ISSN 1864-6168
UDK 62

POOPĆENJA PITAGORINOG POUČKA

GENERALIZATION OF THE PYTHAGOREAN THEOREM

Damira Keček, Ana Poldrugač, Predrag Vuković

Stručni članak

Sažetak: *U radu je predstavljen jedan od najstarijih matematičkih poučaka, Pitagorin poučak. Izvedena su njegova tri prostorna analogona te su izložena poopćenja ovoga poučka u ravnini i prostoru.*

Ključne riječi: *Pitagorin poučak, prostorni analogon Pitagorinog poučka, poopćenje Pitagorinog poučka*

Professional paper

Abstract: *This paper presents one of the oldest theorems of mathematics, the Pythagorean theorem. Three spatial analogues of the Pythagorean theorem are derived and generalizations of the Pythagorean theorem in the plane and space are exposed.*

Keywords: *Pythagorean theorem, spatial analogues of the Pythagorean theorem, generalization of Pythagorean theorem*

1. UVOD

Shvaćanje brojeva kao tajanstvenih simbola svega što je u svijetu i u čovjeku imalo je svoje korijene već u antici. I danas se nailazi na te pojave kao što je strah od "nesretnog" broja 13. Učenja o tajanstvenim svojstvima brojeva vezana su naročito za čuvenu matematičku školu Staroga vijeka, koju je u 6. stoljeću prije naše ere osnovao Pitagora. Za Pitagorejce, tj. one koji su usvajali Pitagorina učenja i pripadali njegovoj školi, broj je bio nešto što stvarno postoji, baš kao što postoje fizička tijela, nešto od čega je stvoren ovaj naš svijet. Brojevi prema njihovom učenju ne izražavaju samo oblike svemira, nego i njegovu materiju. Pitagorejsko proučavanje brojeva počelo je kao duhovno traganje. Prema njihovu je mišljenju svaki broj imao svoj simbolički identitet. Broj jedan je bio stvoritelj svih brojeva, budući da se višestrukim dodavanjem od broja jedan može napraviti bilo koji drugi broj. Stoga je broj jedan imao poseban status i nije se smatrao brojem u istom smislu kao i ostali brojevi. Broj dva odnosio se na ženski, broj tri na muški lik, a broj pet na njihovo jedinstvo. Pet je također bio broj pravilnih poliedara, geometrijskih tijela čije su sve stranice identični pravilni mnogokuti. Pravilni su poliedri tetraedar, sa četiri jednakostranična trokuta, kocka (šest kvadrata), oktaedar (osam trokuta), dodekaedar (dvanaest peterokuta) i ikozaedar (dvadeset trokuta). Tih pet geometrijskih tijela prema Pitagorejcima predstavlja pet elemenata za koje se vjerovalo da tvore svemir: vatru, zemlju, zrak, vodu i nebeski svod koji ih sve okružuje. Stoga je tih pet geometrijskih tijela imalo gotovo status svetosti i prikazani u obliku pentagrama postali su pitagorejski emblem. Iako su ova otkrića bila vrlo važna, zasjenjuju ih druga dva događaja koja su uvelike odredila budući smjer razvoja matematike: Pitagorin dokaz poznatog poučka koji nosi njegovo ime, te otkriće nove vrste brojeva koji se ne mogu zapisati kao omjer dvaju cijelih brojeva, a nazvani su iracionalnim brojevima. Pitagorin poučak i njegova primjena bila je tema diplomskog rada [1] koji je pridonio izradi ovog članka. Pitagorin poučak počinje s prirodnim brojevima, a završava spominjanjem iracionalnih brojeva. Zašto? Iz vrlo jednostavnog razloga. Pomoću Pitagorinog poučka može se odrediti duljina dijagonale jediničnog kvadrata. Ova dijagonala ima duljinu $\sqrt{2}$ i dobro se zna da se taj broj ne može zapisati kao omjer prirodnih brojeva. Tu činjenicu Pitagorejci su vrlo teško prihvatili. Za detalje pogledati npr. u [2].

Ovaj članak je koncipiran na sljedeći način. U drugom dijelu članka dani su prostorni analogoni Pitagorinog poučka. Treći dio govori o raznim poopćenjima Pitagorinog poučka i predstavlja najvažniji dio članka. Ova poopćenja se zasigurno mogu primijeniti u raznim tehničkim znanostima (npr. elektrotehnika i građevinarstvo).

2. PROSTORNI ANALOGONI PITAGORINOG POUČKA

Pravokutni trokut može se promatrati na tri različita načina: kao polovica pravokutnika, kao trokut kojemu su stranice iz jednog vrha okomite te kao trokut čije dvije okomite stranice tvore otvorenu izlomljenu liniju. Ovakav pogled na pravokutni trokut vodi analogiji s tri prostorna tijela.

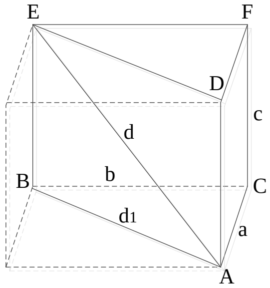
1) Promatra li se pravokutni trokut kao polovica pravokutnika, njegov analogon bit će polovica kvadra, tj. uspravna trostrana prizma (slika 1.) kojoj je osnovka pravokutni trokut.
2) Promatra li se pravokutni trokut kao trokut kojemu su stranice iz jednog vrha okomite, njegov analogon bit će tetraedar (slika 2.) kojemu su bridovi iz jednog vrha međusobno okomiti.
3) Promatra li se pravokutni trokut kao trokut čije dvije okomite stranice tvore otvorenu izlomljenu liniju, njegov analogon je tetraedar omeđen pravokutnim trokutima.

S obzirom na to da postoje tri prostorna analogona pravokutnog trokuta, postoje i odgovarajuće relacije analogne Pitagorinom poučku. U nastavku su promatrana redom sva tri prostorna analogona Pitagorinog poučka [3].

2.1. Prvi prostorni analogon Pitagorinog poučka

Teorem 2.1. *Neka je ABCDEF trostrana prizma dobivena dijagonalnim presjekom kvadra i neka je* $a=\left|\overline{CA}\right|$, $b=\left|\overline{CB}\right|$, $c=\left|\overline{CF}\right|$, $d_1=\left|\overline{AB}\right|$, $d=\left|\overline{AE}\right|$. *Tada vrijedi*

$$d^2=a^2+b^2+c^2. \tag{1}$$



Slika 1. Trostrana prizma

Dokaz: Iz pravokutnog trokuta ΔABE i ΔABC dobiva se

$$d^2=d_1^2+c^2,$$
$$d_1^2=a^2+b^2,$$

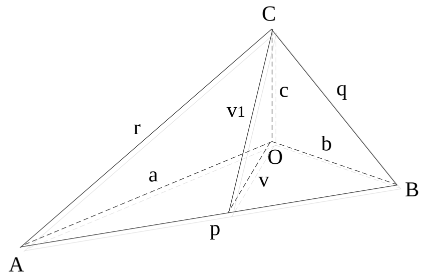
a odavde proizlazi $d^2=a^2+b^2+c^2$. Relacija (1) izražava vezu duljine dijagonale polaznog kvadra i duljina njegovih bridova iz jednog vrha te je ona prvi prostorni analogon Pitagorinog poučka.

2.2. Drugi prostorni analogon Pitagorinog poučka

Teorem 2.2. *Neka je OABC tetraedar kod kojeg su plošni kutovi kod vrha O pravi. Duljine bridova koji izlaze iz vrha O označimo s a, b, c, a duljine ostalih triju bridovima s p, q, r. Kvadrat površine strane nasuprot vrhu s pravim kutovima jednak je zbroju kvadrata preostalih triju površina, tj.*

$$P^2(\Delta ABC)=P^2(\Delta OAC)+P^2(\Delta OBC)+P^2(\Delta OAB), \tag{2}$$

$$p=\sqrt{a^2+b^2},\ q=\sqrt{b^2+c^2},\ r=\sqrt{a^2+c^2}.$$



Slika 2. Tetraedar

Dokaz: Površine pravokutnih trokuta $\Delta OAB, \Delta OBC$ i ΔOAC su redom $P(\Delta OAB)=\dfrac{ab}{2}$, $P(\Delta OAC)=\dfrac{ac}{2}$, $P(\Delta OBC)=\dfrac{bc}{2}$ pa su njihovi kvadrati redom $P^2(\Delta OAB)=\dfrac{a^2b^2}{4}$, $P^2(\Delta OAC)=\dfrac{a^2c^2}{4}$, $P^2(\Delta OBC)=\dfrac{b^2c^2}{4}$.

Može se uočiti da je visina v trokuta ΔOAB iz vrha O jednaka $v=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, a da je visina v_1 trokuta ΔABC iz vrha C dana s $v_1^2=c^2+v^2=c^2+\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. Stoga je

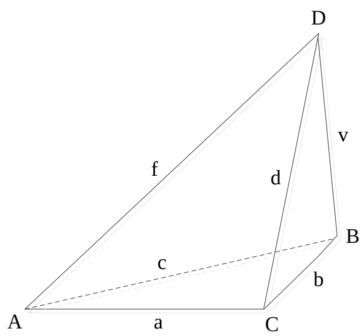
$$P^2(\Delta ABC)=\frac{1}{4}p^2v_1^2=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(a^2c^2+b^2c^2+a^2b^2\right)$$
$$=P^2(\Delta OAC)+P^2(\Delta OBC)+P^2(\Delta OAB)$$

Relacija (2) drugi je prostorni analogon Pitagorinog poučka. Ista se može izvesti i primjenom Heronove formule na trokut ΔABC.

2.3. Treći prostorni analogon Pitagorinog poučka

Teorem 2.3. *Neka je ABCD tetraedar kojemu su bridovi* $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ *duljina a, b, v u parovima okomiti i neka su c, d i f duljine ostalih bridova. Ako su* P_A, P_B, P_C, P_D *površine strana tetraedra nasuprot vrhova A, B, C, D tada vrijedi*

$$P_A^2-P_C^2+P_B^2-P_D^2=0. \tag{3}$$



Slika 3. Tetraedar

U ovom slučaju nije lako naći vezu među površinama. Kada se površine kvadriraju dobiva se:

$$P_A^2 = \frac{1}{4} b^2 v^2,$$

$$P_B^2 = \frac{1}{4} a^2 d^2 = \frac{1}{4} a^2 (v^2 + b^2) = \frac{1}{4} a^2 v^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2,$$

$$P_C^2 = \frac{1}{4} v^2 c^2 = \frac{1}{4} a^2 v^2 + \frac{1}{4} b^2 v^2,\ P_D^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2.$$

Detaljnijim proučavanjem ovih jednakosti veza među promatranim površinama glasi: $P_A^2 - P_C^2 + P_B^2 - P_D^2 = 0$.

Relacija (3) treći je prostorni analogon Pitagorinog poučka, a ovdje je zapisan u ekvivalentnom implicitnom obliku kao $a^2 - c^2 + b^2 = 0$.

3. POOPĆENJA PITAGORINOG POUČKA

3.1. Kosinusov poučak

Iako je Pitagorin poučak specijalan slučaj kosinusovog poučka, često se koristi za njegovo dokazivanje. Zbog toga se u nastavku daje dokaz koji se temelji na definiciji kosinusa kuta te se nakon toga pokazuje postupak prelaska kosinusovog poučka u Pitagorin.

Teorem 3.1. *Kvadrat duljine jedne stranice trokuta jednak je zbroju kvadrata duljina drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki produkt duljina tih stranica i kosinusa kuta kojeg one određuju, tj. u bilo kojem trokutu vrijedi:*

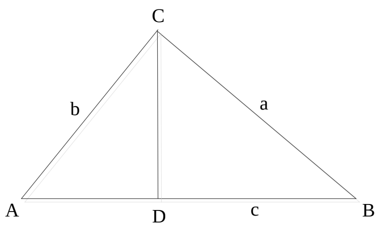
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad (4)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \quad (5)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \quad (6)$$

Dokaz: Neka je D nožište visine iz vrha C trokuta ΔABC. Iz pravokutnog trokuta ΔADC i ΔBDC dobiva se

$$|AD| = b\cos\alpha,\ |BD| = a\cos\beta.$$



Slika 4. Trokut *ABC*

Kako je $c = |AB| = |AD| + |BD|$, to je

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta \quad (7)$$

i analogno

$$a = c\cos\beta + b\cos\gamma \quad (8)$$

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha \quad (9)$$

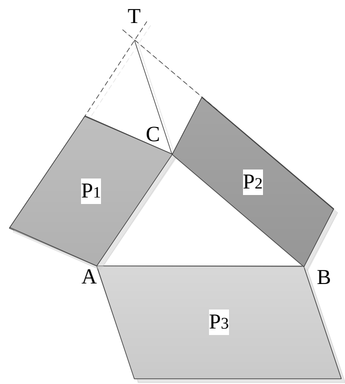
Pomnoži li se prva od ovih jednakosti s $(-c)$, a druga s a i treća s $(-b)$, nakon zbrajanja dobiva se (4). Na sličan način dobivaju se preostale dvije jednakosti (vidi [4]).

Za $\gamma = \frac{\pi}{2}$, zbog $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, jednakost $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ prelazi u Pitagorin poučak $c^2 = a^2 + b^2$, iz čega se vidi da je kosinusov poučak poopćenje Pitagorinog poučka na proizvoljan trokut.

3.2. Poopćenja Papusa Aleksandrijskog

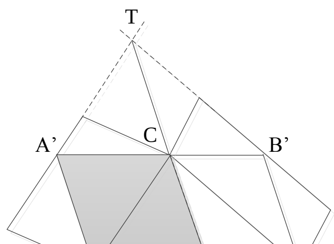
Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ bilo kojeg trokuta ΔABC konstruiraju se prema van paralelogrami s površinama P_1 i P_2 te neka je T presjek pravca na kojima leže paralele s $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Nad trećom stranicom $\overline{AB}$ konstruira se paralelogram čija je druga stranica paralelna i jednaka $\overline{CT}$ i neka mu je površina P_3. Tada je

$$P_3 = P_1 + P_2. (10)$$



Slika 5. Paralelogrami nad stranicama trokuta *ABC*

Dokaz je jednostavniji ako se treći paralelogram konstruira prema unutra, tj. translatira za vektor $\overrightarrow{CT}$ (vidi [5]).



Slika 6. Translacija za vektor $\overrightarrow{CT}$

Kako je $\left|\overrightarrow{AA'}\right| = \left|\overrightarrow{CT}\right| = \left|\overrightarrow{BB'}\right|$, vrhovi A' i B' leže na stranicama trećeg paralelograma. Tada je površina $P_1 = p(AA'TC)$, jer paralelogrami imaju iste baze, a nasuprotne im stranice leže na paralelnim pravcima. No, $p(AA'TC)$ jednaka je površini osjenčanog paralelograma sa slike 6. Na isti način postupa se s drugim paralelogramom pa se dobiva da je P_2 jednaka površini preostalog dijela paralelograma $AA'B'B$. Dakle, $P_1 + P_2 = P_3$, čime je tvrdnja dokazana.

3.3. Poopćenje na sfernu geometriju

Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od čvrste točke *O* koja se zove središte ili centar sfere, a ta udaljenost radijus *R* sfere. Dakle, sfera je skup

$$S^2(O;R) = \{T \in \Re^3 | d(O,T) = R\}.$$

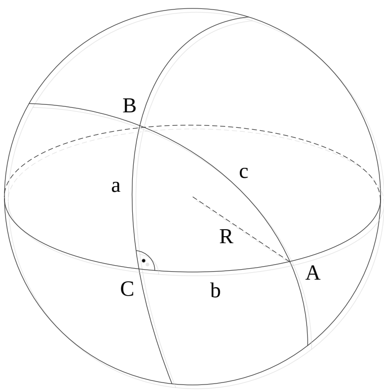
Sfera s centrom u ishodištu *O* prostornog koordinatnog sustava i radijusa 1 zove se standardna sfera i označava se sa S^2. Dakle, $S^2(O;1)$. Ako se sfera presijeće ravninom kroz njeno središte, u presjeku se dobiva velika kružnica sfere čiji je radijus jednak radijusu sfere. Pravokutan sferni trokut je sferni trokut koji ima barem jedan pravi kut (slika 7.), iako može imati dva i tri prava kuta (ako je *C* sjeverni pol, a *A* i *B* su točke na ekvatoru). Kutovi sfernog trokuta su kutovi α, β, γ između njihovih stranica, tj. između tangenata na lukove kružnica kojima pripadaju stranica *a*, *b*, *c* sfernog trokuta ΔABC. U sfernoj geometriji vrijedi sinusov i kosinusov poučak.

Teorem 3.2. *(Kosinusov poučak za stranice) Za bilo koji sferni trokut ABC na standardnoj sferi* $S^2(O;1)$ *vrijedi* $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$ *kao i još dvije analogne formule.*

Dokaz: Može se vidjeti u [4].

Teorem 3.3. *(Sferni Pitagorin poučak)Ako su a, b, c stranice pravokutnog sfernog trokuta na sferi* $S^2(O;R)$, *onda su* $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ *tim stranicama pripadni središnji kutovi izraženi u radijanima pa se sferni Pitagorin poučak može pisati u obliku*

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R} \cdot \cos\frac{b}{R}. \tag{11}$$



Slika 7. Sfera

Dokaz: Iz teorema 3.2. primijenjenog na pravokutni sferni trokut na standardnoj sferi, jer je za središnji kut α kružnice radijusa *R* pripadna dužina luka krivulje jednaka $l = R \cdot \alpha$.

Napomena: Može se pokazati da se iz (11) dobiva standardni Pitagorin poučak za trokut u Euklidskoj ravnini. Koristeći razvoj u red $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$, dobiva se

$$1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{c}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{c}{R}\right)^4 - \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{R}\right)^4 - \ldots\right)\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{b}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{b}{R}\right)^4 - \ldots\right)$$

iz čega se nakon sređivanja dobiva

$$c^2 - \frac{1}{12}\frac{c^4}{R^2} + \ldots = a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{2R^2} - \frac{a^4}{12R^2} + \frac{b^4}{12R^2} + \ldots$$

Uzimajući u obzir da su duljine stranica trokuta fiksne, a središte sfere se pomiče, odnosno polumjer sfere teži u beskonačno ($R \to \infty$), granična vrijednost

$$\lim_{R\to\infty}\left(c^2 - \frac{1}{12}\frac{c^4}{R^2} + \ldots\right) = \lim_{R\to\infty}\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{2R^2} - \frac{a^4}{12R^2} + \ldots\right)$$

daje dobro poznati Pitagorin poučak.

Dakle, geometrija na sferi se približava Euklidskoj geometriji što je radijus veći, odnosno ako su stranice *a*, *b* i *c* vrlo male u usporedbi s *R*. Na sličan način može se pokazati da formula $\sin\alpha \sin\frac{c}{R} = \sin\frac{a}{R}$ prelazi u limesu za $R \to \infty$ u formulu $c \sin\alpha = a$.

4. ZAKLJUČAK

Pitagora i njegovi sljedbenici dali su veliki doprinos razvoju matematike. Pitagora je koristio definicije na račun matematičkih osobina u prirodi, što navodi na činjenicu da je upravo on napravio korak prema sistematizaciji geometrije. Nesumnjivo je da je pitagorejska misao prisutna i u današnjoj kulturi i civilizaciji. Tako se, uz matematiku, astronomiju i fiziku, primjeri nalaze i u medicini, biologiji, psihologiji. Pitagorina teorija brojeva do danas je predmet proučavanja, ali najvrednijim njegovim radom na polju geometrije smatra se postavljanje poučka o odnosu stranica pravokutnog trokuta.

5. LITERATURA

[1] Poldrugač, A.: Pitagorin poučak i njegova primjena, Diplomski rad, Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Odsjek u Čakovcu, 2011.

[2] Gleizer, G. I.: Povijest matematike za školu, Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.

[3] Kurnik Z.: Analogija, MIŠ, Vol. 1, No. 3 (2000.) 101-109

[4] Pavković, B.; Veljan, D.: Elementarna matematika II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[5] Maor, E.:ThePythagoreanTheorem: A 4 000-YearHistory, PrincetonUniversityPress, United Kingdom, 2007.

Kontakt autora:

Damira Keček, dipl. ing. mat.
Veleučilište u Varaždinu
J. Križanića 33
42 000 Varaždin
damira.kecek@velv.hr

Ana Poldrugač (bivši student)
Učiteljski fakultet Zagreb
Odsjek u Čakovcu
Dr. Ante Starčevića 55
40 000 Čakovec

doc. dr. sc. Predrag Vuković
Učiteljski fakultet Zagreb
Odsjek u Čakovcu
Dr. Ante Starčevića 55
40 000 Čakovec
predrag.vukovic@ufzg.hr