text{link} - 2 \left\{ (2\omega)_1 \right\}$$

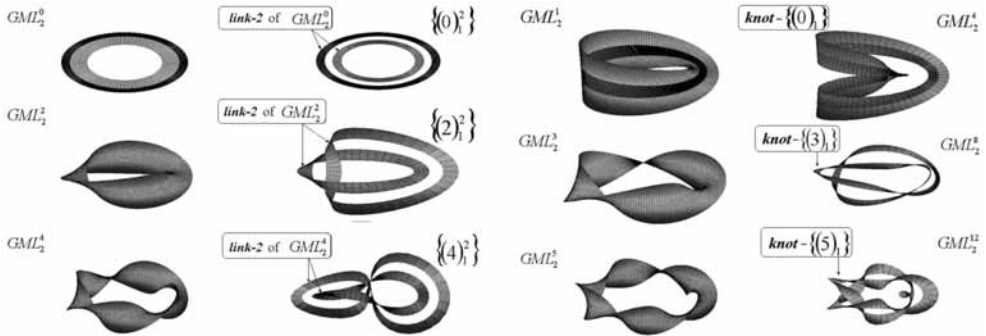
Slučaj B: ako je broj zakretaja neparan, tada je rezultat vrpca spojnice-1 ili uzao,

$$GML_2^{2\omega+1} \rightarrow^B 2 \times GML_2^{4\omega+4} \quad \text{link} - 1 \left\{ (2\omega+1)_1 \right\}$$

Kada je $\omega = 0$ kao u slučaju klasične Möbiusove vrpce, tada je

$$GML_2^1 \rightarrow^B 2 \times GML_2^4 \quad \text{link} - 1 \left\{ (0)_1 \right\}$$

Rezultati su prikazani na slici 4.



Slika 4. Lijevo: rezanje duž B-linije, Poučak 1A, desno: B-linija rezovi, Poučak 1B

Poučak 2: Rezanje duž s-linije (ne sadržavajući B-liniju) daje dva slučaja:

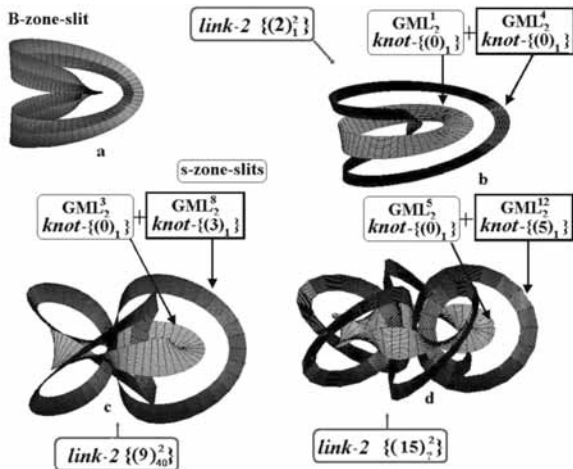
Slučaj A: ako je broj zakretaja paran, tada je rezultat vrpca spojnice-2 (link-2) koja se sastoji od dvaju tijela, oba s istim brojem zakretaja kao originalna vrpca. Ovaj je slučaj sličan 1A, ali dvije vrpce imaju različite širine:

$$GML_3^n \rightarrow^1 2 \times GML_2^{2\omega} \text{ link} - 2 \{ (2\omega)_1 \};$$

Slučaj B: ako je broj zakretaja neparan, tada je rezultat vrpca spojnice-2 koja se sastoji od dvaju tijela, od kojih je jedan uzao, a drugi nije (slika 6).

$$GML_2^{2\omega+1} \rightarrow^1 GML_2^{2\omega+1} \text{ i } GML_2^{4\omega+4} \text{ link} - 2 \{ (?)_1^? \};$$

Općenito, topološka grupa zasad je nepoznata. Nekoliko poznatih slučajeva prikazano je na slici 5.



Slika 5.

4. Rezanjem GML tijela dobivaju se veliki uzlovi i velike spojnice

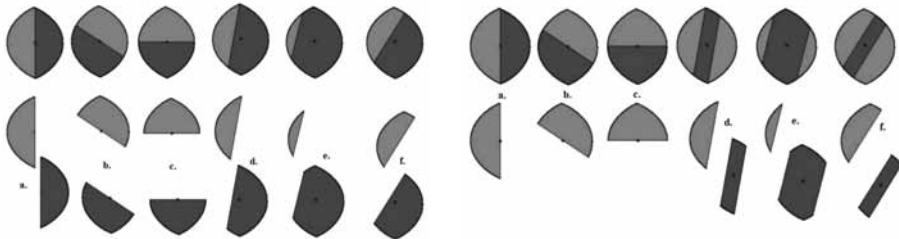
Proučavajući rezultate rezanja tijela, u obzir moramo uzeti različita tijela dobivena rezanjem. Primjerice, za 2-simetrična tijela, koja imaju isti gornji i donji indeks kao traka, ali su definirani primjerice Gielisovom krivuljom simetrije 2 (slika 6.), rezultat rezanja ovisi o tome sadrži li linija ili zona reza vrhove i točke simetrije. Na slici 7. lijevo, slučaj e. rezanjem dobivamo dva presjeka, jedan s dva vrha i jedan s četiri vrha. Rez kao što je na slici 7. desno, slučaj e daje jedan oblik s dva vrha i jedan sa šest vrhova.

SVB ploha je prerezana ploha čiji radijalni presjek sadrži vrh (vrhove) i središte simetrije radijalnog presjeka. Slično, presjek SB-plohe sadrži središte simetrije, ali ne i vrhove; presjek SV- površine sadrži vrh, ali ne i središte simetrije.

Za S_{ij} -plohu presjek je takav da se završetci ravne linije nalaze na rubovima s brojevima i te j .

Za S_{ij} -plohe, oni režu obje strane 2-simetričnog tijela, ali za S_{ii} ravna linija reže samo jednu stranu. Rezovi također mogu imati određenu debljinu: rezanja duž SVB, SB, SV i S_{ij} - ploha nazivaju se redom SVB-zona-reza, SB-zona-reza, SV-zona-reza i S_{ij} -zona-reza.

Rezultati nisu uzlovi vrpca ili njihovi spojevi (kao na slici 5.), već ih nazivamo *velikim spojnicama* te *velikim uzlovima* [15].



Slika 6.

Poučak 3: Ako je n -broj zakretaja paran ($n \equiv 2\omega$, gdje je ω broj punih okreta) i GML_2^n tijelo je razrezano duž neke od svojih razrezanih-ploha, tada se pojavljuje objekt velike spojnice-2, ali obje komponente te velike spojnice-2 imaju različite strukture, preciznije:

Slučaj A: Nakon SVB-zone-reza GML_2^n tijela nastaje objekt velike spojnice-2 čije radijalne presjeka čine dvije uglate ravninske figure za svaki prirodan $\omega = 0, 1, 2, \dots$

$$GML_2^{2\omega} \rightarrow^{SB/S_{ij}} 2 \times GML_2^{3\omega} \text{ link} - 2 \left\{ (2\omega)_1^2 \right\};$$

Slučaj B: Nakon SB-zone-reza ili S_{ij} -zone-reza ($i \neq j$, $i, j = 0, 1$) GML_2^n tijela nastaje objekt velike spojnice-2 $\left\{ (n)_1^2 \right\}$ of $GML_2^{3\omega}$ tijela čije radijalne presjeka čine tri uglate ravninske figure za svaki prirodan $\omega = 0, 1, 2, \dots$

$$GML_2^{2\omega} \rightarrow^{SB/S_{ij}} 2 \times GML_2^{3\omega} \text{ link} - 2 \left\{ (2\omega)_1^2 \right\};$$

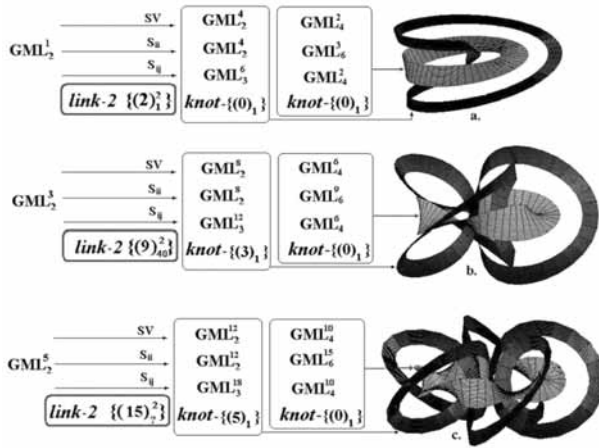
Slučaj C: Nakon SV-zone-reza GML_2^n tijela nastaje objekt velike spojnice-2 $\{(n)_1^2\}$ GML_2^n te tijela $GML_2^{3\omega}$ za svaki prirodan $\omega = 0, 1, 2, \dots$

$$GML_2^{2\omega} \rightarrow^{SVB} GML_2^{2\omega} \text{ i } GML_2^{3\omega} \text{ link} - 2 \{(2\omega)_1^2\};$$

Slučaj D: Nakon S_{ii} -zone-reza ($i = 0, 1$) GML_2^n tijela nastaju objekti velike spojnice-2 $\{(n)_1^2\}$ GML_2^n i $GML_2^{4\omega}$ za svaki prirodan $\omega = 0, 1, 2, \dots$

$$GML_2^{2\omega} \rightarrow^{S_{ii}} GML_2^{2\omega} \text{ i } GML_2^{4\omega} \text{ link} - 2 \{(2\omega)_1^2\};$$

Kada je broj zakretaja neparan, rezultati su slični Poučku 2 sa spojnicom ne-uzla i uzla (za omega...), ali oni su veliki uzlovi (s unutarnjom geometrijom). Konačan oblik tijela i broj zakretaja ovisi o načinu rezanja (slika 8.).



Slika 7.

5. Rasprava

Sustavno proučavanje GML ploha zanimljivo je područje istraživanja. Činjenica da sada imamo stvarne transformacije i jedinstvene opise tih sustavnih proučavanja velika je pomoć. To nam daje nove rezultate u geometriji nižih dimenzija, geometriji svijeta u kojemu živimo. No, postoje brojni izazovi na ovome području. U eseju o matematici i njenoj budućnosti, Sir Michael Atiyah [16] napisao je: *„Uz sve stvari beskonačne dimenzije, geometrija nižih dimenzija je sramota. Na mnoge načine dimenzije s kojima smo započeli, gdje su naši preci započeli, ostaju nešto poput enigme. Dimenzije 2, 3 i 4 su ono što zovemo „niskima“... čitavo ovo područje vezano je s fizikom, ali doista ostaje vrlo tajanstveno.“*

Möbiusove trake važne su u topologiji i diferencijalnoj geometriji, gdje pružaju najjednostavnije netrivialne primjere fibriranih svežnjeva. Pregled nedavnih istraživanja raspravlja o prisutnosti i mogućim sintetičkim stazama uzlova, poveznica i zapreka u kemiji. U biologiji, zakretaji i torzije svojstveni su većini živih organizama i struktura, od razmještaja listova na stabljici biljke i rogova na narvalu do spiralne

strukture DNA. Tijela savijene strukture s dva različita kraja (primjerice, apikalni i proksimalni razmještaj listova na stabljici biljke ili borovoj šišarci) apstraktno su slični zatvorenom Möbius-Listing tijelu. Ako su krajevi fiksirani i ako je struktura „omekšana” (uostalom, mi radimo topologiju) te su strukture GML strukture, pa zakrivljenost i torzija DNA-spirale ima utjecaj na brojne procese. Nedavni rezultati rezanja i presavijanja DNA u rekonfigurirane topološke nanostrukture s rezultirajućim spojnicama i uzlovima otvorila je perspektive u nanotehnologiji. Međutim, sve te strukture postaju predvidljive i primjena iste invarijante na DNA može dovesti do novih spoznaja u procesu replikacije i nadnamatanja.

Rezanje nije jedini mogući način sagledavanja procesa. Kod trake ili vrpce (izokrenute ili ne), proces rezanja apstraktno je sličan formiranju prostorne heterogenosti u strukturama koje prenose informacije kao što je DNA, apikalnim tvornim tkivima i Turing strojevima. Transkripcija ili translacija takvih prostorno odvojenih struktura u poruke i proizvode može rezultirati predvidljivim GML strukturama. Kombinirajući opću metodologiju za GML s univerzalnim prirodnim oblicima Gielisove transformacije postat će važan korak za prirodne znanosti.

6. Popis literature

1. Lui S. H. (2001.) *An interview with Vladimir Arnold*. Notices of the AMS 44(4): 432-438
2. Gielis, J. (2010.) *Opći prirodni oblici*. Zbornik Radova. IV. Kongres nastavnika matematike Republike Hrvatske, Zagreb 30 June-2 July, 2010. 177-188 (*Universal Natural Shapes*. Proceedings of IVth Congress of Mathematics Teachers).
3. Gielis, J. (2010.) *Geometrija univerzalnih prirodnih oblika*. Poučak - Časopis za metodiku i nastavu matematike 41: 27-39, March 2010. (The geometry of universal natural shapes. Theorem - Journal of the methodology and the teaching of mathematics).
4. Gielis J. (2003.) *A generic geometric transformation that unifies a large range of natural and abstract shapes*, American Journal of Botany, Vol. **90**(3), 333–338.
5. Gielis J., Haesen S. i Verstraelen L. (2005.) *Universal shapes: from the supereggs of Piet Hein to the cosmic egg of George Lemaître*, Kragujevac Journal of Mathematics, Vol. **28**, 55–67.
6. Verstraelen L. (2008.) *On Natural Geometrical Symmetries. Dedicated to the memory of Nomitsu. Preprint for Differential Geometry and Submanifolds*, Univ. of Murcia, Spain, 18-20 November 2008.
7. Lamé G. (1817.) *Examen de différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, M. V. Courcier imprimeur Libraire, Paris, 1818.

8. Tavkhelidze I., On the some properties of one class of geometrical figures and lines, *Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, vol. **16**, N. 1, (2001.), 35–38.
9. Tavkhelidze I. (2007.) *Classification of a Wide Set of Geometric Figures*, Lecture Notes of TICMI, Tbilisi, Volume **8**: 53–61.
10. Tavkhelidze I., (2011.) *About Connection of the Generalized Möbius Listing's surfaces with Sets of Ribbon Knots and Links*, Proceedings of Ukrainian Mathematical Congress S. 2, Topology and geometry - Kiev, 2011., 117–129.
11. Tavkelidze I., Cassisa C., Ricci P. E. (2010.) *About connection of generalized Möbius-Listing surfaces GLM_m^n with sets of knots and links*. Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica Volume IX: 183-200.
12. Ricci P. E., Tavkhelidze I., *About Some Geometric Characteristic of the Generalized Möbius Listing's surfaces*, Georgian Mathematical Journal, vol. **18**, (2009), N. 2.
13. Tavkhelidze I., Cassisa C. & Ricci P. E. (2009.) *About Connection of the Generalized Möbius Listing's surfaces with Sets of Knots and Links*. Proceedings of 4th Workshop on „Advanced Special Functions and solution of PDEs”, 24.28.V. 2009., Sabaudia, Italy.
14. Tavkelidze I., Cassisa C., Gielis J., Ricci P. E. (2012.) *About „Bulky” Links, generated by Generalized Möbius Listing's bodies*. Rendiconti di Matematica dell'Accademia dei Lincei (in the press).
15. Gielis J., Tavkelidze I., Caratelli D., Ricci P. E. (2012.) *About Bulky knots and links generated by butting of Generalized Möbius-Listing bodies and applications in the natural sciences*. MathArt Summit, Brussels, May 25, 2012. Royal Flemish Academy of Arts and Sciences.
16. Atiyah M. (2000.) *Mathematics in the 20th century. Transcript of Fields Lecture at the World Mathematical Year 2000*. Symposium, Toronto, June 7-9, 2000.