ISSN 1864-6168
UDK 62

DVOFOTONSKI PROCESI U ATOMIMA

TWO-PHOTON PROCESSES IN ATOMS

Marko Stojić

Original scientific paper

Abstract: *A procedure for determining multiphoton probability in atoms is presented using time-dependent perturbation theory. The evolution operator is obtained in the form of infinite order using iterative procedure for solving the Schrödinger equation. By applying the dipole approximation on the operator interaction, the final expressions for the probability of two-photon spontaneous and stimulated emissions are obtained.*

Key words: *time-dependent perturbation theory, probability of transitions, evolution operator, operator interaction, the dipole approximation*

Izvorni znanstveni članak

Sažetak: *Korištenjem vremenskog računa smetnje prikazan je postupak određivanja vjerojatnosti višefotonskih procesa u atomima. Operator evolucije izražen je u obliku beskonačnog reda iterativnim postupkom rješavanja Schrödingerove jednadžbe. Primjenom dipolne aproksimacije u operatoru interakcije dobiveni su konačni izrazi za vjerojatnosti stimulirane i spontane dvofotonske emisije fotona.*

Ključne riječi: *vremenski račun smetnje, vjerojatnost prijelaza, operator evolucije, operator interakcije, dipolna aproksimacija*

1. UVOD

Teorija vremenskog računa smetnje pokazala se vrlo uspješnom u raznim područjima suvremene fizike. Posebno je značajna njena primjena u opisu kvantnomehaničkih sustava pri međudjelovanju s elektromagnetskim poljem.

U ovom radu izložit ćemo slučaj međudjelovanja elektromagnetskog polja s atomom, pri čemu se javljaju složeni višefotonski procesi.

Za opis i razumijevanje ovakvih fizikalnih procesa mogu se koristiti različiti matematički formalizmi. Izbor matematičkog postupka nije od neke posebne važnosti, osim praktične primjene, tj. da se računa brže i jednostavnije.

Operatorski oblik vremenskog računa smetnje predstavlja primjer korisnog i efikasnog matematičkog formalizma koji se vrlo često koristi u kvantnoj mehanici.

Postupak se svodi na postavljanje i rješavanje Schrödingerove jednadžbe u kojoj je vremensko odvijanje stanja iskazano preko operatora evolucije.

Jednadžba se rješava iterativnim postupkom, a operator evolucije dobiva se u obliku beskonačnog reda. U računanju se zadržavaju samo dominantni članovi reda, dok se operator interakcije uzima u dipolnoj aproksimaciji [1-4].

2. VREMENSKI RAČUN SMETNJE

Uzajamno djelovanje elektromagnetskog polja i atoma predočit ćemo hamiltonijanom

$$H = H_A + H_R + V, \qquad (1)$$

gdje H_A opisuje atom, H_R elektromagnetsko polje, a V interakciju između atoma i elektomagnetskog polja.

U vremenskom računu smetnje polazimo od Schrödingerove jednadžbe za stanje $\psi(t)$, tj.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi(t). \qquad (2)$$

Odvijanje stanja može se izraziti preko operatora evolucije $U(t,t_0)$ koji povezuje valnu funkciju u trenutku t_0 i vremenu t, odnosno

$$\psi(t) = U(t,t_0)\psi(t_0), \qquad (3)$$

uz uvjet

$$U(t_0,t_0) = 1. \qquad (4)$$

Iz zahtjeva ortonormiranosti valne funkcije imamo

$$\langle \psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle \psi(t_0)|U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle = 1$$

pa proizlazi da je operator evolucije unitaran, tj.

$$U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0) = 1.$$

Rješenje Schrödingerove jednadžbe (2) svodi se na iznalaženje rješenja jednadžbe za operator evolucije, tj.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = HU(t,t_0). \qquad (5)$$

Ako hamiltonijan H ne ovisi o vremenu, tada jednadžba (5) ima rješenje

$$U(t,t_0) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar}H(t-t_0)\right]. \qquad (6)$$

Analogno za nesmetani hamiltonijan

$$H_0 = H_A + H_R$$

konstruiramo rješenje

$$U^0(t,t_0) = \exp\left[\frac{1}{i\hbar}H_0(t-t_0)\right]. \qquad (7)$$

Poznajući rješenje Schrödingerove jednadžbe za nesmetani hamiltonijan H_0, možemo naći rješenje za hamiltonijan H ako pretpostavimo da je interakcija slaba. U ovom slučaju $U^0(t,t_0)$ zadovoljava jednadžbu (5) kao nulta aproksimacija, tj.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U^0(t,t_0) \approx HU^0(t,t_0). \qquad (8)$$

Na ovaj način možemo $U(t,t_0)$ pisati kao produkt unitarnog operatora $U^0(t,t_0)$ kojeg znamo i $U'(t,t_0)$ kojeg možemo pretpostaviti, dakle

$$U(t,t_0) = U^0(t,t_0)U'(t,t_0). \qquad (9)$$

Što je nulta aproksimacija bolja, to će $U'(t,t_0)$ biti bliži jedinici. Uvrštavajući izraz (9) u jednadžbu (5), dobivamo:

$$\frac{\partial U^0(t,t_0)}{\partial t}U'(t,t_0) + U^0(t,t_0)\frac{\partial U'(t,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)HU^0(t,t_0)U'(t,t_0).$$

Budući da je

$$\frac{\partial U^0(t,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)H_0U^0(t,t_0),$$

pišemo

$$U^0(t,t_0)\frac{\partial U'(t,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)(H-H_0)U^0(t,t_0)U'(t,t_0). \qquad (10)$$

Razlika između smetanog i nesmetanog hamiltonijana je u interakciji V između vanjskog polja i atoma pa je

$$U^0(t,t_0)\frac{\partial U'(t,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)VU^0(t,t_0)U'(t,t_0). \qquad (11)$$

Ako jednadžbu (11) pomnožimo s $U^{0\dagger}(t,t_0)$, dobivamo

$$U^{0\dagger}(t,t_0)U^0(t,t_0)\frac{\partial U'(t,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)\left[U^{0\dagger}(t,t_0)VU^0(t,t_0)\right]U'(t,t_0). \qquad (12)$$

Zbog unitarnosti operatora evolucije bit će

$$\frac{\partial U'(t,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)\left[U^{0\dagger}(t,t_0)VU^0(t,t_0)\right]U'(t,t_0). \qquad (13)$$

Uvođenjem nove oznake

$$V'(t) = U^{0\dagger}(t,t_0)VU^0(t,t_0), \qquad (14)$$

jednadžba (13) poprima oblik

$$\frac{\partial U'(t,t_0)}{\partial t} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)V'(t)U'(t,t_0). \qquad (15)$$

Koristeći rubni uvjet $U'(t_0,t_0)=1,$ dobivamo

$$U'(t,t_0) = 1 + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)\int_{t_0}^{t}V'(\tau)U'(\tau,t_0)\,d\tau. \qquad (16)$$

Ovu integralnu jednadžbu možemo riješiti metodom iteracije, tj.

$$U'(t,t_0) = 1 + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)\int_{t_0}^{t}V'(\tau)\,d\tau + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}V'(\tau_1)\,d\tau_1\int_{t_0}^{\tau_1}V'(\tau_2)\,d\tau_2 + ... \qquad (17)$$

Konačno će biti

$$U'(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}U'^{(n)}(t,t_0), \qquad (18)$$

gdje je

$$U'^{(n)}(t,t_0) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t\rangle\tau_n\rangle\tau_{n-1}\rangle...t_0} d\tau_n d\tau_{n-1}...d\tau_1 V'(\tau_n)V'(\tau_{n-1})...V'(\tau_1). \qquad (19)$$

Pomnoživši jednadžbu (18) s $U^0(t,t_0)$ i primjenivši relacije (9) i (14), dobivamo

$$U(t,t_0) = U^0(t,t_0)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}U^{(n)}(t,t_0)\right], \qquad (20)$$

gdje je

$$U^{(n)}(t,t_0) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t\rangle\tau_n\rangle\tau_{n-1}\rangle...t_0} d\tau_n d\tau_{n-1}...d\tau_1$$
$$U^{0\dagger}(\tau_n,t_0)V(\tau_n)U^0(\tau_n,t_0)U^{0\dagger}(\tau_{n-1},t_0)V(\tau_{n-1})$$
$$U^0(\tau_{n-1},t_0)...U^{0\dagger}(\tau_1,t_0)V(\tau_1)U^0(\tau_1,t_0). \qquad (21)$$

2.1 Određivanje vjerojatnosti prijelaza

Valnu funkciju $\psi(t)$ možemo odrediti poznajući $U(t,t_0)$ pa će biti

$$\psi(t)=U(t,t_0)\psi(t_0).$$

Također ćemo pretpostaviti da nam je poznata funkcija $\psi(t_0)$ koja opisuje stacionarno stanje.

Nesmetani hamiltonijan H_0 ima vlastita stanja: $|a\rangle$, $|b\rangle$…, koja čine ortonormiran sustav s vlastitim vrijednostima E_a, E_b…, tako da je

$$H_0|a\rangle=E_a|a\rangle,$$
$$H_0|b\rangle=E_b|b\rangle, \qquad (22)$$

pri čemu je

$$\langle a|b\rangle=\delta_{ab}. \qquad (23)$$

Neka se naš sustav u trenutku $t=t_0$ nalazi u stanju $|a\rangle$, tj. $\psi(t_0)=|a\rangle$. Nastupanjem interakcije elektrona s fotonom sustav može prijeći u neko drugo stanje.

Vjerojatnost prijelaza iz stanja $|a\rangle$ u stanje $|b\rangle$ u vremenskom intervalu $\Delta t=t-t_0$ izražena je kvadratom amplitude prijelaza

$$P_{ab}^{(n)}=\left|\langle b|U(t,t_0)|a\rangle\right|^2. \qquad (24)$$

Koristeći relaciju (20), jednadžba (24) postaje

$$P_{ab}^{(n)}=\left|\langle b|U^0(t,t_0)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}U^{(n)}(t,t_0)\right]|a\rangle\right|^2. \qquad (25)$$

Budući da je za $a\neq b$

$$\langle b|U^0(t,t_0)|a\rangle=0, \qquad (26)$$

vjerojatnost prijelaza (25) poprima oblik

$$P_{ab}^{(n)}=\left|\langle b|U^0(t,t_0)\sum_{n=1}^{\infty}U^{(n)}(t,t_0)|a\rangle\right|^2. \qquad (27)$$

Uvođenjem nove oznake

$$U_{ab}^{(n)}=\langle b|U^0(t,t_0)\sum_{n=1}^{\infty}U^{(n)}(t,t_0)|a\rangle, \qquad (28)$$

vjerojatnost (27) uobičajeno pišemo

$$P_{ab}^{(n)}=\left|U_{ab}^{(n)}\right|^2. \qquad (29)$$

Amplituda vjerojatnosti prijelaza u najnižem stupnju računa smetnje, tj. za za $n=1$ glasi:

$$U_{ab}^{(1)}=\left(\frac{1}{i\hbar}\right)\langle b|U^0(t,t_0)$$
$$\int_{t_0}^{t}U^{0\dagger}(\tau,t_0)V(\tau)U^0(\tau,t_0)d\tau|a\rangle. \qquad (30)$$

Korištenjem relacije (7), jednadžbu (30) pišemo u obliku

$$U_{ab}^{(1)}=\left(\frac{1}{i\hbar}\right)\int_{t_0}^{t}\langle b|\exp\left[\frac{1}{i\hbar}H_0(t-\tau)\right]$$
$$V(\tau)\exp\left[\frac{1}{i\hbar}H_0(\tau-t_0)\right]d\tau|a\rangle. \qquad (31)$$

Na isti način za $n=2$ dobivamo

$$U_{ab}^{(2)}=\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\langle b|\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_2}\exp\left[\frac{1}{i\hbar}H_0(t-\tau_2)\right]V(\tau_2)$$
$$\exp\left[\frac{1}{i\hbar}H_0(\tau_2-\tau_1)\right]V(\tau_1)\exp\left[\frac{1}{i\hbar}H(\tau_1-t_0)\right]d\tau_2 d\tau_1|a\rangle. \qquad (32)$$

Pošto su hamiltonijani H i H_0 neovisni o vremenu, i operator interakcije bit će neovisan o vremenu, tj.

$$V(\tau)=V. \qquad (33)$$

Uvođenjem potpunog skupa vlastitih stanja hamiltonijana H_0

$$\sum_{\mu}|\mu\rangle\langle\mu|=1 \qquad (34)$$

i korištenjem svojstava (22), jednadžba (32) postaje

$$U_{ab}^{(2)}=\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\sum_{\mu}V_{b\mu}V_{\mu a}\int_{t_0}^{t}d\tau_2\int_{t_0}^{\tau_2}\exp\left[-i\omega_b(t-\tau_2)-i\omega_\mu\tau_2-i\omega_a t_0\right]$$
$$\exp\left[-i(\omega_a-\omega_\mu)\tau_1\right]d\tau_1, \qquad (35)$$

gdje su:

$$V_{b\mu}=\langle b|V|\mu\rangle, \qquad V_{\mu a}=\langle\mu|V|a\rangle,$$
$$\omega_b=\frac{E_b}{\hbar}, \qquad \omega_a=\frac{E_a}{\hbar}, \qquad \omega_\mu=\frac{E_\mu}{\hbar}. \qquad (36)$$

Uzimanjem $t_0=0$ jednadžba (35) poprima nešto jednostavniji oblik:

$$U_{ab}^{(2)}=\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\sum_{\mu}V_{b\mu}V_{\mu a}\int_{0}^{t}d\tau_2$$
$$\int_{0}^{\tau_2}\exp\left[-i\omega_b t-i(\omega_\mu-\omega_b)\tau_2-i(\omega_a-\omega_\mu)\tau_1\right]d\tau_1. \qquad (37)$$

Nakon integriranja gornje jednadžbe dobivamo:

$$U_{ab}^{(2)}=\left(\frac{1}{\hbar}\right)^2\sum_{\mu}\frac{V_{b\mu}V_{\mu a}}{\omega_\mu-\omega_a}$$
$$\exp(-i\omega_b t)\frac{\exp i(\omega_b-\omega_a)t-1}{\omega_b-\omega_a}. \qquad (38)$$

Vjerojatnost procesa u jedinici vremena bit će

$$W_{ab}^{(2)})=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left|U_{ab}^{(2)}\right|^2. \qquad (39)$$

Uvrštavanjem izraza (38) u relaciju (39) dobivamo

$$W_{ab}^{(2)}=\left(\frac{1}{\hbar}\right)^4\left|\sum_{\mu}\frac{V_{b\mu}V_{\mu a}}{\omega_\mu-\omega_a}\right|^2 2\lim_{t\to\infty}\frac{1-\cos(\omega_b-\omega_a)t}{(\omega_b-\omega_a)^2 t}. \qquad (40)$$

Korištenjem reprezentacije δ funkcije u obliku

$$\delta(\omega_b-\omega_a)=\frac{1}{\pi}\lim_{t\to\infty}\frac{1-\cos(\omega_b-\omega_a)t}{(\omega_b-\omega_a)^2 t}, \qquad (41)$$

izraz (40) postaje

$$W_{ab}^{(2)}=\left(\frac{1}{\hbar}\right)^4\left|\sum_{\mu}\frac{V_{b\mu}V_{\mu a}}{\omega_\mu-\omega_a}\right|^2 2\pi\delta(\omega_b-\omega_a). \qquad (42)$$

Analognim postupkom možemo doći i do izraza za vjerojatnost procesa N-toga reda u vremenskom računu smetnje, tj.

$$W_{ab}^{(N)}=\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{2N}$$

$$\left|\sum_{\mu_{N-1},\mu_{N-2},\dots,\mu_1}\frac{V_{b\mu_{N-1}}V_{\mu_{N-1}\mu_{N-2}}\dots V_{\mu_1 a}}{(\omega_{\mu_{N-1}}-\omega_a)\dots(\omega_{\mu_1}-\omega_a)}\right|^2 2\pi\delta(\omega_b-\omega_a). \qquad (43)$$

3. DVOFOTONSKI PROCESI

Određivanje vjerojatnosti dvofotonskih procesa počet ćemo uvođenjem operatora interakcije elektrona s elektromagnetskim poljem. Operator interakcije dan je izrazom

$$V=-\frac{e}{cm}pA(\vec{r}), \qquad (44)$$

gdje su: $A(\vec{r})$ vektorski potencijal, p operator količine gibanja, e naboj elektrona, m masa elektrona i c brzina svjetlosti. Vektorski potencijal $A(\vec{r})$ ima oblik

$$A(\vec{r})=\sum_k\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k L^3}}\,\overrightarrow{\varepsilon_k}$$

$$\left[a_k\exp(i\vec{k}\vec{r})+a_k^{\dagger}\exp(-i\vec{k}\vec{r})\right], \qquad (45)$$

u kojem $\overrightarrow{\varepsilon_k}$ predstavlja vektor polarizacije, dok su $a_k^{\dagger}$ i a_k operatori stvaranja i poništenja fotona. Uvrštavanjem vektorskog potencijala (45) u jednadžbu (44), operator interakcije poprima oblik

$$V=-\sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{m^2L^3}}\sum_k p\overrightarrow{\varepsilon_k}$$

$$\left[a_k\exp(i\vec{k}\vec{r})+a_k^{\dagger}\exp(-i\vec{k}\vec{r})\right]\frac{1}{\sqrt{\omega_k}}. \qquad (46)$$

Uvođenjem dipolne aproksimacije, tj. uzimanjem samo prvog člana razvojnog reda eksponencijalnih funkcija, vektorski potencijal postaje znatno jednostavniji:

$$V=-\zeta\sum_k p\overrightarrow{\varepsilon_k}\left(a_k+a_k^{\dagger}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega_k}}, \qquad (47)$$

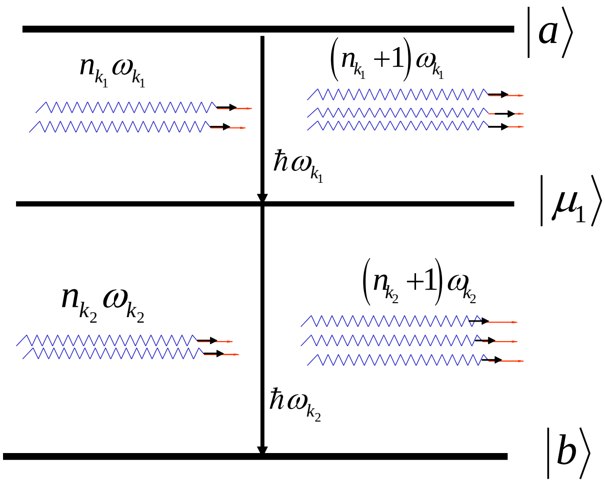
gdje je

$$\zeta=-\sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{m^2L^3}}.$$

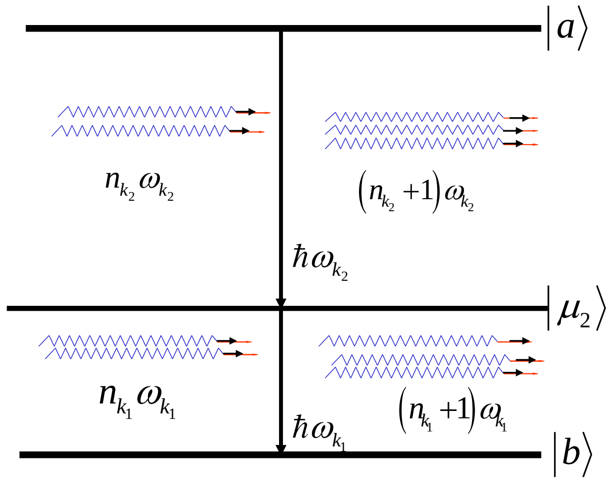
Ova aproksimacija je razumljiva jer je doprinos drugih članova u razvoju eksponencijalnih funkcija mali. Tako npr. za područje vidljive svjetlosti $\lambda\approx10^{-6}$ m, uz dimenzije atoma $a\approx10^{-10}$ m, proizlazi da je produkt $|\vec{k}\cdot\vec{r}|\approx10^{-3}$.

Da bismo izračunali matrične elemente dvofotonskih procesa potrebno je konstruirati valne funkcije. Pošto se radi o stanjima fotona i vlastitim stanjima elektrona u atomu, valna će funkcija biti produkt valnih funkcija stanja elektrona i fotonskih stanja.

Ako se atom nalazi u polju fotona frekvencija ω_{k1} i ω_{k2}, onda je moguća emisija ili apsorpcija fotona preko dva međustanja (slike 1. i 2.).



Slika 1. Dvofotonska emisija preko međustanja $|\mu_1\rangle$



Slika 2. Dvofotonska emisija preko međustanja $|\mu_2\rangle$

Valne funkcije početnog i konačnog stanja bit će:

$$|a\rangle=|f\rangle|\dots n_{k_1},\dots n_{k_2},\dots\rangle,$$

$$|b\rangle=|g\rangle|\dots n_{k_1}+1,\dots n_{k_2}+1,\dots\rangle, \qquad (48)$$

dok su valne funkcije međustanja

$$\left|\mu_1\right\rangle = \left|c_1\right\rangle \left|...n_{k_1}+1,...n_{k_2},...\right\rangle,$$
$$\left|\mu_2\right\rangle = \left|c_2\right\rangle \left|...n_{k_1},...n_{k_2}+1,...\right\rangle. \quad (49)$$

Djelovanjem operatora stvaranja i poništenja čestica na valne funkcije fotonskih stanja imamo:

$$a_k^{\dagger}\left|...n_{k_1},...\right\rangle = \sqrt{n_{k_1}+1}\left|...n_{k_1}+1,...\right\rangle,$$
$$a_k\left|...n_{k_1},...\right\rangle = \sqrt{n_{k_1}}\left|...n_{k_1}-1,...\right\rangle. \quad (50)$$

Vjerojatnost dvofotonskog procesa za slučaj emisije preko međustanja $\left|\mu_1\right\rangle$ i $\left|\mu_2\right\rangle$ bit će:

$$W_{ab}^{(2)} = \left(\frac{1}{\hbar}\right)^4 \left|\sum_c \frac{V_{b\mu_1}V_{\mu_1 a}}{\omega_{\mu_1}-\omega_a} + \frac{V_{b\mu_2}V_{\mu_2 a}}{\omega_{\mu_2}-\omega_a}\right|^2 2\pi\delta\left(\omega_b-\omega_a\right). (51)$$

Matrične elemente u sumaciji možemo izračunati koristeći operator smetnje:

$$V_{b\mu_1} = -\zeta\sum_{k_2}\sqrt{n_{k_2}+1}\left\langle g\,|\,p\overrightarrow{\varepsilon_{k_2}}\,|c_1\right\rangle \frac{1}{\sqrt{\omega_{k_2}}}. \quad (52)$$

Budući da je

$$\left\langle g\,|\,p\overrightarrow{\varepsilon_{k_2}}\,|c_1\right\rangle = im\omega_{k_2}\left\langle g\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_2}}\,|c_1\right\rangle, \quad (53)$$

uvrštavanjem u (52) imamo

$$V_{b\mu_1} = -im\zeta\sum_{k_2}\sqrt{\left(n_{k_2}+1\right)\omega_{k_2}}\left\langle g\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_2}}\,|c_1\right\rangle. \quad (54)$$

Analogno dobivamo i ostale matrične elemente:

$$V_{\mu_1 a} = -im\zeta\sum_{k_1}\sqrt{\left(n_{k_1}+1\right)\omega_{k_1}}\left\langle c_1\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_1}}\,|\,f\right\rangle,$$
$$V_{b\mu_2} = -im\zeta\sum_{k_1}\sqrt{\left(n_{k_1}+1\right)\omega_{k_1}}\left\langle g\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_1}}\,|c_2\right\rangle,$$
$$V_{\mu_2 a} = -im\zeta\sum_{k_1}\sqrt{\left(n_{k_2}+1\right)\omega_{k_2}}\left\langle c_2\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_2}}\,|\,f\right\rangle. \quad (55)$$

Razliku frekvencija u izrazu (51) prikazat ćemo koristeći relacije:

$$\omega_a = \omega_f + n_{k_1}\omega_{k_1} + n_{k_2}\omega_{k_2},$$
$$\omega_b = \omega_g + \left(n_{k_1}+1\right)\omega_{k_1} + \left(n_{k_2}+1\right)\omega_{k_2},$$
$$\omega_{\mu_1} = \omega_{c_1} + \left(n_{k_1}+1\right)\omega_{k_1} + n_{k_2}\omega_{k_2},$$
$$\omega_{\mu_2} = \omega_{c_2} + n_{k_1}\omega_{k_1} + \left(n_{k_2}+1\right)\omega_{k_2}. \quad (56)$$

Na ovaj način vjerojatnost dvofotonske emisije (51) poprima oblik:

$$W_{ab}^{(2)} = \left(\frac{m\xi}{\hbar}\right)^4 \sum_{k_1,k_2}\left(n_{k_1}+1\right)\left(n_{k_2}+1\right)\omega_{k_1}\omega_{k_2}$$
$$\left|M^{(2)}\right|^2 2\pi\delta\left(\omega_{fg}-\omega_{k_1}-\omega_{k_2}\right), \quad (57)$$

pri čemu je

$$\left|M^{(2)}\right|^2 = \left|\sum_c \frac{\left\langle g\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_2}}\,|c\right\rangle\left\langle c\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_1}}\,|\,f\right\rangle}{\omega_{cf}+\omega_{k_1}} + \frac{\left\langle g\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_1}}\,|c\right\rangle\left\langle c\,|\vec{r}\,\overrightarrow{\varepsilon_{k_2}}\,|\,f\right\rangle}{\omega_{cf}+\omega_{k_2}}\right|^2,$$

gdje su

$$\omega_{fg} = \omega_f - \omega_g,$$
$$\omega_{cf} = \omega_c - \omega_f.$$

Sumacija po valnim vektorima k_1 i k_2 može se zamijeniti integralom. Odredit ćemo broj fotona koji se nalaze u kocki dimenzija L, pri čemu je L znatno veći od dimenzija atoma i valne duljine fotona, tj.:

$$L = n_x\lambda_x = 2\pi n_x\frac{\lambda_x}{2\pi} = 2\pi\frac{n_x}{k_x},$$
$$L = n_y\lambda_y = 2\pi n_y\frac{\lambda_y}{2\pi} = 2\pi\frac{n_y}{k_y},$$
$$L = n_z\lambda_z = 2\pi n_z\frac{\lambda_z}{2\pi} = 2\pi\frac{n_z}{k_z}. \quad (58)$$

Svakoj točki u prostoru s koordinatama n_x, n_y, n_z, odgovara valni vektor u „*k*-prostoru". Veza između ova dva prostora dana je relacijom

$$dn = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2 dk d\Omega, \quad (59)$$

gdje je Ω prostorni kut .

Zamjenom $k = \dfrac{\omega}{c}$ u gornji izraz imamo

$$dn = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{\omega^2}{c^3} d\omega d\Omega. \quad (60)$$

Gustoća stanja po jediničnoj frekvenciji za jedan smjer polarizacije bit će

$$\rho(\omega)_{\varepsilon=1} = \frac{dn}{d\omega} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{\omega^2}{c^3}\int_\Omega d\Omega,$$

odnosno

$$\rho(\omega)_{\varepsilon=1} = \frac{dn}{d\omega} = 4\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{\omega^2}{c^3}. \quad (61)$$

Ako uzmemo u obzir i drugi smjer polarizacije (drugog fotona), gustoća će biti

$$\rho(\omega)_{\varepsilon=1,2} = \frac{dn}{d\omega} = 8\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{\omega^2}{c^3}, \quad (62)$$

odnosno

$$\rho\left(\omega_{k_1}\right)d\omega_{k_1}=\rho\left(\omega_1\right)d\omega_1=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{L}{c}\right)^3\omega_1^2d\omega_1,$$

$$\rho\left(\omega_{k_1}\right)d\omega_{k_2}=\rho\left(\omega_2\right)d\omega_2=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{L}{c}\right)^3\omega_2^2d\omega_2. \qquad (63)$$

Primjenom izraza (63) možemo sumaciju (57) zamijeniti integralom. S obzirom na to da pri dvofotonskim procesima ne brinemo o redoslijedu fotona (prvi foton-drugi foton), prijelazom na integriranje moramo dobivenu vjerojatnost podijeliti s 2. Nakon kraćeg sređivanja dobivamo:

$$W_{ab}^{(2)}=\frac{1}{2}(2\pi)^3\left(\frac{e^4}{\hbar^2}\right)\left(\frac{1}{c^6\pi^4}\right)(n_1+1)(n_2+1)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\omega_1^3\omega_2^3d\omega_1d\omega_2\left|M^{(2)}\right|^2\delta\left(\omega_{fg}-\omega_1-\omega_2\right). \qquad (64)$$

Koristeći poznato svojstvo delta funkcija

$$\int f\left(\omega_b\right)\delta\left(\omega_b-\omega_a\right)d\omega_b=f\left(\omega_a\right) \qquad (65)$$

i imajući u vidu da je $\omega_{fg}-\omega_1=\omega_2$, izraz (64) pišemo u obliku:

$$W_{ab}^{(2)}=\frac{1}{2}(2\pi)^3\left(\frac{e^4}{\hbar^2}\right)\frac{1}{c^6\pi^4}(n_1+1)(n_2+1)$$

$$\int_0^\infty\left|M^{(2)}\right|^2\omega_1^3\omega_2^3d\omega_1. \qquad (66)$$

Zamjenom $\omega_1=2\pi\nu_1$, $\omega_2=2\pi\nu_2$ u gornju jednadžbu konačno će biti:

$$W_{ab}^{(2)}=\frac{1}{2}\frac{2^{10}\pi^6}{c^6}\left(\frac{e^4}{\hbar^2}\right)(n_1+1)(n_2+1)$$

$$\int_0^\infty\left|M^{(2)}\right|^2\nu_1^3\nu_2^3d\nu_1. \qquad (67)$$

Iz dobivenog izraza zaključujemo da vjerojatnost dvofotonske emisije postoji i kad je $n_1=n_2=0$. To je onda slučaj spontane emisije čija je vjerojatnost

$$W_{ab}^{(2)}=\frac{1}{2}\frac{2^{10}\pi^6}{c^6}\left(\frac{e^4}{\hbar^2}\right)\int_0^\infty\left|M^{(2)}\right|^2\nu_1^3\nu_2^3d\nu_1, \qquad (68)$$

dok je stimulirana emisija oblika:

$$W_{ab}^{(2)}=\frac{1}{2}\frac{2^{10}\pi^6}{c^6}\left(\frac{e^4}{\hbar^2}\right)(n_1n_2+n_1+n_2)$$

$$\int_0^\infty\left|M^{(2)}\right|^2\nu_1^3\nu_2^3d\nu_1 \qquad (69)$$

Na ovaj način dobili smo konačne izraze za vjerojatnost dvofotonskog procesa promatranjem emisije fotona [5-9]. Do sličnog rezultata došli bi i promatranjem apsorpcije. Računanjem se pokazuje da je razlika samo u članu koji iskazuje broj fotona, tako da se umjesto produkta $(n_1+1)(n_2+1)$ javlja produkt n_1n_2.

4. ZAKLJUČAK

Procesi višega reda s istodobnim sudjelovanjem više fotona u pobuđivanju, raspršenju i ionizaciji atoma imaju veliku važnost u modernoj fizici. Zbog toga višefotonski procesi predstavljaju stalan interes fizičara u svijetu. Razlozi za ovu vrstu istraživanja su višestruki: od preispitivanja nekih osnovnih postavki kvantne mehanike i elektrodinamike, do mogućnosti višefotonske spektroskopije.

Teorija vremenskog računa smetnje pokazala se prikladnom u opisu ovakvih procesa. Primjenom ove teorije, uz korištenje dipolne aproksimacije, dobiveni su konačni izrazi za vjerojatnosti spontane i stimulirane dvofotonske emisije. Iako dobiveni izrazi za računanje vjerojatnosti imaju relativno jednostavan oblik, oni u sebi kriju velike poteškoće pri računanju.

Glavni problem javlja se kod provođenja beskonačne sumacije po međustanjima u izrazu $M^{(2)}$. Za rješavanje ovog problema razvijeno je više matematičkih metoda koje ćemo prikazati u idućem radu.

5. LITERATURA

[1] M. Göppert-Mayer, Ann.Phys. (Leipzig) **9** (1931.) 273

[2] G. Breit i Teller, Astrophys. J. **91,** 215 (1940.).

[3] H. A. Bethe i E. E. Salpeter , Handbuch der Physik, Band XXXV, Springer-Verlag **88** (1957.)

[4] A. Messiah, Quantum Mechanics II, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1961.)

[5] G. W. F. Drake i S. P. Goldman, Phys. Rev. A **23**, 2093 (1981.)

[6] V. Florescu, Phys. Rev. **A 30**, 2441, (1984.)

[7] J.P. Santos, E Parente, i P. Indelicato, Eur. Phys. J. D **3**, 43 (1998.)

[8] M. Martinis i M. Stojić, Fizika A **9** (2000.) 3, 115-128.

[9] U. D. Jentschura, J. Phys A **40**, F223 (2007.)

Kontakt autora:

dr.sc. Marko Stojić
Veleučilište u Varaždinu
J. Križanića 33, 42000 Varaždin
mstojic@velv.hr