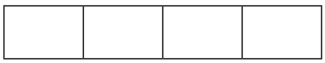
Strategije rješavanja problema - *Koliki je ukupan broj pravokutnika „u nizu“?*

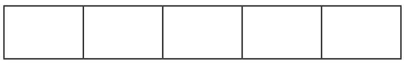
Renata Svedrec[1], Ivana Kokić[2]

Na jednom satu dodatne nastave matematike (u skupini učenika šestih razreda), učenici su rješavali zadatke na sljedećem listiću:

1. Koliko je pravokutnika, bez obzira na njihovu veličinu, na donjoj slici?



2. Koliko je pravokutnika, bez obzira na njihovu veličinu, na donjoj slici?



3. Koliko je pravokutnika, bez obzira na njihovu veličinu, na slici sastavljenoj od 6 pravokutnika u jednome redu?
4. Koliko je pravokutnika, bez obzira na njihovu veličinu, na slici sastavljenoj od n pravokutnika u jednome redu?

Odgovoriti na prva tri pitanja (10, 15, odnosno 21) nikome od njih nije predstavljao problem. Svi učenici koji pohađaju dodatnu nastavu riješili su ih korektno i prilično su uspješno znali objasniti način na koji su došli do rezultata. Najjednostavniji (ili možda najmanje jednostavan način) bio je imenovanje točaka (vrhova) na pojedinoj slici i ispisivanje svih pravokutnika navođenjem njihovih vrhova.

Taj način za prvi zadatak može djelovati korektno, na drugom se zadatku komplicira, na trećem postaje vrlo zahtjevan, a za četvrti zadatak je – neupotrebljiv. Dakle, potreban je bio neki bolji i učinkovitiji način koji bi bio uspješan i u rješavanju četvrtoga zadatka.

[1]Renata Svedrec, OŠ Otok, Zagreb
[2]Ivana Kokić, OŠ Trnsko, Zagreb

U nastavku navodimo dvije strategije (postupke i načine zaključivanja) kojima su učenici došli do rješenja četvrtoga zadatka (tj. do izraza $n(n + 1) : 2$). Te su se strategije uglavnom oslanjale na način rješavanja prvih triju zadataka.

1. način:

1. Koriste se oznake malih pravokutnika kao na sljedećoj slici:

a	**b**	**c**	**d**

A) Mali pravokutnici

a **b** **c** **d**

B) „Dvodijelni pravokutnici"

ab **bc** **cd**

C) „Trodijelni pravokutnici"

abc **bcd**

D) Najveći pravokutnik

abcd

Ukupan broj pravokutnika na slici je 4 + 3 + 2 + 1 = 10.

2. Označimo male pravokutnike kao na sljedećoj slici:

a	**b**	**c**	**d**	**e**

Dalje zaključujemo kao u prvom zadatku pa dobivamo:

A) Mali pravokutnici

a **b** **c** **d** **e**

B) „Dvodijelni pravokutnici"

ab **bc** **cd** **de**

C) „Trodijelni pravokutnici"

abc **bcd** **cde**

D) „Četverodijelni pravokutnici"

abcd **bcde**

E) Najveći pravokutnik

abcde

Ukupan broj pravokutnika na slici je 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.

3. Označimo male pravokutnike kao na sljedećoj slici:

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**

Dalje zaključujemo kao u prvom zadatku pa dobivamo:

„1 -pravokutnik”	„2 -pravokutnik”	„3 -pravokutnik”	„4 -pravokutnik”	„5 -pravokutnik”	„6 -pravokutnik”
a	**ab**	**abc**	**abcd**	**abcde**	**abcdef**
b	**bc**	**bcd**	**bcde**	**bcdef**	
c	**cd**	**cde**	**cdef**		
d	**de**	**def**			
e	**ef**				
f					

Ukupan broj pravokutnika na slici je 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.

4. Uočavamo da je broj **„1 - pravokutnika”** jednak broju malih pravokutnika koji su složeni u zadani pravokutnik. Broj **„2 - pravokutnika”** za 1 je manji od broja **„1 - pravokutnika”**, i tako redom dok ne dođemo do broja 1, tj. do broja najvećeg (zadanog) pravokutnika.

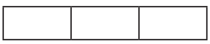
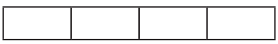
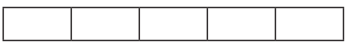
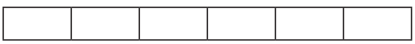
   To bi značilo da na slici sastavljenoj od 7 manjih pravokutnika u jednome redu postoji ukupno 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 pravokutnika, a na slici sastavljenoj od 8 malih pravokutnika u jednome redu postoji ukupno 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 pravokutnika.

Dakle, ako je pravokutnik sastavljen od n malih pravokutnika složenih u jednome redu, onda ćemo ukupan broj pravokutnika na slici dobiti tako da zbrojimo sve prirodne brojeve u silaznom nizu od n do 1:

$$\text{ukupan broj pravokutnika} = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

2. način:

Podatke o ukupnom broju pravokutnika organizirano prikazujemo u tablici:

Slika	Broj pravokutnika „u nizu”	Ukupan broj pravokutnika na slici
	1	1
	2	**2** + 1 = 3
	3	**3** + 2 + 1 = 6
	4	**4** + 3 + 2 + 1 = 10
	5	**5** + 4 + 3 + 2 + 1 = 15
	6	**6** + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21

Uočavamo sljedeće pravilo:

- nakon povećanja broja pravokutnika „u nizu” s 1 na 2, ukupan broj pravokutnika povećao se za 2,
- nakon povećanja broja pravokutnika „u nizu” s 2 na 3, ukupan broj pravokutnika povećao se za 3,
- nakon povećanja broja pravokutnika „u nizu” s 3 na 4, ukupan broj pravokutnika povećao se za 4,
- nakon povećanja broja pravokutnika „u nizu” s 4 na 5, ukupan broj pravokutnika povećao se za 5,
- nakon povećanja broja pravokutnika „u nizu” s 5 na 6, ukupan broj pravokutnika povećao se za 6,
- povećamo li broj pravokutnika „u nizu” sa 6 na 7, ukupan broj pravokutnika povećat će se za 7…

Dakle, ako broj pravokutnika „u nizu” povećamo za 1, ukupan broj pravokutnika na slici povećat će se za broj malih pravokutnika u novom pravokutniku.

Iako je uočena pravilnost koja je korisna za određivanje broja pravokutnika „u nizu”, ta nam pravilnost neće omogućiti izravno izračunavanje ukupnog broja pravokutnika „u nizu” od 8, 15, 20 ili općenito n pravokutnika (tj. pri rješavanju 4. zadatka).

Usporedimo li broj pravokutnika „u nizu” i ukupan broj pravokutnika na slici, možemo uočiti niz jednakosti:

$1 \cdot 1 = 1,$

$2 \cdot 1.5 = 3,$ $\quad (3 = 2 + 1)$

$3 \cdot 2 = 6,$ $\quad (6 = 3 + (2 + 1) = 3 + 3)$

$4 \cdot 2.5 = 10,$ $\quad (10 = 4 + (3 + 2 + 1) = 4 + 6)$

$5 \cdot 3 = 15,$ $\quad (15 = 5 + (4 + 3 + 2 + 1) = 5 + 10)$

$6 \cdot 3.5 = 21,$ $\quad (21 = 6 + (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 6 + 15)$

Ukupan broj pravokutnika na sljedećim slikama redom bio bi jednak:

$7 \cdot 4 = 28,$ $\quad (28 = 7 + 21)$

$8 \cdot 4.5 = 36,$ $\quad (36 = 8 + 28)$

$9 \cdot 5 = 45,$ itd. $\quad (45 = 9 + 36)$

Zaključujemo da se ukupan broj pravokutnika na slici dobiva množenjem broja pravokutnika „u nizu” (broja n) s polovinom sljedećeg prirodnog broja (brojem $0.5(n + 1)$).

Dakle, ako je pravokutnik sastavljen od n malih pravokutnika složenih u jednome redu, onda ćemo ukupan broj pravokutnika na slici dobiti kao umnožak

$$n \cdot 0.5(n + 1), \text{ tj. } \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$