

MATEMATIKA IZVAN MATEMATIKE

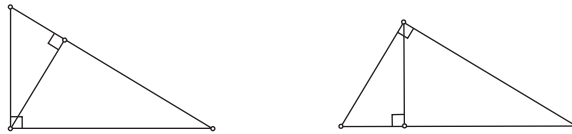
Isto, a možda i nije

ZVONIMIR ŠIKIĆ¹

U matematici i prirodnim znanostima ljudi dolaze do najznačajnijih spoznaja kada uoče da je nešto što se činilo različitim - zapravo isto.

Na primjer, netko je davno otkrio da je kvadrat nad hipotenuzom pravokutnog trokuta svojom površinom zapravo isti zbroju kvadrata nad katetama toga trokuta. I sam dokaz te činjenice, poznate pod imenom „Pitagorin poučak”, niz je uvida da su neke na prvi pogled različite stvari zapravo - iste.

Jedan od ljepših dokaza kreće od uvida da je Pitagorina tvrdnja zapravo isto što i sljedeća tvrdnja: bilo koja figura nad hipotenuzom pravokutnog trokuta svojom je površinom ista zbroju njoj sličnih figura nad katetama toga trokuta. Naravno, kvadrati su samo specijalni slučaj takvih sličnih figura. Ali, ako poučak vrijedi za jednu trojku sličnih figura, onda vrijedi za sve takve trojke, jer su trojke sličnih figura uvijek međusobno proporcionalne (a iz $a^2 + b^2 = c^2$ slijedi $ka^2 + kb^2 = kc^2$ za svaki faktor proporcionalnosti k). Dakle, najjednostavnije je krenuti od figure za koju je poučak najlakše dokazati, a to nije nužno kvadrat. Takva je figura sam pravokutni trokut. Ako ga gledamo kao figuru nad hipotenuzom toga trokuta, onda su njemu slične figure nad katetama upravo dva trokuta na koje visina nacrtana na hipotenuzu dijeli početni trokut.



Naravno, morate biti bar donekle matematički sofisticirani da biste lako pratili ovaj dokaz, ali kada jednom usvojite Pitagorin poučak, za vas je kvadrat nad hipotenuzom svojom površinom isti kao i zbroj kvadrata nad katetama.

Još je slaviji primjer Newtonova teorija gravitacije. Što je bilo Newtonovo otkriće? Najprije je shvatio da je 2. Keplerov zakon (dok Zemlja rotira oko Sunca, spojnica Zemlje sa Suncem briše jednake površine u jednakim vremenima) isto što i njegov „centralni zakon” (smjer sile koja djeluje na Zemlju je „centralni”, tj. od Sunca prema Zemlji).

¹Zvonimir Šikić, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu

Dokaz da je to zaista isto opet je jedan niz osnovnoškolskih geometrijskih uvida da su neke na prvi pogled različite površine zapravo iste (naravno, uz razumijevanje Newtonovog zakona inercije, te sile kao uzroka promjene brzine). Koristeći se mnogo složenijom geometrijom, Newton je shvatio da je 1. Keplerov zakon (putanja Zemlje je eliptička) isto što i njegov zakon „obrnutih kvadrata” (iznos sile koja djeluje na Zemlju obrnuto je proporcionalan kvadratu udaljenosti Zemlje od Sunca). Iz ta dva uvida, da je „1. Kepler” isto što i „centralnost” gravitacijske sile, a „2. Kepler” isto što i njeno ravnanje po „obrnutim kvadratima”, nastala je moderna matematička fizika.

Da biste razumjeli Newtonovu argumentaciju, morate znati dosta matematike i fizike, ali kada je jednom usvojite, za vas će 1. i 2. Kepler zauvijek biti poistovječeni s obrnutim kvadratima i centralnošću.

Nije uvijek lako vidjeti da su stvari koje su iste - zaista iste. Ali, kada to jednom vidimo, za nas više nikada nisu različite.

Ima i jednostavnijih primjera. Trgovine često nude popust na gotovinu. Ako je gotovinski popust 20%, to je isto što i 22.5% nadoplate za negotovinsko plaćanje. Naime, iz $0.8x = y$ (gdje je x istaknuta cijena, a y je 20% manja gotovinska cijena) slijedi $x = y : 0.8 = 1.225y$ (tj. istaknuta cijena x je 22.5% veća od gotovinske cijene y). Međutim, iako je gotovinski popust od 20% isto što i negotovinska nadoplata od 22.5%, nema trgovine koja se reklamira negotovinskom nadoplatom.

Pretpostavljam da kupci razumiju da su u igri dvije cijene, te da je manja u odnosu na veću popust, a veća u odnosu na manju nadoplata. Možda svi ne razumiju da je popust od 20% nadoplata od 22.5%, ali da je popust u jednom smjeru isto što i nadoplata u drugom, to je ipak svima jasno. Bez obzira na to, kupci daju prednost kupovini s popustom u odnosu na onu bez nadoplate, jer to psihološki nije isto. Popust ima pozitivan psihološki efekt, a nadoplata (čak i kada se radi o njenom odsustvu) negativan. Zato nema trgovine koja se reklamira negotovinskom nadoplatom.

(Ulogu sigurno imaju i izdavači kreditnih kartica koji ne žele da se korištenje kartice doživi kao nešto što se dodatno naplaćuje; pa bila to i istina. Bez njihovog utjecaja bar bi neki trgovci zaključili da odsustvo 22.5% nadoplate zvuči još bolje nego popust od 20%, da ne govorimo o odsustvu 100% nadoplate u usporedbi s 50% popustom; što je također isto.)

Stvari koje su objektivno iste psihološki se mogu bitno razlikovati. Zato čak i kada jednom vidimo da su iste, one za nas i dalje mogu ostati različite.

Sličan efekt imaju optičke iluzije. I nakon što se mjerenjem uvjerite da je ono što vidite zaobljenim zapravo ravno ili da ono što vidite duljim - to zapravo nije, i dalje ćete ono prvo vidjeti kao zaobljeno a ono drugo kao dulje.

Taj je fenomen veoma važan u socio-ekonomskim znanostima. One su, za razliku od matematike i prirodnih znanosti, impregnirane tim fenomenom.

Evo još nekih ekonomskih primjera.

1. PRIMJER

U trgovini želite kupiti natikače za 150 kn, no tada vam netko kaže da iste možete kupiti za 100 kn u drugoj trgovini, do koje vam treba 15 minuta. Ako ste poput većine kupaca, otići ćete u drugu trgovinu. Međutim, ako želite kupiti cipele za 1350 kn a netko vam kaže da u drugoj trgovini iste možete kupiti za 1300 kn, onda nećete otići u drugu trgovinu, ako ste poput većine kupaca.

Zašto je reakcija različita u ova dva slučaja? U oba se radi o istoj dobiti od 50 kn, za isti put od 15 minuta! Objektivno, 50 kn je 50 kn i 15 minuta je 15 minuta. Objektivno da, ali psihološki ne. Čini se da kupci u svojim glavama imaju posebne račune za svaku od ovih kupovina. Na jednom je računu popust od 30%, na drugom od samo 4%.

Ti su različiti računi uistinu robusni, što pokazuju sljedeći primjeri.

2. PRIMJER

Sada kupujete i natikače i cipele, koje stoje 150 odnosno 1350 kuna (dakle plaćate jedan stvarni račun za oba artikla). Hoćete li otići u drugu trgovinu ako su tamo natikače po 100 kn, a cipele po 1350 kn? Da, ako ste poput većine od 70% kupaca.

3. PRIMJER

Opet kupujete i natikače i cipele, koje stoje 150 odnosno 1350 kuna (dakle opet plaćate jedan stvarni račun za oba artikla). Hoćete li otići u drugu trgovinu ako su tamo natikače po 150 kn, a cipele po 1300 kn? Da, ako ste poput manjine od 30% kupaca.

Za 70% kupaca mentalni računi ostaju razdvojeni čak i kada su objedinjeni na stvarnom računu.

Različite mentalne račune ilustrira i sljedeći primjer.

4. PRIMJER

Kartu za koncert platili ste 100 kn. Neposredno pred ulazom u dvoranu ustanovili ste da vam je karta negdje ispala iz novčanika. Hoćete li kupiti novu kartu? Naravno, ovisi o tome koliko vas zanima taj koncert, koliko imate novaca itd. Kako bilo, po anketama bi 50% ljudi kupilo novu kartu.

5. PRIMJER

Zamislite sada da kartu još niste kupili, no kupit ćete je pred ulazom u dvoranu. Pred ulazom ustanovite da vam je 100 kn negdje ispalo iz novčanika. Hoćete li kupiti kartu za koncert? Po anketama bi 90% ljudi kupilo kartu.

U čemu je razlika? U oba se slučaja dogodilo isto: izgubili ste papirić vrijedan 100 kn. Objektivno je to tako, ali psihološki je jedan papirić bio na mentalnom računu za koncerte (a taj mentalni račun ne prihvaća cijenu od 200 kn za koncert), dok drugi nije.

6. PRIMJER

Možete prihvatiti ponudu A ili ponudu B.

A) sigurnih 300 kn. B) 80% vjerojatnih 450 kn.

Koju ćete ponudu prihvatiti? Ako ste poput 75% ljudi, prihvatit ćete ponudu A, dakle sigurnih 300 kn.

U slučaju B očekivana je dobit $0.8 \times 450 \text{ kn} = 360 \text{ kn}$, što je više od očekivane dobiti od 300 kn u slučaju A. Zašto većina odabire manju očekivanu dobit?

Psihološko objašnjenje je da ljudi imaju averziju prema riziku. Ljudi odabiru manju dobit jer je bez rizika. Rizik im je odbojan.

7. PRIMJER

Prilika da dospijete u drugu fazu igre su vam 25%. Kada ste jednom u drugoj fazi, možete izabrati

A) sigurnu dobit od 300 kn ili B) 80% vjerojatnu dobit od 450 kn.

Što ćete odabrati? Ako ste kao i svi drugi, za vas je taj problem isti kao i onaj iz 6. primjera. (Dakle, 75% ljudi odabrat će sigurni A, a 25% nesigurni B.)

Zašto svi u 6. i 7. primjeru odlučuju na isti način? Zato što je 7. primjeru, u odnosu na 6. primjer, samo dodana prva faza na koju nemate nikakvog utjecaja. Vaša odluka u 7. primjeru bitna je tek u drugoj fazi, a ona je identična sa 6. primjerom. Zvuči razumno, dok ne vidite sljedeći primjer.

8. PRIMJER

Možete prihvatiti ponudu A ili ponudu B.

A) 25% vjerojatnih 300 kn. B) 20% vjerojatnih 450 kn.

Koju ćete ponudu prihvatiti? Ako ste poput 60% ljudi, prihvatit ćete ponudu B, a ako ste poput preostalih 40%, prihvatit ćete ponudu A.

Obje su ponude približno jednako riskantne (25% vs. 20%), pa rizik ne igra razlikovnu ulogu (ako bi igrao, išao bi malo na stranu ponude B). Očekivana dobit ponude A je $0.25 \times 300 \text{ kn} = 75 \text{ kn}$, a ponude B je $0.20 \times 450 \text{ kn} = 90 \text{ kn}$. Nije čudo da većina odabire B.

Ono što jest čudno različita je reakcija na 8. primjer u odnosu na 7. primjer, budući da su oni zapravo isti. I u 7. primjeru obje su ponude približno jednako riskantne (25% vs. $25\% \times 80\% = 20\%$) i imaju iste očekivane vrijednosti kao one u 8. primjeru.

U čemu je onda psihološka razlika koja razdiobu 75% - 25% pretvara u razdiobu 40% - 60%? Pretpostavljam u odnosu prema neizbježnom. Što je neizbježno, to se jednostavno prihvaća i ne utječe na naše odluke. Dakle, 25% prve faze nema utjecaja na odluku jer je (prikazano kao) neizbježno.

Nije čudo da je glavni dio političko ekonomskih argumentacija uvjeravanje da su neke stvari neizbježne.

Vidjeli smo kako je averzija prema riziku vezana uz dobitke. Sljedeći primjer pokazuje da nije na isti način vezana za gubitke.

9. PRIMJER

Možete prihvatiti ponudu A ili ponudu B.

A) sigurni gubitak od 50 kn. B) 25% vjerojatni gubitak od 200 kn.

Koju ćete ponudu prihvatiti? Ako ste poput 80% ljudi, prihvatit ćete ponudu B, dakle riskantnu varijantu.

Očekivani gubitak isti je u oba slučaja, ali u A je gubitak siguran, dok je u B vjerojatan.

Iako ljudi nisu skloni riziku kada dobivaju, čini se da su mu skloni kada gube (to objašnjava mnoge kockarske sudbine).

Evo potvrde i u sljedećem primjeru.

10. PRIMJER

Možete prihvatiti ponudu A ili ponudu B.

A) plaćanje 50 kn osiguranja protiv gubitka od 200 kn.

B) 25% vjerojatni gubitak od 200 kn.

Koju ćete ponudu prihvatiti? Sada samo 40% ljudi prihvaća riskantnu ponudu B jer se više ne radi o gubitku 50 kn nego o plaćanju osiguranja.

Odnos prema riziku se mijenja kada se gubitak nazove osiguranjem. Naravno, kao u 9. primjeru, i sada pod A sigurno ostajete bez 50 kn, dok pod B s vjerojatnošću od 25% ostajete bez 200 kn. Objektivno nema razlike, ali psihološki ima (dobra vijest za osiguravatelje, no oni je odavno znaju).

Ako u inače potpuno istoj situaciji nešto što je bilo prikazano kao gubitak prikažemo kao trošak, ona će postati prihvatljivijom.

To ilustriraju i posljednja dva primjera.

11. PRIMJER

Prihvaćate li okladu s 10% šanse za dobitak od 950 kn i 90% šanse za gubitak od 50 kn?

12. PRIMJER

Hoćete li platiti 50 kn za lutriju u kojoj imate 10% šanse za dobitak od 1000 kn i 90% šanse da nećete dobiti ništa?

Radi se o potpuno istim okladama, samo je u drugoj gubitak oklade prikazan kao cijena lutrije. Naravno, ljudi ne reagiraju isto na gubitak i trošak; 35% onih koji ne prihvaćaju gubitak iz 11. primjera prihvaćaju trošak iz 12. primjera.

I da zaključimo. Otkriti da je nešto što se na prvi pogled čini različitim zapravo isto najčešće je važan uvid (u matematici i prirodnim znanostima), ali katkada je jednako važno razumjeti da neke razlike možda ipak „prežive” taj uvid (u socio-ekonomskim znanostima).