

IZ NASTAVNE PRAKSE

Preslikavanja ravnine na geoploči

TANJA SOUCIE¹, ALEKSANDRA ČIŽMEŠIJA² I VALENTINA VINCEK³

Geoploča, o kojoj više možete pročitati u Poučku broj 50 [1] i Poučku broj 51 [2], može se koristiti pri istraživanju i proučavanju različitih preslikavanja ravnine. Već u petome razredu učenici se susreću s osnom simetrijom. Tada trebaju prepoznati osnosimetrične likove na crtežu i u vlastitome okruženju, kao i konstruirati simetralu dužine te primjenjivati njena svojstva [3].

U osmome razredu osnovne škole nadograđuje se znanje osne simetrije te se uvode translacija, centralna simetrija i rotacija. Uz već stečeno znanje o osnoj simetriji, u osmome razredu učenici trebaju konstruirati osnosimetričnu te centralnosimetričnu sliku točke, dužine, pravca, trokuta i kružnice, konstruirati simetralu kuta, prepoznati centralno simetrični lik te odrediti centar simetrije centralnosimetričnog lika. Učenici trebaju translirati točku, dužinu, pravac, trokut i kružnicu te prepoznati lik koji je nastao translacijom drugoga. Također trebaju rotirati zadani lik ako je zadano središte rotacije i kut rotacije [3].

Prikazane učeničke aktivnosti učenicima će pomoći razviti navedene vještine te istražiti neka od svojstava preslikavanja ravnine.

Oсна simetrija 1

Izvedeci ovu aktivnost, učenici će:

- preslikati lik osnom simetrijom s obzirom na zadanu os
- odrediti os simetrije zadanoga lika.

Potreban materijal za svakog učenika:

- geoploča dimenzija 11×11
- više gumica različitih boja i duljina
- nastavni listić sa zadacima.

¹Tanja Soucie, OŠ Gustava Krkleca, Zagreb

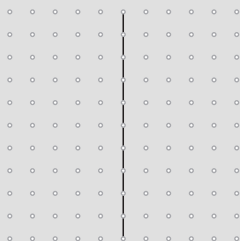
²Aleksandra Čižmešija, Matematički odsjek PMF-a Sveučilišta u Zagrebu

³Valentina Vincek, Zagreb

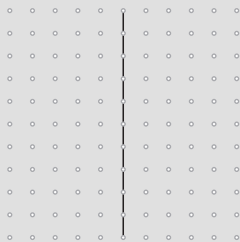
OSNA SIMETRIJA 1

U svakom od zadataka od 1. do 4. istaknuti pravac na slici predstavlja os simetrije. Gubicom ga prikaži na geoploči, a potom na geoploči prikaži traženi trokut te njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na ovaj pravac.

1. Na geoploči po volji prikaži trokut koji se čitav nalazi s desne strane osi simetrije, te njegovu osnosimetričnu sliku.



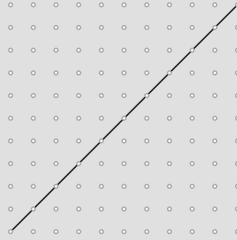
2. Na geoploči po volji prikaži trokut čiji se jedan vrh nalazi na zadanom pravcu, a preostala dva vrha s lijeve strane tog pravca. Zatim prikaži i osnosimetričnu sliku tog trokuta.



3. Na geoploči po volji prikaži trokut čiji se jedan vrh nalazi iznad, a preostala dva ispod zadanog pravca. Zatim prikaži i osnosimetričnu sliku tog trokuta.



4. Na geoploči po volji prikaži trokut i njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na zadani pravac.



5. Što se, pri preslikavanju osnom simetrijom, događa s točkom koja ne pripada osi simetrije?

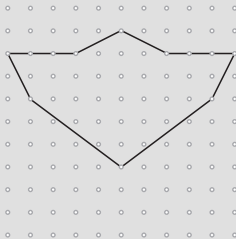
6. Što se, pri preslikavanju osnom simetrijom, događa s točkom koja pripada osi simetrije?

7. Istaknuti je pravac os simetrije. Koristeći geoploču dovrši sliku osnosimetričnog lika s obzirom na tu os simetrije.

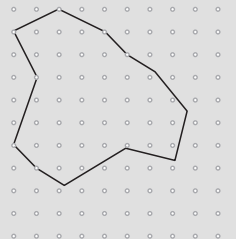


8. Prikazani su likovi osnosimetrični. Prikaži svaki od njih na geoploči te istakni njihovu os simetrije.

a)



b)



Oсна симетрија 2

Izvodeći ovu aktivnost, učenici će:

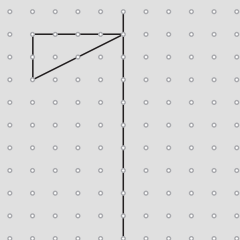
- istražiti svojstva osne simetrije.

Potreban materijal za svakog učenika:

- geoploča dimenzija 11×11
- više gumica različitih boja i duljina
- nastavni listić sa zadacima.

OSNA SIMETRIJA 2

1. Na geoploči prikaži zadani trokut i njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na zadanu os simetrije.



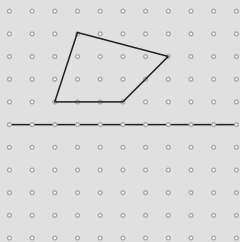
- a) Izmjeri duljine stranica zadanog trokuta te duljine stranica njegove osnosimetrične slike. Što primjećuješ?

- b) Koje je vrste zadani trokut s obzirom na veličinu kutova?

- c) Koje je vrste novonastali trokut s obzirom na veličinu kutova?

- d) Izmjeri kutove zadanog trokuta te kutove njemu osnosimetričnog trokuta. Što primjećuješ?

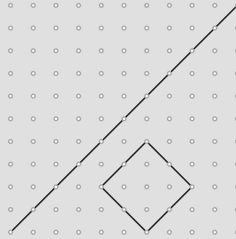
2. Na geoploči prikaži osnosimetričnu sliku zadanog četverokuta s obzirom na zadanu os simetrije.



a) Izmjeri duljine stranica zadanog četverokuta te duljine stranica njegove osnosimetrične slike. Što primjećuješ?

b) Izmjeri veličinu kutova zadanog četverokuta te veličine kutova njegove osnosimetrične slike. Što primjećuješ?

3. Na geoploči prikaži zadani kvadrat i njegovu osnosimetričnu sliku s obzirom na zadanu os simetrije.



Na zadanom kvadratu istakni međusobno usporedne stranice. Jesu li njihove osnosimetrične slike usporedne?

4. Promotri ponovo zaključke prethodnih zadataka te navedi što sve ostaje očuvano pri preslikavanju osnom simetrijom!

Oсна симетрија 3

Pri sljedećoj aktivnosti geoploču ćemo poistovjetiti s koordinatnim sustavom. Aktivnost je namijenjena učenicima osmoga razreda.

Izvođeci ovu aktivnost, učenici će:

- preslikati trokut s obzirom na os simetrije.

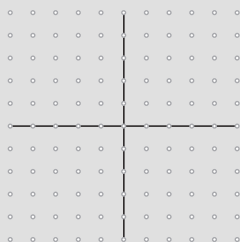
Potreban materijal za svakog učenika:

- geoploča dimenzija 11×11 na kojoj su dvjema gumicama označene koordinatne osi
- više gumica različitih boja i duljina
- nastavni listić za svakog učenika.

OSNA SIMETRIJA 3

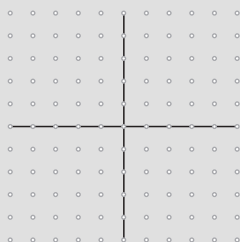
Na geoploči su gubicama označene osi koordinatnog sustava. Duljina jediničnih dužina jednaka je udaljenosti dviju susjednih horizontalnih, odnosno vertikalnih šiljaka geoploče.

1. Na geoploči prikaži trokut tako da se cijeli nalazi u drugom kvadrantu. Označi njegove vrhove i ispiši njihove koordinate. Preslikaj taj trokut osnom simetrijom s obzirom na x -os i zapiši koordinate vrhova trokuta osnosimetričnog polaznome. Što primjećuješ?



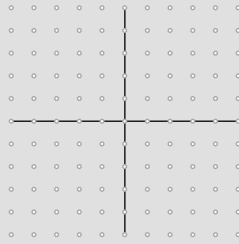
Koje su koordinate osnosimetrične točke točki $T(x, y)$ s obzirom na x -os? _____

2. Na geoploči prikaži trokut tako da se cijeli nalazi u trećem kvadrantu. Označi njegove vrhove i ispiši njihove koordinate. Preslikaj taj trokut osnom simetrijom s obzirom na y -os i zapiši koordinate vrhova trokuta osnosimetričnog polaznome. Što primjećuješ?



Koje su koordinate osnosimetrične točke točki $T(x, y)$ s obzirom na y -os? _____

3. Na geoploči gubicama prikaži trokut tako da se cijeli nalazi u prvom kvadrantu. Označi njegove vrhove i ispiši njihove koordinate. Preslikaj taj trokut osnom simetrijom s obzirom na pravac s jednažbom $y = 1$ i s obzirom na pravac s jednažbom $x = 2$. Ispiši koordinate vrhova trokuta osnosimetričnih polaznome. Što primjećuješ?

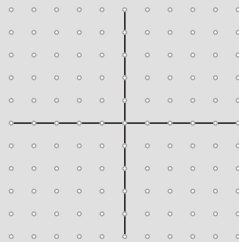


Koje su koordinate točke osnosimetrične točki $T(x, y)$ s obzirom na pravac $y = 1$?

Koje su koordinate točke osnosimetrične točki $T(x, y)$ s obzirom na pravac $x = 2$?

4. Na geoploči prikaži trokut tako da se cijeli nalazi u četvrtom kvadrantu. Označi njegove vrhove i ispiši njihove koordinate. Preslikaj taj trokut:
- s obzirom na pravac s jednažbom $y = x$,
 - s obzirom na pravac s jednažbom $y = -x$.

Zabilježi koordinate vrhova dobivenih trokuta osnosimetričnih polaznome. Što primjećuješ?



Koje su koordinate točke osnosimetrične točki $T(x, y)$ s obzirom na pravac s jednažbom:

a) $y = x$ _____

b) $y = -x$ _____

Translacija 1

Izvedeći ovu aktivnost, učenici će:

- translatirati trokut za zadani vektor u smjeru x -osi, a zatim u smjeru y -osi.

Aktivnost je namijenjena učenicima 8. razreda osnovne škole, a izvodi se učeničkim radom u parovima.

Za njeno izvođenje za svaku je skupinu potrebno sljedeće:

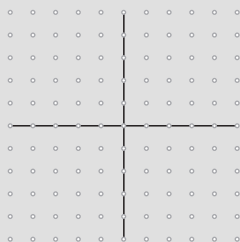
- geoploča dimenzije 11×11 na kojoj su gubicama označene koordinatne osi
- više gumica različitih boja i duljina
- nastavni listić.

Nakon što su markerom označili vrijednosti na odgovarajućim koordinatnim osima, gubicama kreiraju zadane trokute. Svaki par kreira trokut u svom kvadrantu i translata ga za dane vektore. Kada parovi riješe postavljene zadatke, uspoređuju međusobno dobivena rješenja.

TRANSLACIJA 1

ZADATAK 1

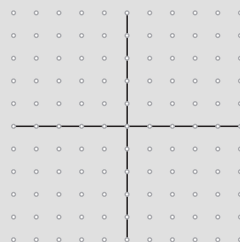
Na geoploči gubicama prikaži trokut s vrhovima $(1, 2)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$. Trokut translataj za -3 jedinice u smjeru x -osi i za -4 jedinice u smjeru y -osi. Nacrtaj odgovarajuću sliku te odredi koordinate vrhova translativanog trokuta.



Ako točku $T(x, y)$ translatajš za -3 jedinice u smjeru x -osi i za -4 jedinice u smjeru y -osi, u koju se točku preslika? _____

ZADATAK 2

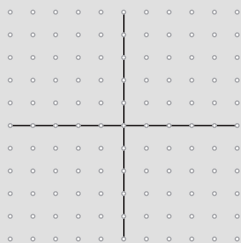
Na geoploči gubicama prikaži trokut s vrhovima $(-2, 2)$, $(-3, 1)$, $(-1, 0)$. Trokut translataj za 4 jedinice u smjeru x -osi i za -3 jedinice u smjeru y -osi. Nacrtaj odgovarajuću sliku te odredi koordinate vrhova translativanog trokuta.



Ako točku $T(x, y)$ translatajš za 4 jedinice u smjeru x -osi i za -3 jedinice u smjeru y -osi, u koju se točku preslika? _____

ZADATAK 3

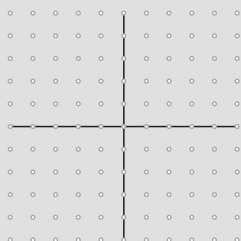
Na geoploči gubicama prikaži trokut s vrhovima $(-2, 0)$, $(-3, -1)$, $(0, -1)$. Trokut transliraj za 3 jedinice u smjeru x -osi i za 2 jedinice u smjeru y -osi. Nacrtaj odgovarajuću sliku te odredi koordinate vrhova transliranog trokuta.



Ako točku $T(x, y)$ transliraš za 3 jedinice u smjeru x -osi i za 2 jedinice u smjeru y -osi, u koju se točku preslika? _____

ZADATAK 4

Na geoploči gubicama prikaži trokut s vrhovima $(4, -3)$, $(3, -1)$, $(1, -2)$. Trokut transliraj za -5 jedinica u smjeru x -osi i za 3 jedinice u smjeru y -osi. Nacrtaj odgovarajuću sliku te odredi koordinate vrhova transliranog trokuta.



Ako točku $T(x, y)$ transliraš za -5 jedinice u smjeru x -osi i za 3 jedinice u smjeru y -osi, u koju se točku preslika? _____

Translacija 2

Izvedeci ovu aktivnost, učenici će:

- translirati mnogokute za zadani vektor
- odrediti vektor translacije.

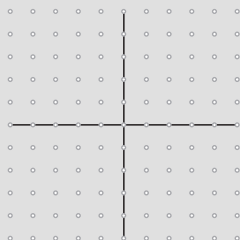
Aktivnost je namijenjena učenicima 8. razreda osnovne škole.

Za njeno izvođenje potrebno je sljedeće:

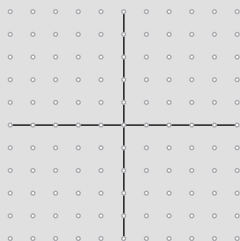
- geoploča dimenzija 11×11 na kojoj su gubicama označene koordinatne osi
- više gumica različitih boja i duljina
- nastavni listić.

TRANSLACIJA 2

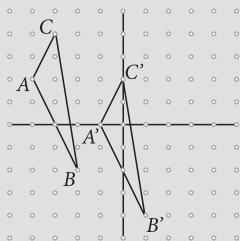
1. Na geoploči gubicama prikaži vektor koji počinje u točki $A(-4, 4)$, a završava u točki $B(-2, 5)$ te trokut s vrhovima $(0, 2)$, $(3, -1)$, $(2, 3)$. Translatiraj ovaj trokut za dani vektor te odredi koordinate novonastalog trokuta. Što primjećuješ?



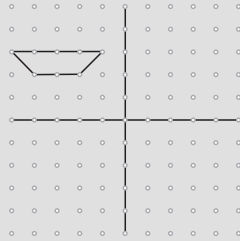
2. Na geoploči gubicama prikaži vektor duljine $\sqrt{5}$ čija je krajnja točka zadana koordinatama $(-1, 3)$ te trokut s vrhovima $(-2, -3)$, $(1, -2)$, $(3, 3)$. Translatiraj trokut za ovaj vektor. Je li rješenje jednoznačno? Objasni.



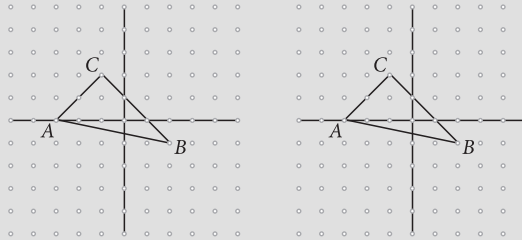
3. Odredi vektor kojim je trokut ABC translatican u trokut $A'B'C'$. Je li rješenje jednoznačno? Objasni.



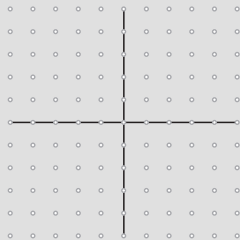
4. Odredi vektor za koji će se trapez translirati iz drugog u četvrti kvadrant. Je li rješenje jednoznačno? Objasni.



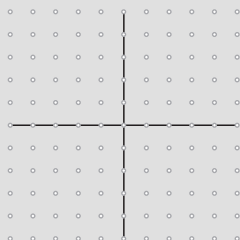
5. Na geoploči označi trokut ABC kao na slici. Translatiraj ga za vektor koji počinje u točki $(2, -5)$, a završava u točki $(3, -4)$, zatim njegovu za vektor koji počinje u točki $(5, -3)$, a završava u točki $(3, -2)$. Nakon toga trokut ABC transliraj za vektor koji počinje u točki $(5, -3)$, a završava u točki $(3, -2)$, a njegovu sliku za vektor koji počinje u točki $(2, -5)$, a završava u točki $(3, -4)$. Hoće li rezultat translacija biti jednak? Objasni.



6. Translatiraš li trokut za neki zadani vektor, kakav ćeš trokut u odnosu na polazni dobiti translacijom?



Translatiraš li kvadrat za neki zadani vektor, kakav ćeš kvadrat u odnosu na polazni dobiti translacijom?



Čuva li translacija udaljenost, paralelnost i veličinu kuta? Objasni svoj odgovor.

Centralna simetrija 1

Pri sljedećoj aktivnosti geoploču ćemo poistovjetiti s koordinatnim sustavom čije su jedinične dužine duljina jednakih udaljenosti dvaju susjednih horizontalnih, odnosno vertikalnih šiljaka geoploče. Aktivnost je namijenjena učenicima 8. razreda.

Izvođeci ovu aktivnost, učenici će:

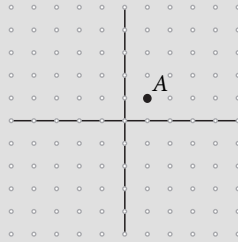
- centralnosimetrično preslikati trokut

Potreban materijal za svakog učenika:

- geoploča dimenzija 11×11 na kojoj su gubicama označene koordinatne osi
- više gumica različitih boja i duljina
- nastavni listić za svakog učenika
- mali kružni vijenac izrezan iz papira, koji se može staviti na čavlić tako da predstavlja centar simetrije.

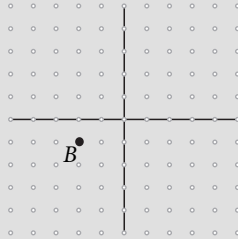
CENTRALNA SIMETRIJA 1

1. Neka je točka A s koordinatama $(1, 1)$ središte centralne simetrije. Na geoploči prikaži trokut tako da se cijeli nalazi u prvom kvadrantu i zapiši koordinate njegovih vrhova. Centralnosimetrično preslikaj trokut s obzirom na točku A i zapiši koordinate vrhova novonastalog trokuta.



Izmjeri duljine stranica originalnog trokuta te njegove centralnosimetrične slike. Što primjećuješ?

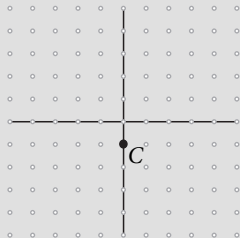
2. Neka je točka B s koordinatama $(-2, -1)$ središte centralne simetrije. Na geoploči prikaži pravokutni trokut tako da se cijeli nalazi u drugom kvadrantu i zapiši koordinate njegovih vrhova. Centralnosimetrično preslikaj trokut s obzirom na točku B i zapiši koordinate vrhova novonastalog trokuta.



Koje je vrste polazni trokut, a koje trokut dobiven centralnom simetrijom, s obzirom na veličinu kutova?

Izmjeri veličine kutova originalnog trokuta i njegove centralnosimetrične slike. Što primjećuješ?

3. Neka je točka C s koordinatama $(0, -1)$ središte centralne simetrije. Na geoploči prikaži dvije paralelne dužine. Preslikaj obje dužine centralnom simetrijom s obzirom na točku C .

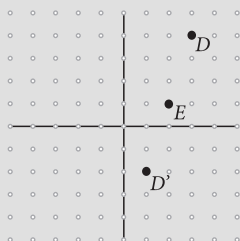


Jesu li dužine dobivene centralnom simetrijom i dalje usporedne?

Jesu li dužine dobivene centralnom simetrijom usporedne s originalnim dužinama?

4. Koja svojstva čuva centralna simetrija?

5. Promotrimo točku D i njenu centralnosimetričnu sliku D' s obzirom na točku E , centar simetrije.



Što je točka E dužini $\overline{DD'}$? _____

Centralna simetrija 2

Aktivnost je namijenjena učenicima 8. razreda.

Izvedeci ovu aktivnost, učenici će:

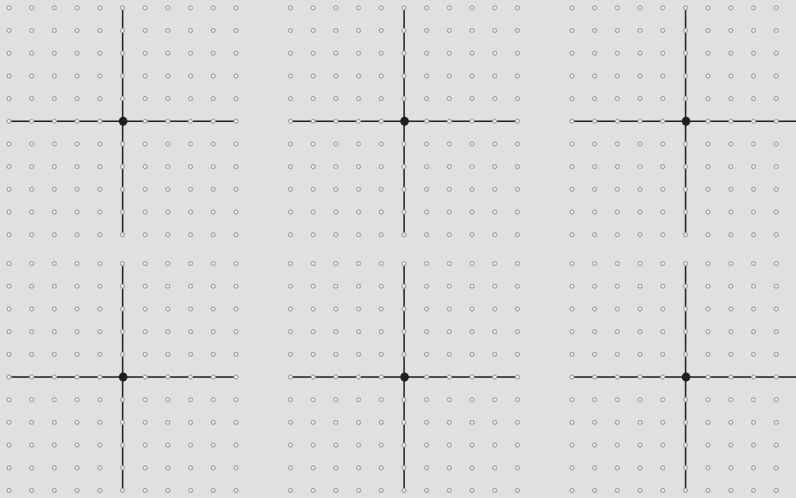
- primjenjivati svojstva centralnosimetričnog lika

Potreban materijal za svakog učenika:

- geoploča dimenzija 11×11 na kojoj su gumicama označene koordinatne osi
- više gumica različitih boja i duljina
- nastavni listić sa zadacima.

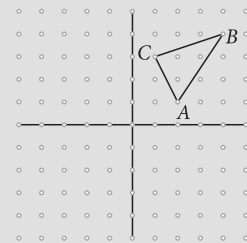
CENTRALNA SIMETRIJA 2

1. Na geoploči prikaži najmanje tri centralnosimetrična lika s ishodištem kao centrom simetrije.



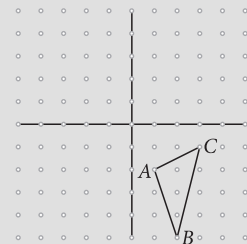
2. Može li centralnosimetričan lik imati neparan broj vrhova? Objasni svoj odgovor.

3. Neka je ishodište koordinatnog sustava centar simetrije. Centralnom simetrijom preslikaj trokut ABC .



Da se jedan od vrhova zadanog trokuta nalazio u ishodištu koordinatnog sustava, koje bi koordinate taj vrh poprimio nakon preslikavanja ovom centralnom simetrijom? _____

4. Neka je ishodište koordinatnog sustava centar simetrije. Centralnom simetrijom preslikaj trokut ABC .



Ako centralnom simetrijom sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava preslikaš točku $T(x, y)$, koje su koordinate njene slike? _____

Rotacija

Izvedeci ovu aktivnost, učenici će:

- rotirati trokut oko ishodišta za kut od 180° , 90° , -90° .

Aktivnost je namijenjena učenicima 8. razreda osnovne škole.

Za izvođenje ove aktivnosti potreban je sljedeći materijal:

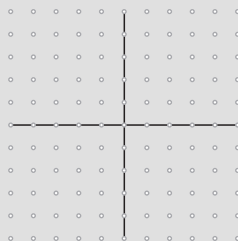
- geoploča dimenzija 11×11 na kojoj su gubicama određene koordinatne osi
- više gumatica različitih boja i duljina
- nastavni listić za svakog učenika.

Učenici mogu markerom označiti vrijednosti na odgovarajućim koordinatnim osima. Svaki par treba rotirati trokut oko ishodišta koordinatnog sustava. Učenici trebaju svoja rješenja zabilježiti na dobiveni nastavni listić i odgovoriti na postavljena pitanja. Kada parovi riješe postavljena zadatka, međusobno uspoređuju dobivena rješenja.

ROTACIJA

ZADATAK 1

Na geoploči gubicama prikaži trokut s vrhovima $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. Rotiraj trokut za 180° oko ishodišta koordinatnog sustava. Odredi koordinate vrhova novonastalog trokuta.

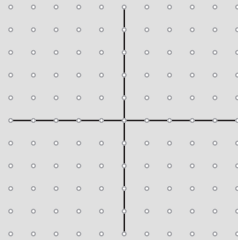


- Koje su koordinate točke u koju se rotacijom oko ishodišta za 180° preslika točka $T(x, y)$?

- Možeš li rotaciju oko ishodišta za kut od 180° poistovjetiti s nekim drugim preslikavanjem ravnine?

ZADATAK 2

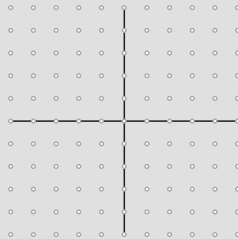
Na geoploči gubicama prikaži trokut s vrhovima (1, 3), (2, 1), (3, 1). Rotiraj trokut za 90° oko ishodišta koordinatnog sustava. Odredi koordinate vrhova novonastalog trokuta.



- Koje su koordinate točke u koju se rotacijom oko ishodišta za 90° preslika točka $T(x, y)$?
-

ZADATAK 3

Na geoploči gubicama prikaži trokut s vrhovima (1, 3), (2, 1), (3, 1). Rotiraj trokut za -90° oko ishodišta koordinatnog sustava. Odredi koordinate vrhova novonastalog trokuta.



- Koje su koordinate točke u koju se rotacijom oko ishodišta za -90° preslika točka $T(x, y)$?
-

Literatura

1. A. Čižmešija, T. Soucie, R. Svedrec, *Primjena geoploče u nastavi matematike*, Poučak 50, Zagreb, lipanj 2012.
2. T. Soucie, A. Čižmešija, I. Kokić, *Kružna geoploča*, Poučak 51, Zagreb, listopad 2012.
3. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, (2006.), *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, Zagreb
4. Vincek, V., (2012.) Diplomski rad: *Geoploča*
5. J. Rahn. (2011). *Transformations: translations, reflection over the x -axis, reflection over the y -axis, rotation about the origin 180° , rotation in the clockwise direction, rotation in the counter - clockwise direction, reflection over a line parallel to the x -axis, reflection over a line parallel to the y -axis, double reflection over lines parallel to axes, double reflection over non - parallel lines*. http://www.jamesrahn.com/Geometry/pages/discovering_transformations.htm (12. 2. 2011.)