Pregledni rad
UDK: 519.863:658.7

**Prof. dr. sc. Zrinka Lukač**[1]
**Vedran Kojić, dipl. ing. mat.**[2]

# RJEŠAVANJE PROBLEMA OPTIMIZACIJE U PROBLEMIMA MINIMIZACIJE TROŠKOVA I EKONOMIČNE KOLIČINE NABAVE POMOĆU NEJEDNAKOSTI IZMEĐU ARITMETIČKE I GEOMETRIJSKE SREDINE

# SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS OF COST MINIMIZATION AND ECONOMIC ORDER QUANTITY BY USING THE INEQUALITY BETWEEN ARITHMETIC AND GEOMETRIC MEAN

**SAŽETAK:** Diferencijalni račun je moćna, ali ne uvijek i jednostavna tehnika kojom se obično rješavaju problemi optimizacije u ekonomiji. Kao alternativni način za optimizaciju ekonomskih funkcija, u ovome radu promatra se primjena nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine (AG nejednakost). Uz formalni dokaz, primjena AG nejednakosti ilustrira se na problemu minimizacije troškova proizvodnje, te izvodu optimalne količine nabave u modelu upravljanja zalihama (EOQ modelu). U radu je posebno istaknuta prednost AG nejednakosti nad tehnikom diferencijalnog računa u izračunu stacionarnih točaka i optimalne vrijednosti promatrane funkcije, što može pomoći u lakšem razumijevanju načina rješavanja danog problema.

**KLJUČNE RIJEČI:** aritmetičko-geometrijska (AG) nejednakost, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky (CSB) nejednakost, optimizacija bez derivacija, minimizacija troškova, model ekonomične količine nabave (EOQ model)

**ABSTRACT:** Differential calculus is a powerful technique commonly used to solve optimization problems in economics. However, its implementation is not always simple. In this paper the application of inequality between arithmetic and geometric mean (AGM inequality) is considered as an alternative way to optimize economic functions. Along with the formal proof, the AGM inequality is applied to solving production cost minimization problem, as well as to derivation of the economic order quantity. The paper emphasizes the advantage of AGM inequality over the differential calculus technique in the calculation of

[1] Prof. dr. sc. Zrinka Lukač, izvanredna profesorica, Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet – Zagreb, Katedra za matematiku, e-mail: zlukac@efzg.hr.

[2] Vedran Kojić, dipl. ing. mat., asistent, Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet – Zagreb, Katedra za matematiku, e-mail: vkojic@efzg.hr.

stationary points and the optimal values of the observed functions, which may help in easier understanding of how to solve the given problems.

**KEY WORDS:** arithmetic-geometric mean (AGM) inequality, Cauchy-Schwarz-Buniakowsky (CSB) inequality, optimization without derivatives, cost minimization, economic order quantity (EOQ) model

## 1. UVOD

Uobičajeni postupak pri rješavanju problema optimizacije temelji se na korištenju diferencijalnog računa. Općenito, nužni i dovoljni uvjeti za postojanje ekstrema dane funkcije cilja jedne varijable koja je dovoljno glatka dani su u terminima derivacija prvog i drugog reda. U nekim slučajevima za određivanje ekstrema je potrebno pronaći i derivacije višeg reda. Nasuprot funkcije jedne varijable, u slučaju dovoljno glatke funkcije više varijabli potrebno je računati gradijent i Hesseovu matricu funkcije, a ako se funkcija cilja optimizira uz ograničenje, u ovisnosti o vrsti ograničenja može se primijeniti metoda supstitucije, metoda Lagrangeovih množitelja ili neka od metoda temeljena na Karush-Kuhn-Tuckerovim uvjetima optimalnosti (Neralić, 2008). Iako su navedene metode vrlo moćne u pronalaženju rješenja širokog spektra problema, upotrebom diferencijalnog računa nerijetko se dobivaju složeni međurezultati koje nužno treba riješiti. Kako bi zaobišli mukotrpno korištenje diferencijalnog računa, matematičari su nastojali pronaći drukčije, alternativne pristupe u rješavanju problema optimizacije. Jedni od prvih radova bili su *The solution of problems in maxima and minima by algebra* (Graver, 1935), te *Maxima and minima without calculus* (Niven, 1981).

Algebarska metoda se kao alternativni pristup u rješavanju problema optimizacije u zadnjih nekoliko godina često koristi za optimizaciju ukupnih troškova u modelima upravljanja zaliha. Algebarska metoda optimizacije oslanja se na pogodne manipulacije algebarskim izrazima, kao što su rastavljanja na faktore, te svođenje izraza na kvadrat trinoma ili zbroj potpunih kvadrata, što spada u gradivo srednjoškolske elementarne matematike. U rješavanju modela ekonomične količine nabave (*economic order quantity model* – EOQ model), Grubbstörm je bio prvi koji nije koristio derivacije (Grubbstörm, 1995, 1996). Pregledan popis radova između 1995. i 2010. godine čija je tematika rješavanje raznovrsnih modela za upravljanje zalihama bez upotrebe diferencijalnog računa, može se naći primjerice u (Cárdenas-Barrón, 2011). Osim algebarskih metoda, neki problemi optimizacije mogu se rješavati primjenom nejednakosti koje u matematici igraju značajnu ulogu. U zadnjih dvadeset godina primijećen je nemali niz radova o primjeni nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine (AG nejednakost) u rješavanju EOQ modela. Uz AG nejednakost, nerijetko se koristi i Cauchy-Schwarz-Buniakowsky (CSB) nejednakost (Teng, 2009, Ouyang et al., 2012, Wee et al., 2013).

Ovaj rad motiviran je člankom *An easy method to derive EOQ and EPQ inventory models with backorders* (Cárdenas-Barrón, 2010), u kojem se pomoću AG i CSB nejednakosti izvode formule za optimalnu količinu nabave i proizvodnje uz pretpostavku da su dozvoljene ponovne narudžbe. Ideja svih nama poznatih radova na ovu temu, pa tako i našega rada, je pokazati kako se na drukčiji način može doći do rezultata koji bi se mogli dobiti upotrebom diferencijalnog računa. No, u literaturi se rijetko objašnjava u čemu je točna prednost primjene nejednakosti nad derivacijama. Stoga je dodatni cilj našega rada na jednom mjestu dati usporedbu upotrebe diferencijalnog računa i metode nejednakosti. Složenost primjene diferencijalnog računa ilustrira se na formalnom dokazu AG nejednakosti u općem obliku, kojeg se u spomenutim radovima zaobilazi. Kao glavna prednost AG i CSB nejednakosti nad upotrebom diferencijalnog računa istaknuta je elegantnost izračuna stacionarnih točaka i optimalnih vrijednosti promatranih funkcija u jednom potezu, istovremeno. Također, valja naglasiti kako u domaćoj literaturi ne postoje radovi s tematikom primjene nejednakosti u ekonomskim problemima. Sva proučavanja nejednakosti u domaćim radovima su i dalje uglavnom u sferi čiste matematike, kako na akademsko-znanstvenoj razini, tako i u publikacijama na srednjoškolskoj stručnoj razini (Ilišević, 2005, 2009, 2012).

Rad je podijeljen u pet dijelova. Nakon uvodnog dijela, u drugom dijelu formalno je dokazana AG i CSB nejednakost. Također, navedeni su primjeri primjena ovih nejednakosti u matematičkim problemima optimizacije. U trećem dijelu pokazana je primjena nejednakosti na rješavanju pogodnih problema optimizacije u ekonomiji. Četvrti dio rada bavi se izvodom eksplicitne formule za optimalnu količinu nabave u EOQ modelu pomoću nejednakosti. Rad završava petim, zaključnim dijelom.

## 2. NEJEDNAKOSTI KAO ALTERNATIVNI PRISTUP RJEŠAVANJU PROBLEMA OPTIMIZACIJE

Važno je istaknuti da se nejednakosti mogu upotrijebiti u rješavanju problema optimizacije samo u nekim posebnim slučajevima. U ovome radu promatraju se posebni oblici funkcija cilja, koje su dane kao zbroj izraza čiji je umnožak konstantan. U nekim primjerima je relativno jasno, odnosno gotovo očito na koji način nejednakosti treba upotrijebiti, dok je u drugima potrebno primijeniti određene matematičke trikove koji se stječu iskustvom i vježbom. U ovome dijelu navedene su definicije potrebnih pojmova, te su provedeni formalni dokazi tvrdnji koje su potrebne u nastavku rada. Posebna pozornost je posvećena ilustrativnim primjerima.

### 2.1. Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

**Definicija 1.** Za realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}$, definira se aritmetička sredina $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ izrazom

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{1}$$

**Definicija 2.** Za nenegativne realne brojeve $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, definira se geometrijska sredina $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ izrazom

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}. \tag{2}$$

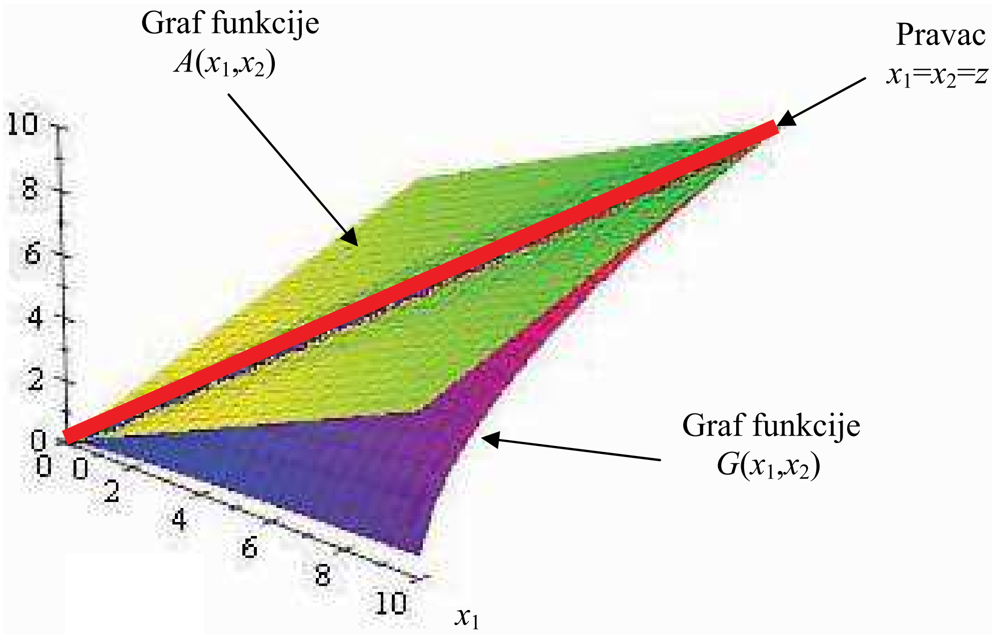
**Teorem 3.** (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, AG nejednakost) Geometrijska sredina nenegativnih realnih brojeva $x_i \geq 0$, $i = 1,2,...,n$, $n \in \mathbb{N}$, manja je ili jednaka od njihove aritmetičke sredine, odnosno vrijedi

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{3}$$

Jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

U slučaju $n = 2$, slika 1 pokazuje odnos među grafovima funkcija $A(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$ i $G(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ u trodimenzionalnom pravokutnom koordinatnom sustavu. Jasno se vidi da vrijedi nejednakost $G(x_1,x_2) \leq A(x_1,x_2)$, odnosno

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3*}$$




**Slika 1:** Geometrijska ilustracija AG nejednakosti u slučaju $n = 2$

Izvor: izrada autora.

Uočimo da se jednakost u (3*) postiže upravo na pravcu $x_2=x_1$. No, postavlja se pitanje kako formalno pokazati nejednakost (3) za proizvoljan prirodan broj $n \in \mathbb{N}$. Iako se AG nejednakost može dokazati na različite načine, u ovome radu dan je dokaz pomoću metode Lagrangeovih množitelja kako bi se ilustrirala složenost upotrebe diferencijalnog računa, te opravdala upotreba nejednakosti kao alternativnog pristupa u rješavanju nekih problema optimizacije. Sličan, ali ne identičan dokaz može se vidjeti u (Wagala Gwanyama, 2004). O metodi Lagrangeovih množitelja može se više vidjeti primjerice u (Neralić, 2009, str. 36).

Dokaz teorema 3.

Neka su funkcije $p,\ s : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ definirane redom

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, ..., x_n) &= x_1 x_2 \ldots x_n, \\ s(x_1, x_2, ..., x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \end{aligned} \tag{4}$$

pri čemu je $\mathbb{R}_+^n = \left\{ \left( x_1, x_2, ..., x_n \right) \in \mathbb{R}^n \middle| x_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n \right\}$ skup svih uređenih $n$-torki pozitivnih realnih brojeva. U svrhu dokaza relacije (3), promatra se sljedeći problem optimizacije:

$$\max p\left( x_1, x_2, ..., x_n \right) \tag{5}$$

uz ograničenje

$$g\left( x_1, x_2, ..., x_n \right) = s\left( x_1, x_2, ..., x_n \right) - K = 0, \tag{6}$$

pri čemu je $K > 0$ konstanta. Lagrangeova funkcija $L\left( x_1, x_2, ..., x_n, \lambda \right)$ ovog problema dana je sljedećim izrazom

$$L\left( x_1, x_2, ..., x_n, \lambda \right) = x_1 x_2 ... x_n + \lambda \left( x_1 + x_2 + ... + x_n - K \right). \tag{7}$$

Iz nužnog uvjeta za ekstrem Lagrangeove funkcije dobiva se sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 x_3 ... x_n + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 x_3 ... x_n + \lambda = 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= x_1 x_2 ... x_{n-1} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1 + x_2 + ... + x_n - K = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Pogodnim oduzimanjem odgovarajućih jednadžbi iz (8) dolazi se do sustava jednadžbi (9), čija rješenja predstavljaju stacionarne točke funkcije $L$ iz (7):

$$\begin{aligned} \left( x_1 - x_2 \right) x_3 x_4 ... x_n &= 0, \\ \left( x_2 - x_3 \right) x_1 x_4 ... x_n &= 0, \\ &\vdots \\ \left( x_{n-1} - x_n \right) x_1 x_2 ... x_{n-2} &= 0, \\ x_1 + x_2 + ... + x_n &= K. \end{aligned} \tag{9}$$

Kako je $x_i > 0$, za sve $i = 1,2,...,n$, iz (9) slijedi $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{K}{n}$. Dakle, jedinstvena stacionarna točka funkcije $L$ iz (7) je točka $\left( \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n \right) = \left( \frac{K}{n}, \frac{K}{n}, ..., \frac{K}{n} \right)$.
Jacobijeva matrica $J$ ograničenja iz (6) u stacionarnoj točki $\tilde{\mathbf{x}} = \left( \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n \right)$ je zapravo transponirani gradijent funkcije g iz (6) u oznaci $\nabla g(\tilde{\mathbf{x}})^T$, odnosno vrijedi

$$J\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)=\nabla g(\tilde{\mathbf{x}})^T=$$
$$=\left[\frac{\partial g}{\partial x_1}\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)\ \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)\ ...\ \frac{\partial g}{\partial x_n}\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)\right]=\left[1\ 1\ ...\ 1\right]. \quad (10)$$

Nul-prostor $N$ Jacobijeve matrice $J$ je skup svih vektora iz $\mathbb{R}^n$ čiji je umnožak s Jacobijevom matricom jednak nuli, odnosno zbog (10) vrijedi

$$N(\mathbf{y})=\left\{\mathbf{y}=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\nabla g(\tilde{\mathbf{x}})^T\mathbf{y}=0\right\}=\left\{\mathbf{y}\,\middle|\,\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n, y_1+y_2+...+y_n=0\right\}, \quad (11)$$

dok je Hesseova matrica Lagrangeove funkcije u odnosu na varijable $x_1, x_2,..., x_n$ u točki $\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)$, u oznaci $\nabla^2_{\mathbf{x}}L\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)$, jednaka

$$\nabla^2_{\mathbf{x}}L\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)=\left(\frac{K}{n}\right)^{n-2}\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}. \quad (12)$$

Kako za svaki $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ iz nul-prostora Jacobijeve matrice vrijedi

$$\mathbf{y}^T\nabla^2_{\mathbf{x}}L\mathbf{y}=\left(\frac{K}{n}\right)^{n-2}\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=$$
$$=\left(\frac{K}{n}\right)^{n-2}\begin{bmatrix}\underbrace{y_2+y_3+...+y_n}_{=-y_1} & \underbrace{y_1+y_3+...+y_n}_{=-y_2} & \cdots & \underbrace{y_1+y_2+...+y_{n-1}}_{=-y_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=$$
$$=-\left(\frac{K}{n}\right)^{n-2}\cdot\left(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2\right)<0,$$

to znači da je Hesseova matrica Lagrangeove funkcije u odnosu na varijable $x_1,x_2,...,x_n$ na tom prostoru negativno definitna. Time su ispunjeni uvjeti teorema za dovoljne uvjete lokalnog ekstrema (vidjeti primjerice u (Neralić, 2009., str. 43)). Dakle, problem (5) – (6) ima strogi lokalni maksimum u točki $\left(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n\right)=\left(\frac{K}{n},\frac{K}{n},...,\frac{K}{n}\right)$. Pritom je maksimalna vrijednost funkcije cilja $p_{\max}=\left(\frac{K}{n}\right)^n$.

Dakle,

$$p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) \leq p_{\max} = \left(\frac{K}{n}\right)^n, \tag{13}$$

što je ekvivalentno s

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{K}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{14}$$

Ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, očito u (14) vrijedi jednakost. Obratno, ako u (14), odnosno (13) vrijedi jednakost, zbog jedinstvenosti stacionarne točke, odnosno točke maksimuma, slijedi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{K}{n}$. Ovim je u potpunosti dokazana AG nejednakosti.

Sljedeći primjer ilustrira primjenu AG nejednakosti na problemu iz geometrije, koji ima svoju ekonomsku interpretaciju u minimizaciji troškova proizvodnje: Koliko iznose minimalni troškovi nabave tankog lima za izradu otvorene kutije zadanog volumena, ako je poznata cijena jedinične površine lima? Valja uočiti da su troškovi nabave proporcionalni ukupnoj površini nabavljenog lima, što je ključan korak u rješavanju ovoga problema.

**Problem 4.** (Problem određivanja minimalnog oplošja kvadra zadanog volumena) Otvorena kutija u obliku kvadra ima dimenzije *x*, *y*, *z*. Odredite dimenzije kutije, tako da oplošje kutije bude minimalno uz uvjet da joj je volumen zadan i fiksan, odnosno $V_0 = xyz$.

Ovaj problem svodi se na minimizaciju funkcije oplošja kvadra bez jedne stranice

$$o(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz, \tag{15}$$

uz ograničenje $V_0 = xyz$. Primijetimo da se umnožak pribrojnika u (15) može izraziti pomoću $V_0$. Zbog toga je prikladno minimizirati funkciju *o* pomoću AG nejednakosti. Primjenom AG nejednakosti na relaciju (15) dobiva se

$$o(x,y,z) = xy + 2yz + 2xz \geq 3\cdot(xy\cdot 2yz\cdot 2xz)^{1/3} = 3\cdot(4x^2y^2z^2)^{1/3} = 3\sqrt[3]{4}\cdot V_0^{2/3}. \tag{16}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $xy = 2yz = 2xz$, odnosno $x = y = 2z$, odakle zbog ograničenja $V_0 = xyz$ slijedi da su tražene dimenzije otvorene kutije

$$x = y = 2\left(\frac{V_0}{4}\right)^{1/3},\ z = \left(\frac{V_0}{4}\right)^{1/3}. \tag{17}$$

Relacija (16) pokazuje da je vrijednost funkcije oplošja *o* uvijek veća ili jednaka konstantnoj vrijednosti $3\sqrt[3]{4}\cdot V_0^{2/3}$, te da se ta konstantna vrijednost postiže ako i samo ako vrijedi (17), pa je $3\sqrt[3]{4}\cdot V_0^{2/3}$ minimum funkcije *o*.

Ovaj problem bi se mogao riješiti standardnim načinom pomoću metode Lagrangeovih množitelja. No, primjena AG nejednakosti je omogućila da se na elegantniji način, u jednom potezu, odredi tražena minimalna vrijednost funkcije, kao i koordinate točke $(x,y,z)$ u kojoj se minimalna vrijednost postiže.

### 2.2. Cauchy–Schwarz–Buniakowsky nejednakost

Osim AG nejednakosti, u matematici važnu ulogu ima i Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost (CSB nejednakost).

**Teorem 5.** (CSB nejednakost) Neka su $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ i $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,...,b_n)$ dvije $n$ – torke realnih brojeva. Tada vrijedi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right). \tag{18}$$

Pritom jednakost u (18) vrijedi ako i samo ako su $n$ – torke $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ razmjerne, tj. ako i samo ako postoji realan broj $\lambda$ takav da je

$$b_k = \lambda a_k, \quad k=1,2,...,n. \tag{18*}$$

Dokaz teorema 5.
Za $n = 2$ treba pokazati nejednakost

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right). \tag{19}$$

Nakon kvadriranja izraza na lijevoj strani i množenja svakog sa svakim na desnoj strani, nejednakost (19) prelazi u ekvivalentnu nejednakost

$$0 \le a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2, \tag{20}$$

što je ekvivalentno s

$$0 \le \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2. \tag{21}$$

Kako je nejednakost (21) očito točna, točna je i ekvivalentna nejednakost (9). Kako u nejednakosti (21) znak jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \tag{22}$$

odatle slijedi da postoji skalar $\lambda$ takav da je $b_k = \lambda a_k,\ k=1,2.$ Ovim je u potpunosti pokazana CSB nejednakost u slučaju $n = 2$. Dokaz slučaja $n > 2$ može se provesti upotrebom AG nejednakosti kako je pokazano u prilogu na kraju rada.

U sljedećem primjeru ilustrirana je primjena CSB nejednakosti na prikladnom problemu optimizacije.

**Primjer 6.** Odredite ekstreme funkcije $f(x,y,z)=2x+3y+6z$, uz ograničenje $x^2+y^2+z^2=1$.

Riješimo ovaj problem pomoću CSB nejednakosti. Iz CSB nejednakosti slijedi da je kvadrat funkcije *f* uvijek manji ili jednak od konstantne vrijednosti, odnosno

$$f^2(x,y,z)=(2x+3y+6z)^2 \le \left(2^2+3^2+6^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=49. \tag{23}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su uređene trojke (2,3,6) i (*x*,*y*,*z*) razmjerne, odnosno $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$, odakle slijedi $x=2\lambda,\ y=3\lambda,\ z=6\lambda.$ Iz zadanog ograničenja lako se dobije $\lambda^2=1/49$. Iz relacije (23) slijedi

$$-7\le f(x,y,z)\le 7 \tag{24}$$

Lako se provjeri da za $\lambda=-1/7$ funkcija *f* postiže minimum –7, a za $t=1/7$ maksimum 7.

Iako se i ovaj primjer mogao riješiti standardnom metodom Lagrangeovih množitelja, primjenom CSB nejednakosti se na elegantniji način došlo do rješenja ovoga problema.

## 3. PRIMJENA NEJEDNAKOSTI NA PROBLEME U EKONOMIJI

U ekonomiji veliku važnost imaju različite vrste troškova. Naime, donositeljima odluke je uvijek u interesu minimizirati troškove, ili uz zadanu razinu troškova maksimizirati određenu funkciju cilja (primjerice, funkciju proizvodnje ili funkciju korisnosti potrošača). U ovome dijelu rada ilustrira se primjena AG nejednakosti na problemima optimizacije troškova.

**Problem 7.** (Problem optimizacije prosječnih troškova proizvodnje)

Zadana je funkcija ukupnih troškova proizvodnje $T(Q)=5Q^2+20Q+500$, gdje je $Q$ količina proizvoda. Odredite količinu $Q_0$ za koju funkcija prosječnih troškova doseže minimum i iznos minimalnih prosječnih troškova.

Ovaj problem može se riješiti upotrebom derivacija (Neralić, Šego, 2009). No, ovdje ćemo pokazati kako riješiti ovaj problem pomoću AG nejednakosti. Funkcija prosječnih troškova je dana izrazom

$$AT(Q)=\frac{T(Q)}{Q}=\frac{5Q^2+20Q+500}{Q}=5Q+20+\frac{500}{Q}. \tag{25}$$

Primjenom AG nejednakosti na varijabilne pribrojnike $5Q>0$ i $\frac{500}{Q}>0$ funkcije $AT$ slijedi

$$AT(Q)=20+5Q+\frac{500}{Q}\ge 20+2\sqrt{5Q\cdot\frac{500}{Q}}=120. \tag{26}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

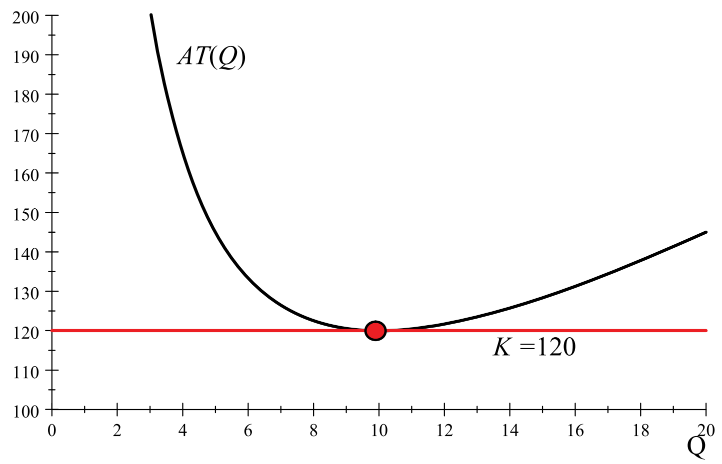
$$5Q = \frac{500}{Q}, \tag{27}$$

odakle slijedi $Q = 10$. Dakle, na razini proizvodnje $Q_0 = 10$, minimalni prosječni troškovi iznose 120.

Naime, AG nejednakost u relaciji (26) pokazuje da je funkcija prosječnih troškova $AT$ uvijek veća ili jednaka od konstante $K = 120$. Dakle, za sve razine proizvodnje $Q$, prosječni troškovi će biti veći ili jednaki od 120, pa je očito da se minimalni prosječni troškovi postižu uz onu razinu proizvodnje za koju su prosječni troškovi upravo jednaki 120. AG nejednakost pokazuje da funkcija prosječnih troškova $AT$ doista postiže minimalnu vrijednost 120 na onoj razini proizvodnje za koju vrijedi da su varijabilni pribrojnici funkcije $AT$ međusobno jednaki (vidjeti relaciju (27)). Iz toga lako slijedi da je tražena razina proizvodnje $Q_0$ jednaka 10. Uobičajenom upotrebom derivacija moralo bi se pronaći prvu derivaciju funkcije $AT$, potom njezine stacionarne točke, te konačno ispitivanjem predznaka druge derivacije u stacionarnoj točki provjeriti da se doista radi o minimumu funkcije $AT$. Lako se provjeri da je derivacija funkcije $AT$ u točki $Q = 10$ jednaka nuli, što se može vidjeti i na slici 2. Kao zamjena za primjenu diferencijalnog računa, elegantno zaključivanje u relacijama (26) i (27) istovremeno daje potpuno rješenje zadanog problema, koje se sastoji od dvije važne informacije: minimalni prosječni troškovi iznose 120, a postižu se na razini proizvodnje 10.

Neki problemi optimizacije uz ograničenje također su pogodni za rješavanje pomoću AG nejednakosti. Sljedeći primjer ilustrira problem optimizacije volumena spremnika uz određeno budžetsko ograničenje.

**Problem 8.** (Problem određivanja maksimalnog volumena valjka zadanog oplošja) Spremnik za određenu vrstu robe izrađuje se u obliku valjka. Poklopac i dno izrađuju se od jedne vrste materijala, a plašt spremnika od druge vrste materijala. Trošak po jedinici površine materijala za poklopac i dno, te plašt spremnika iznose $c_1$ i $c_2$ novčanih jedinica, redom. Ako je donositelj odluke spreman odvojiti $c_0$ novčanih jedinica za izradu jednog spremnika, postavlja se pitanje koliko iznosi maksimalni volumen (jednog) spremnika koji se može izraditi uz zadano budžetsko ograničenje.




**Slika 2:** Graf funkcije prosječnih troškova $AT$

Izvor: izrada autora.

Dani problem se može zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} \max \quad & V(r,h) = r^2\pi h \\ \text{uz ogr.} \quad & 2\pi r^2 c_1 + 2\pi rhc_2 = c_0, \end{aligned} \tag{28}$$

pri čemu je $r$ polumjer baze spremnika, $h$ visina spremnika, a $V(r,h)$ oznaka za volumen spremnika kao funkcija od $r$ i $h$. Kako se radi o problemu maksimizacije, ideja je odrediti najveću dostižnu konstantnu vrijednost volumena $V$, te pokazati za koje $r$ i $h$ volumen $V$ postiže tu vrijednost. Naime, primjena AG nejednakosti na ograničenje u (28) daje

$$\begin{aligned} & c_0 = 2\pi r^2 c_1 + 2\pi rhc_2 = 2\pi r^2 c_1 + \pi rhc_2 + \pi rhc_2 \geq \\ & \geq 3\cdot\sqrt[3]{2\pi^3 c_1 c_2^2 (r^2 h)^2} = 3\pi\sqrt[3]{2c_1 c_2^2 (V/\pi)^2} = 3(2\pi)^{1/3} c_1^{1/3} c_2^{2/3} V^{2/3}, \end{aligned} \tag{29}$$

odakle slijedi

$$V(r,h) \leq \frac{c_0}{3c_2}\left(\frac{c_0}{6\pi c_1}\right)^{1/3}. \tag{30}$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je

$$2\pi r^2 c_1 = \pi rhc_2. \tag{31}$$

Dakle, maksimalni volumen spremnika iznosi

$$V_{\max} = \frac{c_0}{3c_2}\left(\frac{c_0}{6\pi c_1}\right)^{1/3}, \tag{32}$$

a postiže se za

$$r = \left(\frac{c_0}{6\pi c_1}\right)^{1/2}, \; h = \frac{1}{c_2}\left(\frac{2c_0 c_1}{3\pi}\right)^{1/2}. \tag{33}$$

Vrijednosti u (33) dobiju se uvažavajući relaciju (31) i ograničenje u (28). Uočimo da je funkcija cilja iz (28) funkcija dvije varijable. U problemima optimizacije funkcija dvije ili više varijabli uz ili bez ograničenja, rješenje se uobičajeno traži metodom Lagrangeovih množitelja koja je ilustrirana u dokazu teorema 3. Kao alternativa metodi Lagrangeovih množitelja za rješavanje ovoga problema, primjena AG nejednakosti zamijenila je računanje parcijalnih derivacija odgovarajuće Lagrangeove funkcije, traženje stacionarnih točaka rješavanjem pripadnog sustava jednadžbi, te provjeru definitnosti pripadne Hesseove matrice Lagrangeove funkcije. Kao i u primjeru 7, jednim potezom je određena maksimalna vrijednost volumena spremnika, te je pokazano za koje vrijednosti varijabli $r$ i $h$ se ta maksimalna vrijednost postiže.

# 4. PRIMJENA NEJEDNAKOSTI U RJEŠAVANJU MODELA EKONOMIČNE KOLIČINE NABAVE

Ferišak objašnjava da je planiranje količina nabave usko povezano s planiranjem rokova nabave u okvirima pojedinog načina, odnosno strategije sustava nabavljanja, kako bi se potrebe unutar planskog razdoblja zadovoljile na što ekonomičniji način. Stoga valja istražiti koje će količine nabave omogućiti najniže troškove nabave, dopreme, skladištenja i zaliha uz istodobno zadovoljenje zahtjeva sigurnosti opskrbe (Ferišak, 2006, str. 284). Postoje dvije osnovne skupine u koje se svrstavaju razni modeli izračunavanja ekonomične količine nabave (*economic order quantity*, ili EOQ model). To su klasični EOQ modeli i dinamički EOQ modeli. Dok je u klasičnim modelima cilj optimizirati troškove nabavljanja u uvjetima stabilne potrošnje i stabilnih uvjeta nabave u duljem razdoblju, dinamički EOQ modeli također optimiziraju troškove nabavljanja, ali u uvjetima kolebanja potreba, cijena i drugih uvjeta potrošnje i nabave u planskom razdoblju (Ferišak, 2006, str. 286). U ovome dijelu rada pokazat će se izvod formule za ekonomičnu količinu nabave iz skupine klasičnih EOQ modela. Prvu formulu za izračunavanje ekonomične količine nabave objavio je F. W. Harris davne 1915. godine. Iako je dobivena formula iz EOQ modela izvedena uz jednostavne pretpostavke, to ne umanjuje njezinu primjenu u realnom svijetu. Postoje mnoge situacije u kojima klasičan EOQ model daje dobre rezultate, primjerice u automobilskoj industriji, farmaceutskoj industriji i maloprodajnom sektoru. Prednost EOQ modela je i u tome što daje gotovu, eksplicitnu formulu za optimalnu količinu narudžbe, što uvelike olakšava izračun optimalne količine, kao i mogućnost lakšeg uvida u ponašanje sustava za upravljanje zalihama (Muckstadt, Sapra, 2010, str. 17).

## 4.1. Rješenje klasičnog modela ekonomične količine nabave

Kako bi se odredila optimalna količina narudžbe robe, razvijen je EOQ model. U ovoj točki najprije se promatra pojednostavljeni slučaj modela.

Pretpostavke i oznake u modelu preuzete su iz (Muckstadt, Sapra, 2010, str. 18):

1. Potražnja je neprekidna, uz konstantnu i poznatu stopu $\lambda$ po godini. (Neprekidnost potražnje povlači mogućnost da optimalna količina narudžbe ne mora nužno biti cjelobrojna, no, u primjeni to ne predstavlja veliki problem, jer se zaokruživanjem na prvi veći cijeli broj dolazi do dobrog rješenja sve dok je količina narudžbe dovoljno velika. Slično, pretpostavka da je stopa potražnje neprekidna i konstantna je nerealna. Međutim, model daje dobre rezultate u slučaju relativno stabilne potražnje tijekom vremena.).
2. Svakom narudžbom stvaraju se fiksni troškovi, $K$. Skladištenje svake jedinice zaliha košta $I$ novčanih jedinica po godini po novčanoj jedinici uloženoj u zalihe. Dakle, ako jedinica robe košta $C$ novčanih jedinica, godišnji trošak skladištenja te jedinice robe iznosi $IC$.
3. Isporuka uvijek stiže u poznato i determinirano vrijeme nakon narudžbe. Svi parametri u modelu ostaju nepromijenjeni tijekom vremena.
4. Planski horizont je beskonačno velik.
5. Sva potražnja zadovolji se na vrijeme, bez kašnjenja.

Prema (Muckstadt, Sapra, 2010, str. 19) ukupni troškovi upravljanja zalihama $Z(Q)$, kroz godinu dana iznose

$$Z(Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{ICQ}{2} \tag{34}$$

pri čemu je $Q$ količina robe, $C\lambda$ godišnji trošak kupovine robe, $K\lambda/Q$ godišnji fiksni trošak narudžbi, te $ICQ/2$ godišnji trošak držanja zaliha na skladištu.

Dakle, problem određivanja ekonomične količine nabave u ovome modelu svodi se na minimizaciju funkcije $Z$, odnosno

$$\min_{Q>0} Z(Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{ICQ}{2}. \tag{35}$$

Rješenje: Primijeni li se AG nejednakost na pribrojnike $\frac{K\lambda}{Q}$ i $\frac{ICQ}{2}$ iz (35) slijedi

$$Z(Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{ICQ}{2} \geq C\lambda + 2\sqrt{\frac{1}{2}K\lambda IC}. \tag{36}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{K\lambda}{Q} = \frac{ICQ}{2} \Leftrightarrow Q = \sqrt{\frac{2K\lambda}{IC}}.$$

Dakle, optimalna količina narudžbe iznosi $Q_{\min} = \sqrt{\frac{2K\lambda}{IC}}$, pri čemu su minimalni godišnji troškovi upravljanja zalihama jednaki

$$Z_{\min} = C\lambda + 2\sqrt{\frac{1}{2}K\lambda IC}. \tag{37}$$

### 4.2. Model ekonomične količine nabave uz dozvoljeno ponovno naručivanje

Kao nastavak na model iz prethodne točke, model u ovoj točki (*EOQ model with backordering allowed*) pretpostavlja se da se sva potražnja ne može na vrijeme zadovoljiti, pa su u tu svrhu dozvoljene ponovne narudžbe, koje sa sobom nose dodatne kaznene troškove (Muckstadt, Sapra, 2010, str. 26). Prema (Muckstadt, Sapra, 2010, str. 28) ukupni troškovi upravljanja zalihama $Z(B,Q)$ sada se sastoje od četiri pribrojnika, što vodi na sljedeći problem optimizacije

$$\min_{B,Q>0} Z(B,Q) = C\lambda + \frac{K\lambda}{Q} + \frac{IC(Q-B)^2}{2Q} + \pi\frac{B^2}{2Q}, \tag{38}$$

pri čemu je $Q$ količina robe, $B$ maksimalno dopušten zaostatak robe prije nove narudžbe , $C\lambda$ godišnji trošak kupovine robe, $K\lambda/Q$ godišnji fiksni trošak narudžbe, $IC\frac{(Q-B)^2}{2Q}$

godišnji trošak držanja zaliha na skladištu, $\pi$ godišnji trošak ponovljene narudžbe po jedinici robe, te $\pi\frac{B^2}{2Q}$ kazneni trošak zaostatka, odnosno godišnji trošak ponovljene narudžbe. Za razliku od prethodne točke, funkcija $Z(B,Q)$ je sada funkcija dvije varijable.

Kako bismo riješili problem (38), prvo ćemo funkciju cilja iz (38) ograničiti funkcijom jedne varijable $Z(Q)$ i pritom odrediti optimalnu vrijednost varijable $B$. Funkciju $Z(B,Q)$ iz (38) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned} Z(B,Q) &= C\lambda+\frac{K\lambda}{Q}+\frac{Q}{2}\left[IC\left(1-\frac{B}{Q}\right)^2+\pi\left(\frac{B}{Q}\right)^2\right]\cdot 1= \\ &= C\lambda+\frac{K\lambda}{Q}+\frac{Q}{2}\left[\left(\sqrt{IC}\left(1-\frac{B}{Q}\right)\right)^2+\left(\sqrt{\pi}\left(\frac{B}{Q}\right)\right)^2\right]\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{IC+\pi}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{IC}}{\sqrt{IC+\pi}}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{39}$$

Primjenom CSB nejednakosti na vektore $\left(\sqrt{IC}\left(1-\frac{B}{Q}\right),\sqrt{\pi}\left(\frac{B}{Q}\right)\right)$ i $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{IC+\pi}},\frac{\sqrt{IC}}{\sqrt{IC+\pi}}\right)$, iz prethodne relacije (39), slijedi

$$\begin{aligned} Z(B,Q) &\geq C\lambda+\frac{K\lambda}{Q}+\frac{Q}{2}\left(\frac{\sqrt{IC\pi}}{\sqrt{IC+\pi}}\cdot\left(1-\frac{B}{Q}\right)+\frac{\sqrt{IC\pi}}{\sqrt{IC+\pi}}\cdot\frac{B}{Q}\right)^2= \\ &= C\lambda+\frac{K\lambda}{Q}+\frac{Q}{2}\cdot\frac{IC\pi}{IC+\pi}. \end{aligned} \tag{40}$$

Jednakost u (40) vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{\sqrt{IC}\left(1-\frac{B}{Q}\right)}{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{IC+\pi}}}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{B}{Q}}{\frac{\sqrt{IC}}{\sqrt{IC+\pi}}}, \tag{41}$$

odakle slijedi

$$B=Q\cdot\frac{IC}{\pi+IC}. \tag{42}$$

Nadalje, primjenom AG nejednakosti na pribrojnike $\frac{K\lambda}{Q}$ i $\frac{Q}{2}\cdot\frac{IC\pi}{IC+\pi}$ iz relacije (40) slijedi

$$Z(B,Q)=C\lambda+\frac{K\lambda}{Q}+\frac{Q}{2}\cdot\frac{IC\pi}{IC+\pi}\geq C\lambda+2\sqrt{\frac{K\lambda IC\pi}{2\left(IC+\pi\right)}}. \tag{43}$$

Jednakost u (43) vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{K\lambda}{Q}=\frac{Q}{2}\cdot\frac{IC\pi}{IC+\pi}\quad\Leftrightarrow\quad Q=\sqrt{\frac{2K\lambda(IC+\pi)}{IC\pi}}. \tag{44}$$

Dakle, iz relacije (43) slijedi da minimalni troškovi iznose

$$Z_{\min}=C\lambda+2\sqrt{\frac{K\lambda IC\pi}{2\left(IC+\pi\right)}}, \tag{45}$$

a postižu se za optimalnu količinu narudžbe

$$Q_{\min}=\sqrt{\frac{2K\lambda(IC+\pi)}{IC\pi}}. \tag{46}$$

Iz (42) i (46) slijedi da je optimalni dopušteni zaostatak

$$B_{\text{opt}}=Q_{\min}\cdot\frac{IC}{IC+\pi}=\sqrt{\frac{2K\lambda IC}{(IC+\pi)\pi}}. \tag{46}$$

## 5. ZAKLJUČAK

Upotreba diferencijalnog računa nerijetko vodi na složene međurezultate u postupku rješavanja optimizacijskih problema. Stoga je dobro, kad god se to može, razmotriti druge alternativne metode koje na jednostavniji, možda razumljiviji način rješavaju dani problem. U ovome radu razmatrana je primjena AG i CSB nejednakosti u problemima optimizacije ekonomskih funkcija: minimizacija prosječnih troškova proizvodnje, te izvod eksplicitne formule optimalne količine narudžbe u EOQ modelu. U usporedbi s diferencijalnim računom, prednost korištenja nejednakosti ogleda se u jednostavnosti izračuna stacionarnih točaka i optimalne vrijednosti dane funkcije. Ovaj rad prikladnim ilustrativnim primjerima nastoji objasniti na koji način i u kojim situacijama se nejednakosti mogu primijeniti. Ovakav pristup problemima optimizacije zaobilazi upotrebu složenog aparata matematičke analize, te pruža mogućnost drukčijeg načina rješavanja ekonomskih problema. Nejednakosti spadaju u sadržaj elementarne matematike, razumljiv već i učenicima nižih razreda srednjih škola. Rješavanje problema optimalne količine narudžbe pomoću nejednakosti moglo bi se na prikladan način pokazati već i na srednjoškolskoj razini, što bi dalo određeni doprinos ranijem razvoju afiniteta budućih znanstvenika prema tematici upravljanja zalihama, te drugim ekonomskim problemima.

## LITERATURA

1. Cardenás-Barrón, L. E. (2010) An easy method to derive EOQ and EPQ inventory models with backorders, Computers and Mathematics with Applications, 59, 948 – 952.

2. Cárdenas-Barrón, L. E. (2011) The derivation of EOQ/EPQ inventory models with two backorders costs using analytic geometry and algebra, Applied Mathematical Modelling, 35, 2394 – 2407.
3. Ferišak, V. (2006) Nabava: politika – strategija – organizacija – management. 2. Aktualizirano i dopunjeno izdanje. Vlastita naklada, Zagreb.
4. Garver, R. (1935) The solution of problems in maxima and minima by algebra, The American Mathematical Monthly, 42 (7), 435 – 437.
5. Grubbström, R. W. (1995) Modelling production opportunities – an historical overview, International Journal of Production Economics, 41 (1–3), 1 – 14.
6. Grubbström, R. W. (1996) Material requirements planning and manufacturing resource planning, in: M. Warner (Ed.), International Encyclopedia of Business and Management, Routledge, London. Citirano prema: Cárdenas-Barrón, L. E. (2011) The derivation of EOQ/EPQ inventory models with two backorders costs using analytic geometry and algebra, Applied Mathematical Modelling, 35, 2394 – 2407.
7. Ilišević, I. (2005) Primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowsky-jeve nejednakosti u geometriji, Osječki matematički list, 5, 77 – 84.
8. Ilišević, I. (2009) Primjena AG-nejednakosti u planimetriji, Osječki matematički list, 9, 55 – 68.
9. Ilišević, I. (2012) Primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi, Osječki matematički list, 12, 1 – 10.
10. Muckstadt, J. A., Sapra, A. (2010) Principles of Inventory Management: When You Are Down to Four, Order More. Springer, New York.
11. Neralić, L. (2008) Uvod u matematičko programiranje 1. Element, Zagreb.
12. Neralić, L., Šego, B. (2009) Matematika. Element, Zagreb.
13. Niven, I. (1981) Maxima and minima without calculus, The Dolciani Mathematical Expositions No. 6, The Mathematical Association of America. Citirano prema: Cárdenas-Barrón, L. E. (2011) The derivation of EOQ/EPQ inventory models with two backorders costs using analytic geometry and algebra, Applied Mathematical Modelling, 35, 2394 – 2407.
14. Ouyang, L.-Y., Chang, C.-T., Shum, P. (2012) The EOQ with defective items and partially permissible delay in payments linked to order quantity derived algebraically, Central European Journal of Operations Research, 20 (1), 141 – 160.
15. Teng, J.-T. (2009) A simple method to compute economic order quantities, European Journal of Operational Research, 198, 351 – 353.
16. Wagala Gwanyama, P. (2004) The HM-GM-AM-QM Inequalities, The College Mathematics Journal, 35 (1), 47 – 50.
17. Wee, H.-M. et al. (2013) Solving a finite horizont EPQ problems with backorders, Applied Mathematical Modelling. http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.03.015 [28. 4. 2013.].

# PRILOG:

Dokaz teorema 5. (CSB nejednakosti u slučaju n > 2).

Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da je $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$. Neka je $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$ i $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$. Tada, zbog AG nejednakosti vrijedi

$$1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{B^2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{a_k^2}{A^2} + \frac{b_k^2}{B^2}\right)}_{\substack{\text{primijenimo AG} \\ \text{nejednakost na} \\ \text{ova dva} \\ \text{pribrojnika}}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_k b_k}{AB}, \tag{P1}$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}, \tag{P2}$$

što je ekvivalentno relaciji (18). Jednakost u (P1) vrijedi ako i samo ako je $\frac{a_k^2}{A^2} = \frac{b_k^2}{B^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n.$ Ovim je u potpunosti dokazana CSB nejednakost.