Tangenta krivulje drugog reda

Zvonimir Šikić[1], Zagreb

Ako je analitički zadana krivulja 2. reda i jedna točka na krivulji, kako analitički odrediti tangentu na tu krivulju kroz tu točku? Postupak opisujemo rješavajući konkretan zadatak.

Zadatak 1:
Zadana je hiperbola $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ i točka $D(1, 2)$ koja leži na hiperboli.
Odredi jednadžbu tangente na zadanu hiperbolu s diralištem u $D(1,2)$.

Rješenje:

a) Odredimo jednadžbu zadane hiperbole u sustavu Δx, Δy čije je ishodište u točki $D(1, 2)$. Dakle, $x = 1 + \Delta x$ i $y = 2 + \Delta y$, pa imamo:

$$2(1 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x)^2 + 2 = 0,$$

$$2 + 4\Delta x + 2\Delta x^2 - 4 - 4\Delta y - \Delta y^2 + 2 = 0$$

$$4\Delta x - 4\Delta y + 2\Delta x^2 - \Delta y^2 = 0$$

Linearni dio te jednadžbe je jednadžba tražene tangente:

$$4\Delta x - 4\Delta y = 0,$$

$$4(x - 1) - 4(y - 2) = 0,$$

$$4x - 4y + 4 = 0$$

$$y = x + 1.$$

Dakle, tražena je tangenta $y = x + 1$.

b) Jednadžba tangente na krivulju $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ u njezinoj točki (x_0, y_0) je:

$$Ax_0x + B(x_0y + xy_0) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0.$$

[1]Zvonimir Šikić, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu

U našem slučaju krivulja je $2x^2 - y^2 + 2 = 0$ i $(x_0, y_0) = (1, 2)$, pa imamo:

$$2x - 2y + 2 = 0,$$

$$y = x + 1.$$

Dakle, tražena je tangenta $y = x + 1$.

c) Tražena tangenta je pravac koji se iz jednadžbe hiperbole u sređenom obliku:

$$2x^2 - y^2 + 2 = 0$$

dobiva tako da se na njezinu desnu stranu dopišu isti kvadratni članovi, ali uz zamjenu x sa $x - x_0$ i y sa $y - y_0$, gdje je (x_0, y_0) zadana točka. Zbog tog oblika desne strane kvadratni će se članovi pokratiti, pa je dobivena jednadžba stvarno linearna. To je jednadžba tražene tangente s diralištem $D(x_0, y_0)$. U našem slučaju:

$$2x^2 - y^2 + 2 = 2(x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

$$2x^2 - y^2 + 2 = 2x^2 - 4x + 2 - y^2 + 4y - 4$$

$$4x - 4y + 4 = 0$$

$$y = x + 1.$$

Dakle, tražena je tangenta $y = x + 1$.

Naravno, trebamo dokazati da su korišteni postupci rješavanja korektni.

Razmotrimo najprije postupak a). Ako algebarska krivulja $P(x, y) = 0$ prolazi ishodištem, ona je oblika

$$ax + by + (...) = 0,$$

gdje su u (...) sabrani članovi stupnja većeg ili jednakog 2. Tangenta u ishodištu najbolja je linearna aproksimacija funkcije $P(x, y) = 0$ u nekoj okolini ishodišta. To će očito biti pravac

$$ax + by = 0,$$

jer su u dovoljno maloj okolini ishodišta članovi stupnja većeg ili jednakog 2 zanemarivi prema linearnim članovima.

Ako nas zanima tangenta na $P(x, y) = 0$ u diralištu $D(x_0, y_0)$ koje nije ishodište, dovoljno je iz sustava x, y prijeći u sustav $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, čije je ishodište pomaknuto u $D(x_0, y_0)$. Jednadžba krivulje $P(x, y) = 0$ u tom sustavu postaje:

$$P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = e\Delta x + f\Delta y + (...) = 0.$$

Tražena tangenta je:

$$e\Delta x + f\Delta y = 0, \quad e(x - x_0) + f(y - y_0) = 0.$$

To objašnjava postupak a).

Razmotrimo sada postupke b) i c) koji nisu primjenjivi na sve algebarske krivulje, nego samo na one 2. rada. Dakle, kako odrediti tangentu na krivulju drugoga reda zadanu sa:

(1) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$,

u njezinoj točki $D(x_0, y_0)$?

Ako znamo diferencijalni račun - lako! Jednadžba tangente na krivulju $f(x, y) = 0$ u njezinoj točki (x_0, y_0) je:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0)\,(y - y_0) = 0$$

Dakle, tražena tangenta je :

$$(2Ax_0 + 2By_0 + D)\,(x - x_0) + (2Bx_0 + 2Cy_0 + 2E)\,(y - y_0) = 0,$$

Ili, nakon sređivanja:

(2) $Ax_0x + B(x_0y + xy_0) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0$.

To objašnjava postupak b).

Međutim, u 3. razredu srednje škole, u kojem obrađujemo krivulje drugog reda, još se ne koristimo diferencijalnim računom. Kako doći do ovog rezultata bez diferencijalnog računa? Vidjet ćemo nakon što obradimo postupak c).

Promotrimo krivulju kojom smo se koristili u postupku c):

(3) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)\,(y - y_0) + C(y - y_0)^2$.

Zašto baš tu krivulju? Zato što (x_0, y_0) zadovoljava (3), tj. krivulja (3) prolazi točkom $D(x_0, y_0)$. Osim toga, kvadratni članovi desne strane od (3) poništavaju kvadratne članove s lijeve strane pa je (3) stvarno jednadžba pravca. Ukratko, (3) je pravac koji prolazi točkom $D(x_0, y_0)$.

Dokazat ćemo da taj pravac ne prolazi ni jednom drugom točkom krivulje 2. reda (1), što znači da je on tražena tangenta.

Naš pravac kroz (x_0, y_0). može se parametrizirati s:

(4) $x - x_0 = at \qquad y - y_0 = bt$,

gdje je (a, b) vektor smjera tog pravca. Uvrstimo li (4) u (3), dobit ćemo jednadžbu:

(5) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (Aa^2 + 2Bab + Cb^2)t^2$.

Svaka točka (x, y) na našem pravcu ima svoj t, i obrnuto - svaki t ima svoju točku (x, y). Za $t = 0$ radi se o točki (x_0, y_0). To je i jedina točka u kojoj naš pravac siječe krivulju (1). Naime, moguća su dva slučaja:

I. $Aa^2 + 2Bab + Cb^2 = 0$. U tom slučaju jednadžba pravca (5) identična je jednadžbi krivulje 2. reda (1), tj. radi se o degeneriranoj krivulji 2. reda (koja je degenerirala u dva pravca koji mogu biti i identični).

II. $Aa^2 + 2Bab + Cb^2 \neq 0$. U tom slučaju, samo za $t = 0$ imamo točku koja zadovoljava (1), tj. koja leži na toj krivulji 2. reda. To smo i trebali dokazati.

To objašnjava postupak c).

No, lako je vidjeti da su (3) i (2) ekvivalentne jednadžbe (ako (x_0, y_0) leži na krivulji), što objašnjava postupak b) bez uporabe diferencijalnog računa:

(3) $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2$.

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F =$

$= Ax^2 - 2Axx_0 + Ax_0^2 + 2Bxy + 2Bx_0y_0 - 2Bxy_0 - 2Bx_0y + Cy^2 - 2Cyy_0 + Cy_0^2.$

Skratimo li identične izraze lijevo i desno, dolazimo do:

$$2Dx + 2Ey + F = -2Axx_0 + Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 - 2Bxy_0 - 2Bx_0y - 2Cyy_0 + Cy_0^2.$$

Nadopunimo obje strane s $2Dx_0 + 2Ey_0 + F$:

$2Dx_0 + 2Ey_0 + F + 2Dx + 2Ey + F =$

$= 2Dx_0 + 2Ey_0 + F - 2Axx_0 + Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 - 2Bxy_0 - 2Bx_0y - 2Cyy_0 + Cy_0^2.$

Tako smo desno dobili $2Dx_0 + 2Ey_0 + F + Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2$, što je 0, jer (x_0, y_0) leži na (1). Iskoristimo li tu činjenicu,imamo:

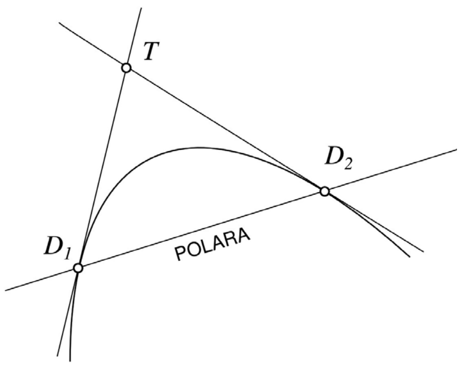
$$2D(x + x_0) + 2E(y + y_0) + 2\mathrm{F} = -2Ax_0x - 2B(x_0y + xy_0) - 2Cy_0y.$$

To je konačno:

(2) $Ax_0x + B(x_0y + xy_0) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0.$

Zanimljivo je ispitati što predstavlja jednadžba (2) kada točka $T(x_0, y_0)$ ne leži na krivulji (1). Dokazat ćemo da (2) tada predstavlja jednadžbu polare koja pripada točki $T(x_0, y_0)$ u odnosu na krivulju 2. reda (1).

Polara je definirana kao spojnica točaka D_1D_2 u kojima tangente, nacrtane točkom T na krivulju 2. reda, diraju tu krivulju; vidi sliku. (Naravno, ako T leži na krivulji, onda su obje tangente i polara isti pravac.)



Dokazali smo kako izgledaju jednadžbe tangenti na krivulju (1) u dirališnim točkama $D_1(x_1, y_1)$ i $D_2(x_2, y_2)$:

(6) $Ax_1x + B(x_1y + xy_1) + Cy_1y + D(x + x_1) + E(y + y_1) + F = 0.$

(7) $Ax_2x + B(x_2y + xy_2) + Cy_2y + D(x + x_2) + E(y + y_2) + F = 0.$

Budući da se točka $T(x_0, y_0)$ nalazi na oba pravca (6) i (7), imamo:

(8) $Ax_1x_0 + B(x_1y_0 + x_0y_1) + Cy_1y_0 + D(x_0 + x_1) + E(y_0 + y_1) + F = 0.$

(9) $Ax_2x_0 + B(x_2y_0 + x_0y_2) + Cy_2y_0 + D(x_0 + x_2) + \mathrm{E}(y_0 + y_2) + F = 0.$

No (8) i (9) također nam kažu da pravac (2) prolazi kroz točke $D_1(x_1, y_1)$ i $D_2(x_2, y_2)$, tj. da je (2) jednadžba polare. To smo i trebali dokazati.

Jednadžba polare omogućava nam da jednostavno riješimo i zadatak određivanja tangente na krivulju 2. reda, koja prolazi točkom izvan te krivulje. Evo primjera.

Zadatak 2:

Zadana je hiperbola $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ i točka $T(1, 1)$ koja ne pripada hiperboli. Odredimo jednadžbu tangente na zadanu hiperbolu koja prolazi točkom $T(1, 1)$.

Rješenje:

Jednadžba polare točke $T(1, 1)$ u odnosu na hiperbolu $2x^2 - y^2 + 2 = 0$ dana je s:

$$2xx_0 - yy_0 + 2 = 0.$$

U našem slučaju to je:

$$2x - y + 2 = 0.$$

Tražena polara je $y = 2x + 2$. Sjecišta te polare i hiperbole $2x^2 - y^2 + 2 = 0$ dirališta su traženih tangenti. To su rješenja sustava:

$$2x^2 - y^2 + 2 = 0$$

$$2x - y + 2 = 0.$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu nalazimo $x_{1,2}$, a uvrštavanjem tih vrijednosti u drugu jednadžbu nalazimo $y_{1,2}$. Konačno nalazimo:

$$D_{1,2}\left(\frac{-1}{2 \pm \sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3} \pm 2}{\sqrt{3} \pm 2}\right)$$

Tražene tangente su (vidi sliku) TD_1 i TD_2, čije su jednadžbe:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} x + \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}.$$