Vizualizacija oblih figura u trokutastoj izometrijskoj mreži točaka

Nikol Radović[1], Renata Svedrec[2], Tanja Soucie[3], Ivana Kokić[4]

Svijet oko nas nisu samo uglate geometrijske figure. Čine ga, kao što se može vidjeti na sljedećim slikama, i oble (više ili manje složene) geometrijske figure.

Slika 1.
Stari grad, Sisak

Slika 2.
Arena, Zagreb

Slika 3.
Arena, Zadar

Slika 4.
Arena u Puli

[1]Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
[2]Renata Svedrec, OŠ Otok, Zagreb
[3]Tanja Soucie, OŠ Gustava Krkleca, Zagreb
[4]Ivana Kokić, OŠ Trnsko, Zagreb

Slika 5.
Zgrada Aldar HQ,
Ujedinjeni Arapski Emirati

Slika 6.
Rotirajući neboderi
u Dubaiju

Slika 7.

U Poučku br. 49. prikazane su (kroz primjere) *Aktivnosti* osmišljene za postupno upoznavanje učenika (različitih dobi; od nižih do viših razreda osnovne škole) s *prikrivenim* metodama deskriptivne/nacrtne geometrije. Naša je ideja bila da metode deskriptivne/nacrtne geometrije (crtanje projekcija geometrijskih figura na tri ravnine (tzv. Mongeove projekcije), kao i konstrukcije geometrijske figure iz njenih projekcija (*kosa aksonometrija; ortogonalna i kosa projekcija*) *zamijenimo* crtanjem/konstruiranjem uglatih geometrijskih figura u *izometrijskoj trokutastoj mreži točaka*, bilo klasično (crtanje/konstruiranje na papiru trokutima i šestarom) ili uporabom programa dinamične geometrije kao alata za crtanje. Posebno treba naglasiti da primjena programa dinamične geometrije omogućava dinamičnost izometrijskog papira, tj. mijenjanje dimenzije, *okretanje* konstruirane geometrijske figure i njeno sagledavanje iz nekog *zgodnijeg* kuta, a napose mogućnost provjere točnosti same konstrukcije.

U Poučku br. 50. *prikrivene* metode deskriptivne/nacrtne geometrije *upakirane* su u nestandardne aktivnosti (crtanje/konstruiranje *nemogućih iluzija*) s istim ciljem vizualizacije trodimenzijskog prostora. Naime, iskustvo nas uči da učenici radije obrađuju teme u kojima *nema* geometrije/matematike.

U oba navedana slučaja ideja je bila da učenici usvajaju metode deskriptivne/nacrtne geometrije na netradicionalan način i tako razvijaju prostorni zor. Sposobnost *vizualizacije prostora*, tj. pamćenja oblika, veličina geometrijskih figura, kao i uočavanje svih međusobnih položaja i odnosa naziva se ***prostorni zor***. On je potreban u svakodnevnom životu, u školi, kasnije u znanosti...

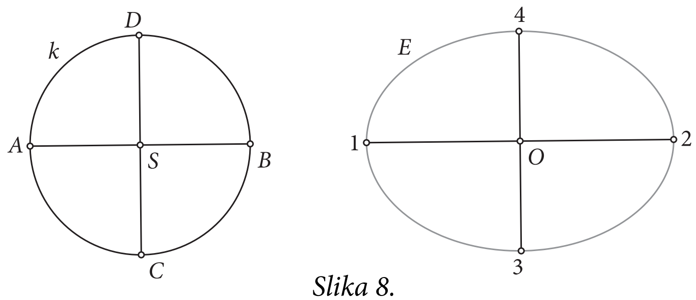
Sada smo pred novim izazovom. Da li učenike upoznati i s metodama vizualizacije *oblih geometrijskih figura*? Kada to učiniti? Treba li ih zamarati teorijom i kako odabrati dobru mjeru teoretiziranja? Pitanja su na mjestu. Općenito se kružnica/kružni lukovi projiciraju u elipsu/lukove elipse. Kružnica se projicira u kružnicu u nekoliko specijalnih slučajeva, primjerice, ako je kružnica u ravnini projiciranja ili u ravnini koja je usporedna s ravninom projiciranja... O svim ovim temama napisane su knjige u kojima se svojstva kružnice, elipse, preslikavanja, projiciranja... iskazuju kroz teoreme i propozicije, te ih se dokazuje. Dokazi nisu nipošto *trivijalni.* Mi smo mišljenja da je to jako osjetljivo područje i da je bolje primjenom odgovarajućih *Aktivnosti* i dinamičnom geometrijom kao alatom za crtanje/konstruiranje učenike voditi kako bi došli do nekih važnih tvrdnji (svojstava) koje se potom mogu zapisati kako bi se kasnije razvojem matematičkih znanja mogle izreći i definirati uporabom matematičkog/geometrijskog strogog zapisa. Ovdje ćemo te *Aktivnosti* prikazati kroz tvrdnje i *Primjere*.

Prije crtanja/konstruiranja oblih geometrijskih figura potrebno je usvojiti neka nova znanja potrebna za crtanje/konstruiranje elipse. Tek potom može se krenuti u prikaz, tj. crtanje/konstruiranje oblih geometrijskih figura u izometriskoj trokutastoj mreži točaka.

Mišljenja smo da je ovo dobra tema za izbornu nastavu - kako u osnovnoj, tako i srednjoj školi.

Važna svojstva kružnice i elipse:

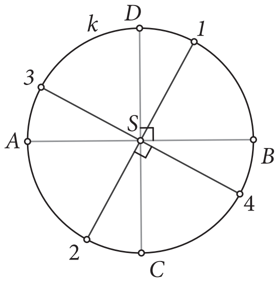
Neka su dane kružnica k i elipsa E, slika 8.



Slika 8.

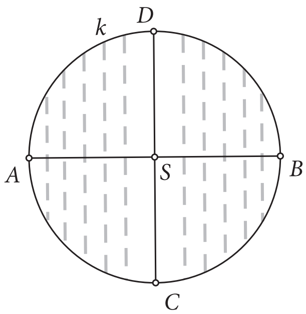
- Za bilo koji promjer $\overline{AB}$ kružnice k postoji točno jedan promjer $\overline{CD}$ takav da mjera veličine kuta što ga čine ta dva promjera jednaka je 90°.

- Za *svaku točku* kružnice *k* postoji par međusobno okomitih promjera. Na slici 9. prikazani su parovi međusobno okomitih promjera kružnice *k*; uočite da $\overline{AB}$ i $\overline{12}$ ***nisu*** parovi međusobno okomitih promjera kružnice *k*.

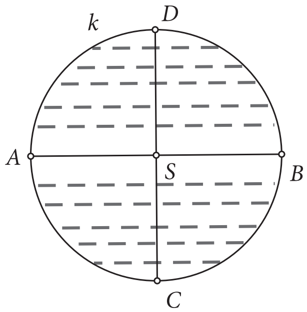


Slika 9.

- Središte *S* kružnice *k* raspolavlja parove međusobno okomitih promjera kružnice.
- Tetive kružnice *k* usporedne s jednim promjerom raspolavlja drugi promjer, i obratno, slike 10. i 11.



Slika 10.

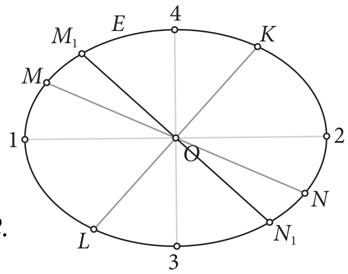


Slika 11.

- Elipsa ima ***točno jedan*** par međusobno okomitih promjera, veliku i malu os elipse.
- Svi ostali *parovi* promjera elipse nazivaju se *konjugirani promjeri*. Veličina kuta što ga čine parovi konjugiranih promjera različita je od 90°.

Primjer 1.

Neka je $\overline{KL}$ promjer elipse *E*, slika 12. Provjerimo koji je od nacrtanih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{M_1N_1}$ čini par konjugiranih promjera s promjerom $\overline{KL}$.



Slika 12.

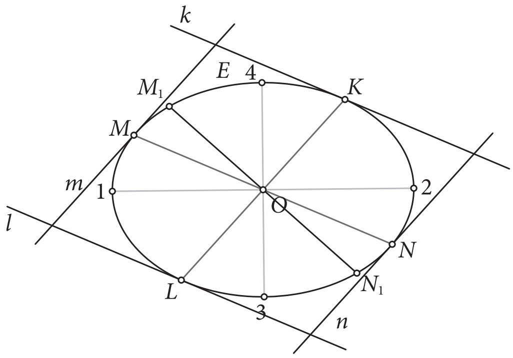
Rješenje:

Kako bismo riješili postavljeni problem, moramo se upoznati sa svojstvima parova konjugiranih promjera elipse:

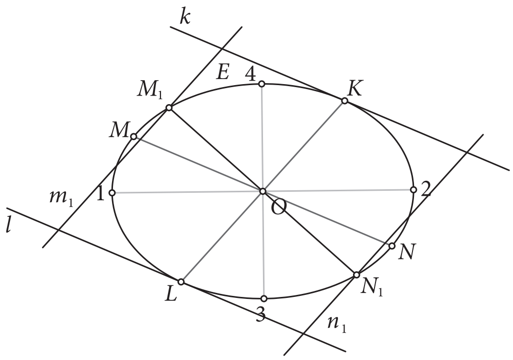
(T_1) Parovi međusobno konjugiranih promjera elipse imaju svojstvo da su tangente elipse u rubnim točkama jednog konjugiranog promjera usporedne s drugim promjerom, i obratno.

(T_2) Tetive elipse usporedne s jednim promjerom raspolavlja drugi promjer, i obratno.

Nacrtajmo tangente *k, l, m, n* elipse *E* u rubnim točkama nacrtanih promjera, slika 13.; odnosno tangente *k*, *l*, m_1, n_1, slika 14.



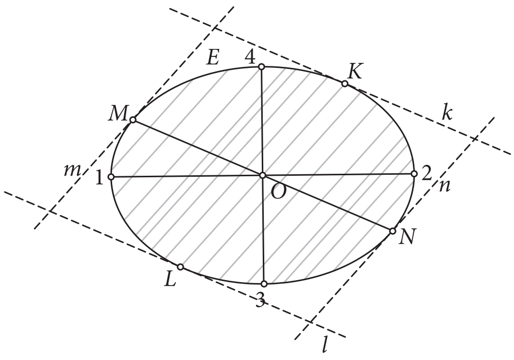
Slika 13.



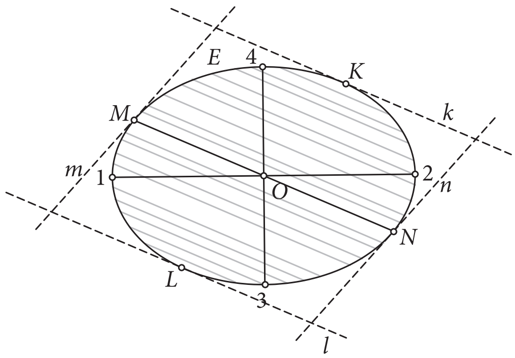
Slika 14.

Nacrtane/konstruirane tangente m_1 i n_1 sijeku elipsu *E*, što je u kontradikciji sa svojstvom (T_1) pa možemo zaključiti da promjeri $\overline{KL}$ i $\overline{M_1N_1}$ ***nisu*** parovi konjugiranih promjera elipse *E*.

Na slikama 15. i 16. nacrtane/konstruirane su tetive usporedne s jednim odnosno drugim promjerom. Jedan promjer raspolavlja tetive usporedne s drugim promjerom, i obratno. To svojstvo vrijedi i za tetive usporedne s velikom/malom osi. Raspolavlja ih mala/velika os. Elipsa je osnosimetrična s obzirom na veliku/malu os. Ovo je svojstvo posebno važno kod klasičnog crtanja elipse (krivuljarima, ...)



Slika 15.



Slika 16.

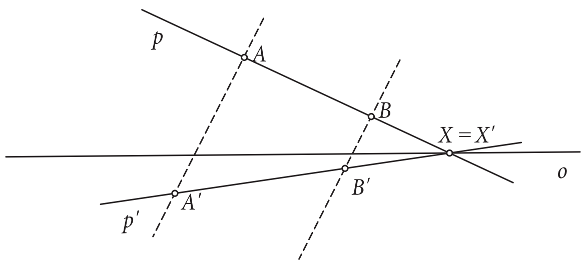
Definicija.

Preslikavanje u ravnini koje skup točaka i skup pravaca preslikava na same sebe, pri čemu je ispunjeno:

a) ako je točka na pravcu, njezina će slika biti na slici toga pravca;

b) spojnice međusobno pridruženih točaka su usporedne;

c) postoji *točno jedan pravac* (*os afinosti*) sa svojstvom da su mu sve točke same svoja slika, (slika 17.); naziva se ***perspektivna afinost*** ili ***afinitet***. Afinost je određena parom međusobno pridruženih točaka i osi afinosti {*A*, *A*', *o*}.



Slika 17.

Primjer 2.

Nacrtajmo/konstruirajmo elipsu E kao afinu sliku dviju koncentričnih kružnica.

Rješenje:

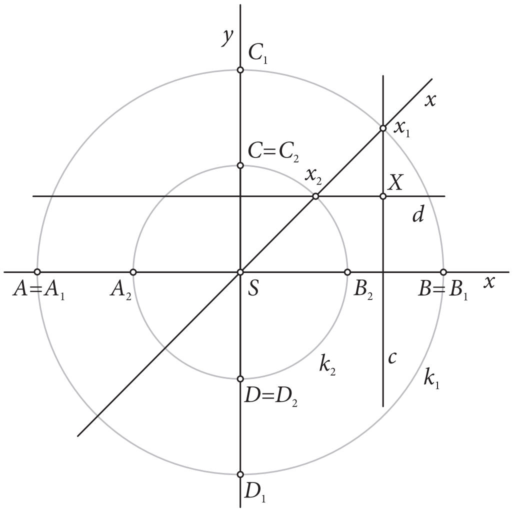
- Nacrtajmo jedan par okomitih pravaca x i y koji se sijeku u točki S.
- Konstruirajmo dvije koncentrične kružnice $k_1(S, a)$ i $k_2(S, b)$. Veliku os $\overline{AB}$ i malu os $\overline{CD}$ elipse konstruiramo kao sjecišta kružnice k_1 i pravca x; odnosno kružnice k_2 i pravaca y.

Da bismo konstruirali elipsu kao afinu sliku dviju koncentričnih kružnica, moramo definirati os afinosti i par međusobno pridruženih točaka.

Prvu afinost definira os afinosti, pravac na kojemu je velika os $\overline{AB}$ i par međusobno pridruženih točaka $\{C, C_1\}$, pri čemu je $C_1 = k_1\left(S, a\right) \cap \overline{CD}$. To će imati za posljedicu da je u ovom afinom preslikavanju $A = A_1$ i $B = B_1$.

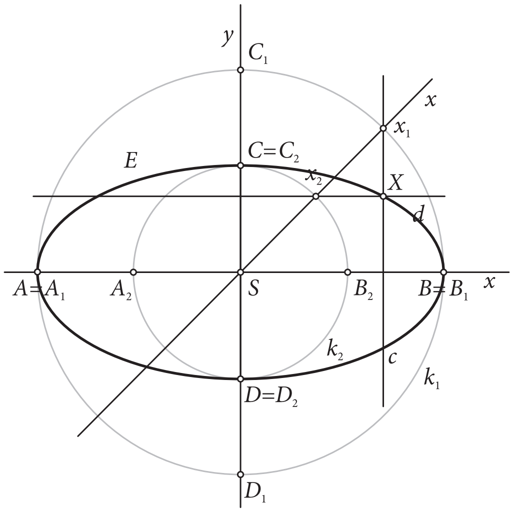
Drugu afinost definira os afinosti, pravac na kojemu je mala os $\overline{CD}$ i par međusobno pridruženih točaka $\{A, A_2\}$, pri čemu je $A_2 = k_2\left(S, b\right) \cap \overline{AB}$. To će imati za posljedicu da je u ovom afinom preslikavanju $C = C_2$ i $D = D_2$.

- Na kružnici k_1 konstruiramo neku točku, npr. X_1, i neka se ona *šeće* po kružnici k_1.
- Točke S i X_1 određuju pravac x koji siječe kružnicu k_2 u točki X_2.
- Točkom X_1 nacrtamo/konstruiramo pravac c usporedan s $\overline{CC_1}$ (spojnica međusobno pridruženih točaka u prvoj afinosti), a točkom X_2 nacrtamo/konstruiramo pravac d usporedan s $\overline{AA_2}$ (spojnica međusobno pridruženih točaka u drugoj afinosti). Točka X je presjek pravaca c i d, slika 18.



Slika 18.

- Na opisani način možemo konstruirati još točaka elipse E.
- U slučaju da crtamo programom dinamične geometrije potrebno je redom označiti točke X_1 i X (proizvoljno odabranu i njezinu afinu sliku) i u izborniku *Konstrukcije* odabrati naredbu *Lokus* (ili geometrijsko mjesto točaka u ravnini, tj. točka X_1 bila je proizvoljna točka kružnice k_1 a točka X je njezina afina slika. Želimo konstruirati sve točke u ravnini koje su definirane na taj način). Slika je elipsa E, slika 19.

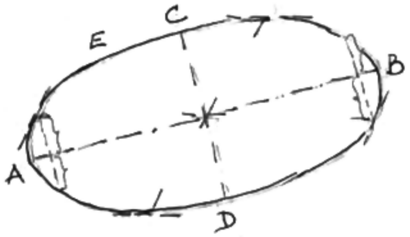


Slika 19.

Napomena.

- Elipsu E možemo nacrtati/konstruirati pomoću krivuljara, slika 20. U tom slučaju potrebno je konstruirati još točaka elipse E i primjenjivati pravilo 4 točke (po 4 točke spajamo krivuljarom).

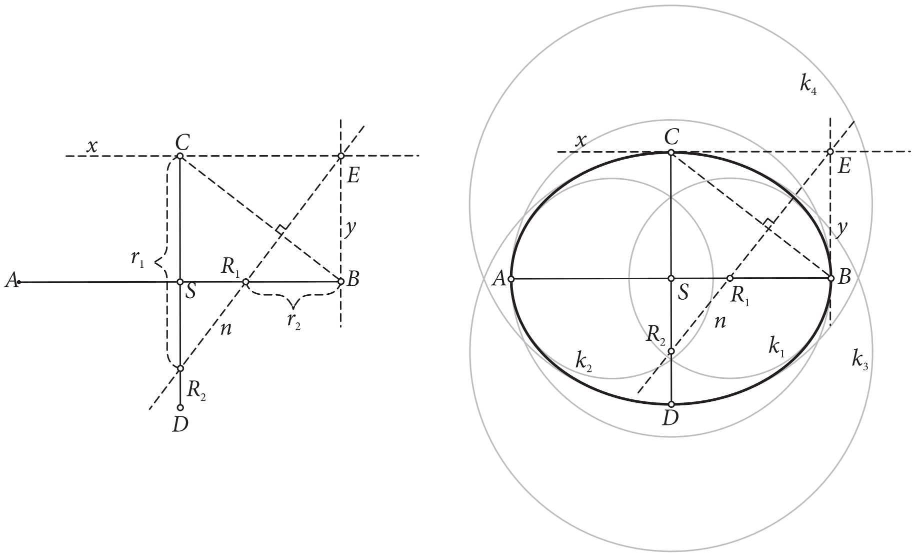
Slika 20.



Slika 21.

Treba biti jako pažljiv i precizan kako bi se izbjegla elipsa na slici 21. Naime, elipsa mora biti simetrična s obzirom na osi, a na ovoj je slici vidljivo da, što se više približavamo tjemenu elipse, tetive nisu raspolovljene velikom osi već su različitih duljina.

- Ako se elipsa crta klasično trokutima i šestarom na papiru, od pomoći mogu biti *kružnice zakrivljenosti*, slika 22.



Slika 22.

Zadatak 1.

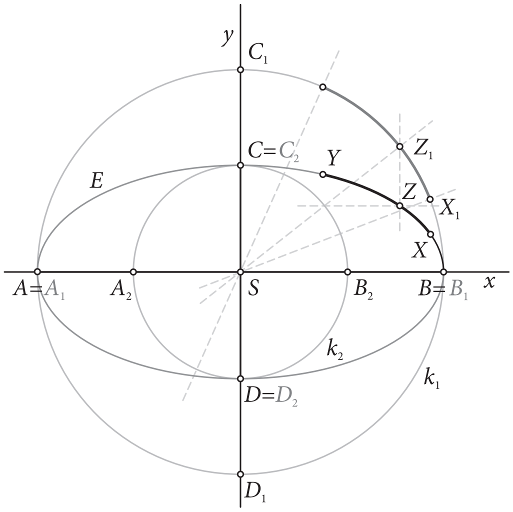
Provedi konstrukciju elipse iz **Primjera 2.** koja je afina slika dviju koncentričnih kružnica tako da je proizvoljna točka na kružnici k_2. Što uočavaš?

Primjer 3.

Nacrtajmo luk elipse E, koja je slika dviju koncentričnih kružnica.

Rješenje:

- Sama konstrukcija identična je konstrukciji iz **Primjera 2.** do trenutka kada odabiremo proizvoljnu točku na kružnici k_1. Sada ćemo odabrati dvije proizvoljne točke X_1 i Y_1 na kružnici k_1 i njima nacrtati/konstruirati kružni luk $\widehat{X_1Y_1}$. Na tom kružnom luku neka je proizvoljna točka Z_1.
- Kao u **Primjeru 2**. točki Z_1 konstruiramo pripadnu točku Z_2 na kružnici k_2, a one zajedno određuju točku Z na luku $\widehat{XY}$, slika 23.



Slika 23.

U svim prethodnim primjerima bile su poznate duljine velike i male osi, no što ako su one nepoznate? Kako konstruirati elipsu? Kako odrediti smjerove velike i male osi? Prethodni primjeri su, može se reći, idealni, jer se općenito par okomitih promjera kružnice projicira/preslikava u par konjugiranih promjera elipse.

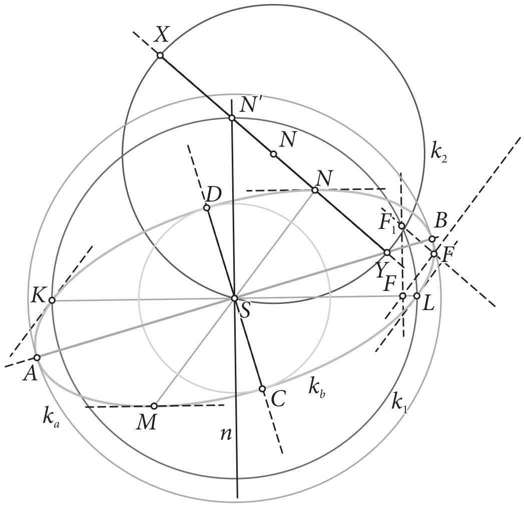
Primjer 4. (Rytzova konstrukcija)

Neka su zadana dva konjugirana promjera $\overline{KL}$ i $\overline{MN}$ elipse *E* koji zatvaraju kut čija je veličina različita od 90°. Nacrtajmo/konstruirajmo tu elipsu.

Rješenje:

- Nacrtajmo dva promjera $\overline{KL}$ i $\overline{MN}$ koji se sijeku u točki *S*.
- U rubnim točkama konjugiranih promjera nacrtajmo tangente.
- U točki *S* nacrtajmo/konstruirajmo okomicu *n* na promjer $\overline{KL}$ i kružnicu $k_1(S, |SL|)$.
- Okomica *n* i kružnica $k_1(S, |SL|)$ sijeku se u točki *N'* (točka drugog presjeka nije nam potrebna za konstrukciju).
- Konstrukcija elipse temelji se na *afinom preslikavanju:* os afinosti je promjer $\overline{KL}$, a par međusobno pridruženih točaka *N* i *N'*,
- Točkama *N* i *N'* nacrtajmo/konstruirajmo pravac. Točka $\overline{N}$ neka je polovište dužine $\overline{NN'}$.

- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu $k_2\left(\overline{N},\left|S\overline{N}\right|\right)$.
- Kružnica $k_2\left(\overline{N},\left|S\overline{N}\right|\right)$ i pravac NN' sijeku se u dvije točke, X i Y.
- Pravac SY je smjer velike osi tražene elipse E. Budući da su velika i mala os okomite, dovoljno je točkom S nacrtati/konstruirati okomicu na pravac SY.
- Za duljinu velike poluosi vrijedi: $a=\left|N'Y\right|=\left|XN\right|$, odnosno za duljinu male poluosi vrijedi: $b=\left|XN'\right|=\left|NY\right|$.
- Nacrtamo/konstruiramo kružnice $k_a(S, a)$ i $k_b(S, b)$. Presjeci s pravcima su velika os AB odnosno mala os CD.
- Sada, kao u **Primjeru 2.**, nacrtamo/konstruiramo elipsu E (na kružnici k_1 odaberemo neku točku F_1. Tom točkom nacrtamo okomicu na promjer $\overline{KL}$, sijeku se u točki $\overline{F}$. Točkom $\overline{F}$ nacrtamo/konstruiramo usporedan pravac s promjerom $\overline{KL}$, a točkom F_1 pravac usporedan s $\overline{NN'}$. Ta se dva pravca sijeku u točki F' elipse E), slika 24.



Slika 24.

Konstrukcija elipse iz **Primjera 4**. važna je za vizualizaciju oblih geometrijskih figura. Budući da ćemo oble geometrijske figure crtati/konstruirati u izometrijskoj trokutastoj mreži, konstrukciju iz **Primjera 4.** ponovimo u izometrijskoj točkastoj mreži točaka. No, prije same konstrukcije važno je uočiti da su konjugirani promjeri u **Primjeru 4**. bili različitih duljina pri crtanju/konstruiranju u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.

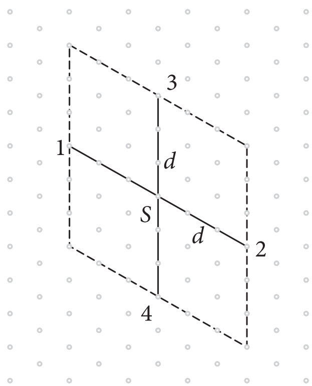
Konjugirani promjeri bit će jednakih duljina, tj. duljina promjera bit će jednaka duljini polumjera kružnice čija je elipsa projekcija.

Primjer 5. (Rytzova konstrukcija)

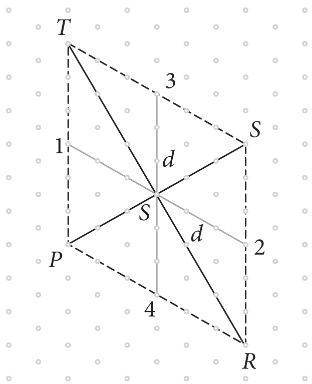
Nacrtajmo/konstruirajmo kružnicu u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka.

Rješenje:

- Odredimo neku točku koja će biti središte kružnice i označimo je slovom *S*. Neka je *d* duljina polumjera kružnice.
- U točki *S* nacrtamo/konstruiramo dužine duljine *d*, koje će biti konjugirani promjeri elipse koja je projekcija kružnice *k* u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka. Neka su to dužine $\overline{12}$ i $\overline{34}$.
- U točkama 1 i 2 nacrtajmo/konstruirajmo tangente usporedne s dužinom $\overline{34}$; odnosno točkama 3 i 4 nacrtajmo/konstruirajmo tangente usporedne s dužinom $\overline{12}$, slika 25.



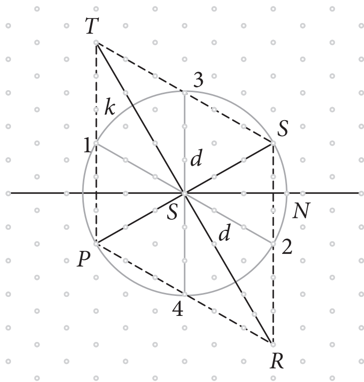
Slika 25.



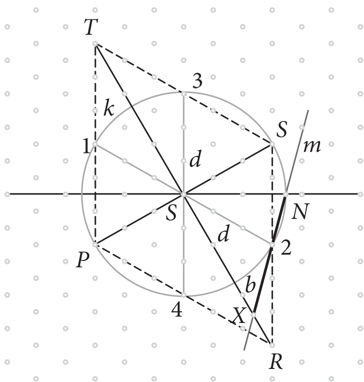
Slika 26.

- Nacrtali smo paralelogram *PRST* jednakih duljina stranica, tj. to je romb čije su dijagonale međusobno okomite. Te su dijagonale pravci nosioci velike i male osi elipse *E*, slika 26.

- Kako bismo odredili duljinu velike odnosno male osi, primijenit ćemo konstrukciju koja se naziva *Rytzova konstrukcija*. Središtem S nacrtamo/konstruiramo okomicu o na promjer $\overline{34}$ tako da su rubna točka 2 i dijagonala romba (smjer velike osi) $\overline{RT}$ s desne strane. Na okomicu prenesemo duljinu d (duljina polumjera kružnice) pa točku presjeka iznad promjera (drugi presjek nije nam potreban) označimo s N, slika 27.

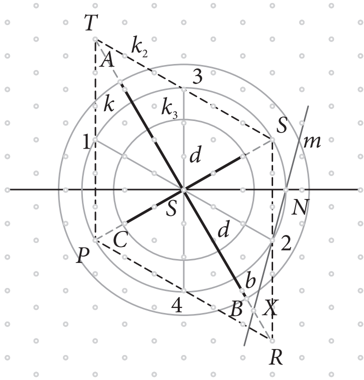


Slika 27.



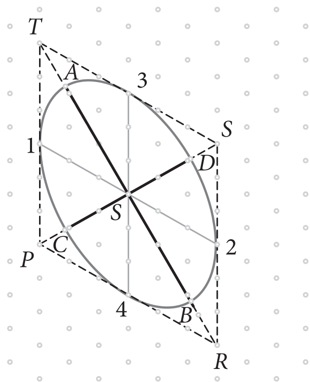
Slika 28.

- Točkama 2 i N nacrtamo/konstruiramo pravac m.
- Pravac m i dijagonala romba $\overline{RT}$ sijeku se u točki X. Tada je duljina velike poluosi elipse E jednaka $a = |NX|$, slika 28., a duljina male osi elipse E iznosi $b = |2X|$, slika 29.



Slika 29.

- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_2(S, a)$ i $k_3(S, b)$. Točke A i B su presjeci kružnice k_2 i dijagonale romba $\overline{RT}$; odnosno točke C i D presjeci su kružnice k_3 i dijagonale romba $\overline{PS}$. Nacrtajmo /konstruirajmo veliku i malu os elipse E, slika 30.
- Kada su poznati velika i mala os elipse E i konjugirani promjeri, elipsu možemo nacrtati koristeći opciju geometrijsko mjesto točaka ili lokus. Potrebno je odrediti par međusobno pridruženih točaka kao u **Primjeru 2.**



Slika 30.

Zadatak 2.

U izometrijskoj trokutastoj mreži točaka nacrtaj/konstruiraj luk elipse iz **Primjera 3**.

Općenito, imat ćemo sljedeću situaciju: obla geometrijska figura sastoji se od nekoliko kružnih dijelova čije su projekcije elipse, ali one se preklapaju, tj. ne vidimo ih sve, već su neki dijelovi vidljivi odnosno nevidljivi.

Literatura:

1. *** Okvirni nacionalni kurikulum, Poučak 39, Zagreb, 2009.
2. V. Niče. *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
3. D. Palman. *Nacrtna geometrija*, Element, Zagreb, 1996.
4. V. O. Gordon, M. A. Sementsov – Ogievski. *A Course in Descriptive Geometry*, MIR Publishers, Moscow, 1980.
5. R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, I. Kokić. *Tajni zadatak* 008 – *udžbenik i vježbenica* s CD-om iz *matematike za osmi razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
6. ****A Guide to Effective Instruction in Mathematics – Geometry and Spatial Sense*, Ministry of Eduation, Ontariom 2005.
7. L. B. Triglia, S. Sammarone, R. Zizzo. *Disegno Tecnico – Metodo tradicionale – uso del computer*, Zanichelli, 1992.
8. N. Radović, P. Mladinić, R. Svedrec. *Ravninske krivulje i Sketchpad* (1), Poučak, 39 (2009.) 68 – 76.
9. G. E. Vinson. *Essentialis of Engineering Design Graphic*s, Kendall/ Hunt Publishing Company, Dubuque, 2003.
10. N. Radović, R. Svedrec, T. Soucie, I. Kokić. *Vizualizacija prostora*, Poučak 49 (2012.) 49 – 68.
11. N. Radović, R. Svedrec, T. Soucie, I. Kokić. *Nemoguće figure u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka*, Poučak 50 (2012.) 56 – 69.
12. N. Radović, R. Svedrec, T. Soucie, I. Kokić. *Vizualizacija prostora u izometrijskoj trokutastoj mreži točaka,* Zbornik radova 5. Kongresa nastavnika matematike RH / Mladinić, Petar; Svedrec, Renata (ur.). – Zagreb, Hrvatsko matematičko društvo & Profil , 2012. 461 – 480.
13. M. Gardner: *The Colosall Book of Mathematics*, W. W. Norton & Company, New York, 2001.
14. T. Pappas: *The Joy of Mathematics Discovering Mathematics All Around You*, Wide World Publishing/ Tetra, San Carlos, 2006.