Osječki matematički list 13 (2013), 1-19

O Padovanovu nizu

Bojan Kovačić* Luka Marohnić† Renata Opačić‡

Sažetak

U članku se najprije geometrijski definira prvih nekoliko članova Padovanova niza. Na temelju geometrijske motivacije niz se definira uobičajenom rekurzivnom relacijom te se izvodi zatvorena formula za opći član niza pomoću tzv. plastične konstante. Zatim se definira pojam morfnoga broja i pokazuje se da je to i plastična konstanta. Naposljetku se iskazuju i dokazuju neka svojstva Padovanova niza i daju neke kombinatorne interpretacije.

Ključne riječi: *Padovanov niz, definicija, osnovna svojstva, plastična konstanta, morfni broj, kombinatorne interpretacije*

On the Padovan sequence

Abstract

The first few values of the Padovan sequence are defined geometrically in the introductory part of this paper. Next, by using a geometrical algorithm as a motivation, the Padovan sequence is defined by means of its recurrence relation and initial values. It is also shown how one could get an explicite formula for P_n by using the plastic number. This is followed by the definition of morphic numbers and the proof that the plastic number is a morphic number. Finally, some properties of the Padovan sequence are proven and some combinatorial interpretations are given.

Keywords: *Padovan sequence, definition, basic properties, plastic number, morphic number, combinatorial interpretations*

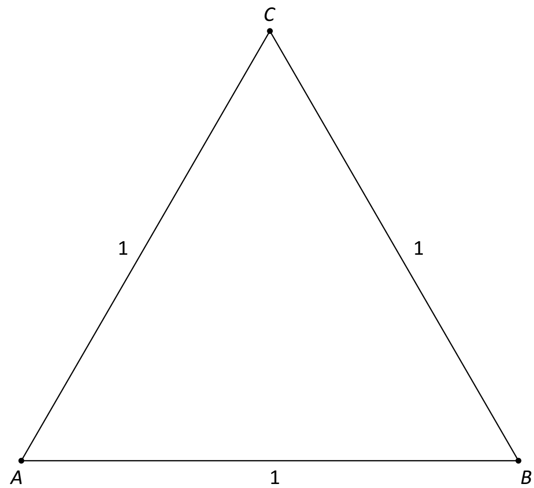
*Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, Vrbik 8a, bojan.kovacic@tvz.hr

†Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, Vrbik 8a, luka.marohnic@tvz.hr

‡Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, Vrbik 8a, renata.opacic@tvz.hr

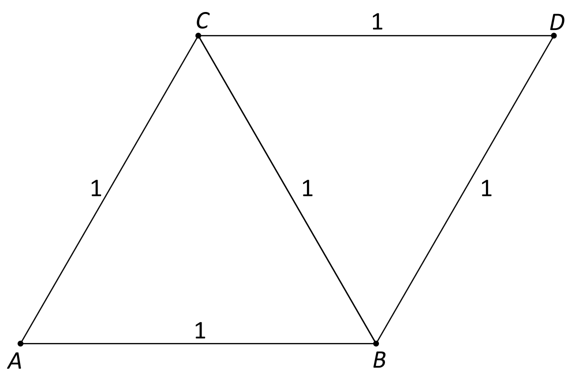
1 Uvod

Neka je zadan jednakostraničan trokut ABC takav da je $|AB| = |BC| = |AC| = 1$ (vidi *Sliku 1*).



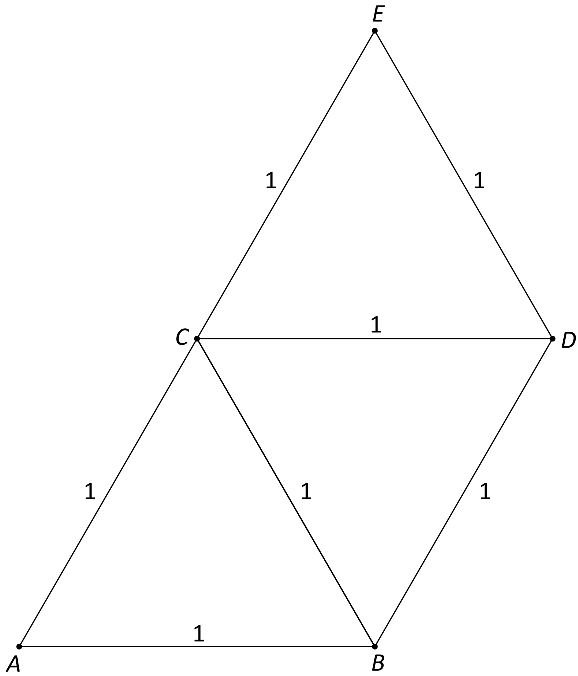
Slika 1.

Nad stranicom BC ovoga trokuta konstruiramo novi jednakostraničan trokut BCD. Dobivamo jednakostranični usporednik (romb) $ABCD$ prikazan na *Slici 2*.



Slika 2.

Nad stranicom CD konstruiramo jednakostraničan trokut CDE. Dobivamo trapez $ABDE$ prikazan na *Slici 3*.

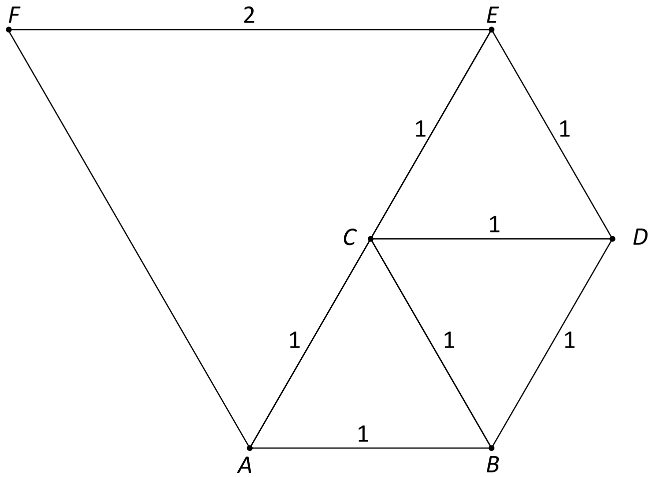


Slika 3.

Postupak provodimo dalje tako da u k-tom koraku nad *nekom* od dobivenih dužina konstruiramo jednakostraničan trokut takav da je duljina njegove stranice jednaka zbroju duljina stranica konstruiranih u koracima $(k-2)$ i $(k-3)$. Konkretno, u trećem koraku nad nekom od dobivenih dužina konstruiramo jednakostraničan trokut duljine $1+1=2$ (jer smo u prvom koraku konstruirali trokut BCD čije su stranice duljine 1, dok je "nulti" korak zapravo zadavanje trokuta ABC čije su stranice duljine 1). Jedina takva dužina je $\overline{AE}$, pa dobivamo peterokut $ABCDEF$ prikazan na *Slici 4*.

U četvrtom koraku konstruiramo jednakostraničan trokut nad nekom od prikazanih dužina kojima je duljina jednaka 2 (jer smo u drugom i trećem koraku konstruirali trokute čije stranice imaju duljinu 1). Dvije su mogućnosti: izabrati dužinu $\overline{AF}$ ili dužinu $\overline{EF}$. Opredijelit ćemo se za potonju. Dobivamo peterokut $ABDGF$ prikazan na *Slici 5*.

Ovaj korak ujedno je bio i posljednji u kojemu smo mogli izabrati nad kojom ćemo dužinom konstruirati sljedeći jednakostraničan trokut. U pe-



Slika 4.

tom koraku na nekoj od dužina sa slike treba konstruirati jednakostraničan trokut čija je stranica duljine $2+1=3$ (jer smo u četvrtom i trećem koraku konstruirali trokute čije stranice imaju duljine 2, odnosno 1). Jedina dužina na slici čija je duljina jednaka 3 jest dužina $\overline{DG}$, pa se sljedeći jednakostraničan trokut konstruira upravo nad tom dužinom.

Na *slici 6* prikazan je rezultat provođenja opisanog postupka ukupno $k = 7$ puta.

Jedno od osnovnih svojstava ovako dobivenog „lika" jest: ako krenemo iz trokuta AEF i obilazimo sve trokute onim redom kojim smo ih konstruirali, naša putanja bit će spiralna. Zbog toga se često kaže da smo na gore opisani način konstruirali *spiralu jednakostraničnih trokuta*.

Gore navedena geometrijska konstrukcija poslužit će nam kao motivacija za definiciju Padovanova niza.

2 Definicija Padovanova niza

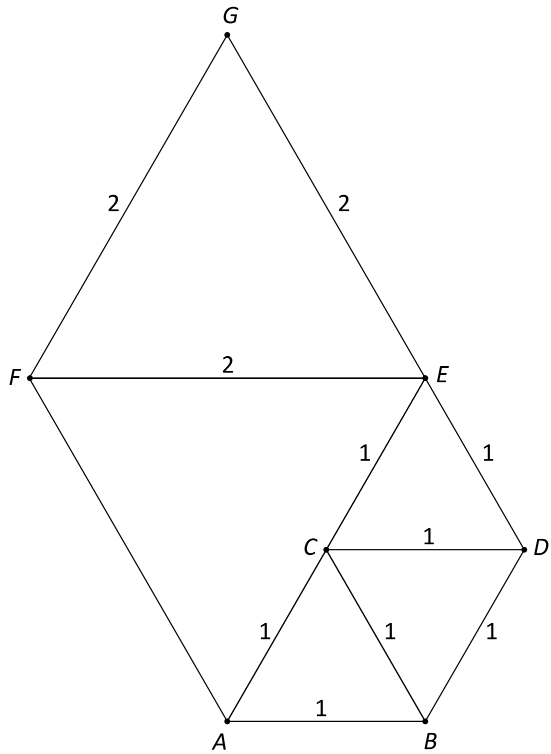
Niz prirodnih brojeva $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$[1] definiran rekurzivno s

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-2} + P_{n-3}, \\ P_0 &= P_1 = P_2 = 1, \end{aligned} \tag{1}$$

naziva se *Padovanov niz*. Prvih nekoliko članova toga niza su:

Richard Padovan (1935.), *američki arhitekt, nastavnik i prevoditelj. Zanimljivo je da je otkriće niza posvetio nizozemskom arhitektu Hansu van der Laanu jer je motiv za otkriće niza bio proučavanje određenih arhitektonskih oblika i površina.*

[1] $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, tj. $\mathbb{N}_0$ je skup svih nenegativnih cijelih brojeva.



Slika 5.

$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \ldots$$

Padovanov niz može se zadati i malo „dubljom" rekurzivnom relacijom. Točnije, vrijedi:

Propozicija 2.1. Za svaki prirodan broj $n \geq 5$ vrijedi

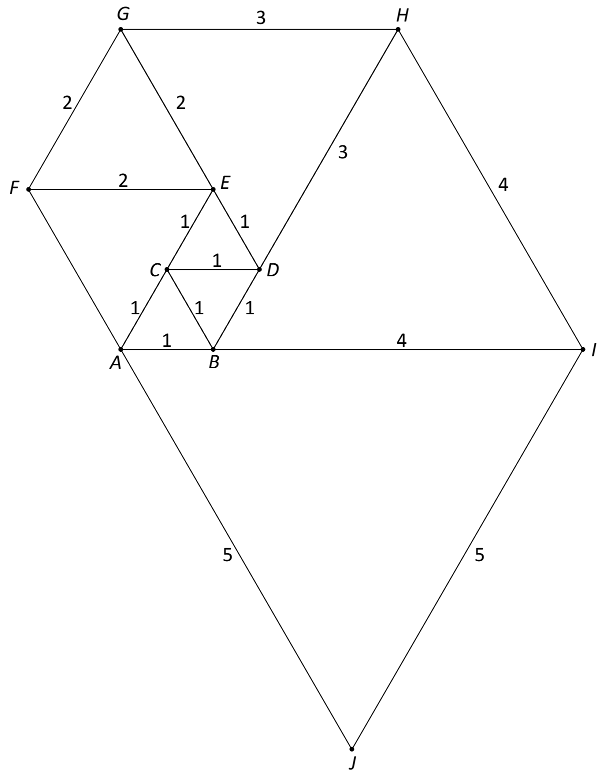
$$P_n = P_{n-1} + P_{n-5}. \tag{2}$$

Dokaz. Iz relacije (1) slijede jednakosti[2]

$$P_{n-1} = P_{n-3} + P_{n-4} \quad \text{za svaki } n \geq 4, \tag{3}$$

$$P_{n-2} = P_{n-4} + P_{n-5} \quad \text{za svaki } n \geq 5. \tag{4}$$

[2] Radi kraćega pisanja i izbjegavanja ponavljanja riječi "jednakost", u daljnjem tekstu nam *m.n* označava "jednakost *m.n*".



Slika 6.

Izrazimo li iz (3) vrijednost P_{n-4} i uvrstimo u (4), dobit ćemo

$$P_{n-2} = P_{n-1} - P_{n-3} + P_{n-5}$$

odnosno

$$P_{n-2} + P_{n-3} = P_{n-1} + P_{n-5} \quad \text{za svaki } n \geq 5. \tag{5}$$

Lijeva strana u (5) je, prema (1), jednaka P_n, pa slijedi tvrdnja.

Napomena 2.1. Sukladno razmatranjima iz uvoda, (2) možemo geometrijski interpretirati ovako: Duljina stranice jednakostraničnoga trokuta konstruiranoga u k-tom koraku jednaka je zbroju duljina stranica trokuta konstruiranih u koracima $(k-1)$ i $(k-5)$. Valjanost te propozicije za $k \in \{5, 6, 7\}$ lako se može izravno provjeriti pomoću *Slike 6*.

Članovi Padovanova niza mogu se (teoretski) definirati i za negativne cjelobrojne vrijednosti varijable n. Naime, iz (1) slijedi:

$$P_{n+3} = P_{n+1} + P_n, \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

a odavde je

$$P_n = P_{n+3} - P_{n+1}, \quad \text{za svaki} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Uvrstimo li formalno $n = -1$, dobit ćemo

$$P_{-1} = P_2 - P_0 = 1 - 1 = 0.$$

Na potpuno analogan način računamo P_{-2}, P_{-3} itd. Tako dobivamo prošireni Padovanov niz:

$$\ldots, 2, -1, 0, 1, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, \ldots \tag{6}$$

3 Formula za opći član Padovanova niza

Osim rekurzivno, Padovanov se niz može definirati i zatvorenom formulom, tj. realnom funkcijom jedne realne varijable n. Koristit ćemo uobičajeni način rješavanja bilo koje rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima. Pretpostavimo da je

$$P_n = x^n$$

za neki $x \in \mathbb{C}$. Uvrštavanjem u (1) dobivamo:

$$x^n = x^{n-2} + x^{n-3},$$

odnosno, nakon kraćenja s x^{n-3}, *karakterističnu jednadžbu*:

$$x^3 - x - 1 = 0. \tag{7}$$

Iz teorije algebarskih jednadžbi poznato nam je sljedeće:

- Svaki polinom stupnja 3 ima najmanje jednu realnu nultočku. (To je poseban slučaj osnovnog poučka algebre.)
- Ako su svi koeficijenti algebarske jednadžbe cijeli brojevi i ako je vodeći koeficijent u toj jednadžbi jednak 1, onda ta jednadžba ima racionalna rješenja ako i samo ako ima cjelobrojna rješenja.
- Ako su svi koeficijenti algebarske jedandžbe cijeli brojevi i ako je vodeći koeficijent u toj jednadžbi jednak 1, onda je svako cjelobrojno rješenje jednadžbe djelitelj njezina slobodnog člana.

Gerolamo Cardano (1501. - 1576.), *talijanski matematičar i fizičar, jedan od začetnika teorije vjerojatnosti kao matematičke discipline. Zanimljivo je da je zasluge za otkriće Cardanove formule sebi pripisivao talijanski matematičar Niccolo Fontana Tartaglia koji se zbog toga desetljećima sporio s Cardanom.*

U našem slučaju su svi kandidati za cjelobrojna rješenja jednadžbe (7) svi djelitelji broja -1, tj, brojevi -1 i 1. Izravnom provjerom vidimo da ti brojevi nisu rješenja jednadžbe (7). Stoga ta jednadžba nema cjelobrojnih, pa niti racionalnih rješenja. Međutim, kako svaki polinom stupnja 3 ima barem jednu realnu nultočku, zaključujemo da jednadžba (7) ima najmanje jedno realno (preciznije, iracionalno) rješenje. Kako bismo odredili rješenja upotrijebit ćemo Cardanovu formulu. Stavimo li

$$A = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{23}{3}}}, \qquad B = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{23}{3}}},$$

dobivamo

$$\begin{aligned} x_1 &= A + B \approx 1.324717957244746, \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (A - B) \cdot i \approx \\ &\approx -0.66235897862237 + 0.5622795120623 \cdot i, \\ x_3 &= \overline{x_2} \approx -0.66235897862237 - 0.5622795120623 \cdot i. \end{aligned}$$

Prema tome, opće rješenje rekurzivne relacije (1) dano je formulom

$$P_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + C_3 x_3^n \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}_0, \tag{8}$$

pri čemu su C_1, C_2 i C_3 konstante. Te konstante odredit ćemo koristeći početne uvjete. Uvrštavanjem $n = 0$, $n = 1$ i $n = 2$ dobivamo sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 &= 1 \\ C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_3^3 &= 1 \end{aligned}$$

čija su rješenja

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \\ C_2 &= \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \\ C_3 &= \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \end{aligned}$$

odnosno približno

$$\begin{aligned} C_1 &\approx 0.72212441830311, \\ C_2 &\approx 0.13893779 - 0.20225 \cdot i, \\ C_3 = \overline{C_2} &\approx 0.13893779 + 0.20225 \cdot i. \end{aligned}$$

Primijetimo da su moduli kompleksnih brojeva x_2, x_3, C_2 i C_3 manji od 1. Odavde slijedi

$$\lim_{n\to\infty} C_2 x_2^n = \lim_{n\to\infty} C_3 x_3^n = 0.$$

A odavde i iz (8) dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(P_n - C_1 x_1^n\right) = 0, \tag{9}$$

što znači da za velike n vrijedi

$$P_n \approx C_1 x_1^n. \tag{10}$$

Na pitanje kolika su zaista odstupanja brojeva $C_1 x_1^n$ od pripadajućih članova Padovanova niza odgovor nam daju sljedeće dvije propozicije.

Propozicija 3.1. Ako je ε proizvoljan pozitivan broj tada je $\left|P_n - C_1 x_1^n\right| < \varepsilon$ za svaki prirodan broj $n \geq \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log|x_2|} \right\rceil - 5$.

Dokaz. Zapišimo formulu (8) u obliku

$$P_n = C_1 x_1^n + R_n,$$

gdje je $R_n = C_2 x_2^n + C_3 x_3^n$. Znamo da vrijedi $x_3 = \overline{x_2}$ i $C_3 = \overline{C_2}$, pa možemo pisati

$$R_n = C_2 x_2^n + \overline{C_2} \cdot \left(\overline{x_2}\right)^n = C_2 x_2^n + \overline{C_2} \cdot \overline{x_2^n} = C_2 x_2^n + \overline{C_2 x_2^n} = 2 \cdot Re\left(C_2 x_2^n\right),$$

odakle slijedi

$$|R_n| = 2\left|Re\left(C_2 x_2^n\right)\right| \leq 2\left|C_2 x_2^n\right| = 2\left|C_2\right| \cdot |x_2|^n.$$

Neka je sada ε proizvoljan pozitivan realan broj. Kako je $\left(2\left|C_2\right| \cdot |x_2|^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ strogo padajući niz s pozitivnim članovima, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$2\left|C_2\right| \cdot |x_2|^n < \varepsilon \tag{11}$$

za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$. Logaritmiranjem nejednadžbe (11) za $n = n_0$ (odabrat ćemo bazu 10) slijedi

$$\log\left(2\left|C_2\right|\right) + n_0 \cdot \log|x_2| < \log \varepsilon,$$

pa rješavanjem jednadžbe po n_0 dobivamo

$$n_0 < \frac{\log \varepsilon - \log\left(2\left|C_2\right|\right)}{\log|x_2|}.$$

Zaokružujući desnu stranu jednakosti na (prvi veći ili jednak) cijeli broj i koristeći nejednakost $\lceil x+y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$, dobivamo

$$n_0 < \left\lceil \frac{\log \varepsilon - \log(2|C_2|)}{\log|x_2|} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log|x_2|} \right\rceil + \left\lceil -\frac{\log(2|C_2|)}{\log|x_2|} \right\rceil.$$

Stavimo

$$N = \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log|x_2|} \right\rceil + \left\lceil -\frac{\log(2|C_2|)}{\log|x_2|} \right\rceil = \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log|x_2|} \right\rceil - 5.$$

Neka je sada $n \geq N$. Tada je i $n > n_0$, pa vrijedi

$$|P_n - C_1 x_1^n| = |R_n| \leq 2|C_2| \cdot |x_2|^n < \varepsilon,$$

odakle slijedi tvrdnja.

Propozicija 3.2. Za sve brojeve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$P_n = \left\lfloor C_1 x_1^n + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

tj. članovi Padovanova niza P_n su najbliže cjelobrojne vrijednosti odgovarajućim brojevima $C_1 x_1^n$.

Dokaz. Za $n \in \{0, 1, 2\}$ tvrdnju provjeravamo direktnim računom. Neka je sada $\varepsilon = 1/3$. Iz prethodne propozicije slijedi da je $\left|P_n - C_1 x_1^n\right| < \varepsilon < 0.5$ za sve prirodne brojeve $n \geq 3$, odakle slijedi tvrdnja. $\square$

Rezimirajmo sada najvažnije posljedice relacije (10).

- Članovi Padovanova niza rastu eksponencijalnom progresijom.
- Za određivanje brojeva P_n praktično je najvažnija realna konstanta x_1.

4 Plastična konstanta

Konstanta x_1, definirana u prethodnoj točki, naziva se *plastična konstanta* ili *plastični broj*. Obično se interpretira (a negdje čak i definira) kao granična vrijednost

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \tag{12}$$

kako bi se izvela analogija sa tzv. *zlatnim rezom* u slučaju Fibonaccijeva niza. Postoji, međutim, još jača veza između ova dva neobična broja[3]. Kako bismo je iskazali, definirajmo prvo *morfne brojeve*[4]:

Definicija 4.1. Realni broj $p > 1$ je *morfni broj* ako postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$p + 1 = p^m \quad i \quad p - 1 = p^{-n}.$$

Leonardo Pisano Bigollo (Fibonacci) (1170. - 1250.), *talijanski matematičar. U svojem djelu* Liber Abaci *inicirao je proširenje indo-arapskoga zapisa brojeva u Europi. Zanimljivo je da se sve do 2002. godine naziv njegovog djela pogrešno prevodio kao* Knjiga o abacusu *umjesto* Knjiga o računanju. *Čitatelja zainteresiranoga za detalje o zlatnom rezu i Fibonaccijevom nizu upućujemo na literaturu [4].*

Zlatni rez je jedan primjer morfnoga broja. Sada ćemo pokazati da je to i plastična konstanta.

Propozicija 4.1. Plastična konstanta je morfni broj.

Dokaz. Promotrimo karakterističnu jednadžbu Padovanove rekurzije (7). Očito je to jednadžba tipa $p + 1 = p^m$ za $m = 3$. S druge strane, ukoliko pomnožimo karakteristični polinom (7) polinomom $p^2 - p + 1$, dobivamo

$$\left(p^3 - p - 1\right)\left(p^2 - p + 1\right) = p^5 - p^4 - 1.$$

Sada je plastična konstanta x_1 nultočka polinoma $p^5 - p^4 - 1$, pa zadovoljava jednadžbu[5]

$$p^5 - p^4 - 1 = 0, \tag{13}$$

koja dijeljenjem s p^4 prelazi u

$$p - 1 = p^{-4}. \tag{14}$$

Jednadžba (14) je oblika $p - 1 = p^{-n}$ za $n = 4$, čime je dokaz završen. □

Može se se pokazati da su zlatni rez i plastična konstanta *jedini* morfni brojevi. Kroz ovu se neočekivanu činjenicu ostvaruje značajna veza između ta dva broja: oni jedini zadovoljavaju uvjete netrivijalne algebarske definicije, u kojemu kontekstu postaju matematički zanimljivi, a proizašli su iz umjetnosti (arhitekture) kao veličine od univerzalnog estetskog i strukturalnog značaja (što je u slučaju zlatnoga reza gotovo poslovično). Čitatelja zainteresiranog za morfne brojeve upućujemo na literaturu [7].

Édouard Lucas (1842. - 1891.), *francuski matematičar. Tijekom punih 19 godina dokazivao je da je broj $2^{127} - 1$ prost broj. To je najveći prosti broj čiji dokaz je proveden bez upotrebe računala.*

Na ovome mjestu spomenut ćemo i to da se nizom sličnim Padovanovim, stotinjak godina ranije, bavio i É. Lucas . On je razmatrao niz s istom rekurzijom kao u (1), ali s drugim početnim uvjetima. Time je plastična konstanta dotaknuta 50-tak godina prije nego što joj je H. van der Laan posvetio punu pažnju.

[3] Zlatni rez i plastična konstanta te njima pripadajući nizovi - Fibbonacijev i Padovanov niz - zanimljivi su i matematičarima i umjetnicima, dvjema skupinama ljudi koje su im svaka na svoj način posvetile pažnju.

[4] Od grčke riječi *morphos:* „imati oblik ili strukturu".

[5] Zanimljivo je primijetiti da je (13) također karakteristična jednadžba za Padovanovu rekurziju ako krenemo od alternativne rekurzije (2).

5 Neka svojstva Padovanova niza

Padovanovi brojevi imaju mnoga zanimljiva svojstva. Zbog relativno kompliciranih vrijednosti konstanti navedenih u (8), ta se svojstva dokazuju ponajviše matematičkom indukcijom ili „teleskopiranjem“[6]. Neka od njih pregledno navodimo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 5.1. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

1. $\sum_{k=0}^{n} P_k = P_{n+5} - 2$,
2. $\sum_{k=0}^{n} P_{2k} = P_{2n+3} - 1$,
3. $\sum_{k=0}^{n} P_{2k+1} = P_{2n+4} - 1$,
4. $\sum_{k=0}^{n} P_{3k} = P_{3n+2}$,
5. $\sum_{k=0}^{n} P_{5k} = P_{5n+1}$,
6. $\sum_{k=0}^{n} P_k^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2$,
7. $\sum_{k=0}^{n} P_k^2 \cdot P_{k+1} = P_n \cdot P_{n+1} \cdot P_{n+2}$,
8. $\sum_{k=0}^{n} P_k \cdot P_{k+2} = P_{n+2} \cdot P_{n+3} - 1$.

Dokaz. (a) Jednakost se može dokazati matematičkom indukcijom, ali elegantnije je primijeniti „teleskopiranje“. Iz (1) slijedi:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_3 - P_1, \\ P_1 &= P_4 - P_2, \\ P_2 &= P_5 - P_3, \\ &\dots \\ P_{n-1} &= P_{n+2} - P_n, \\ P_n &= P_{n+3} - P_{n+1}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem svih ovih jednakosti dobivamo

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = P_{n+3} + P_{n+2} - P_1 - P_2.$$

Prema (1), zbroj prva dva člana na desnoj strani jednak je P_{n+5}, dok je $P_1 = P_2 = 1$. Odavde slijedi (a).

[6]O metodi „teleskopiranja“ detaljnije se može naći u [5]

(b) „Teleskopiranjem“ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= P_3 - P_1, \\
P_2 &= P_5 - P_3, \\
P_4 &= P_7 - P_5, \\
&\dots \\
P_{2n-2} &= P_{2n+1} - P_{2n-1}, \\
P_{2n} &= P_{2n+3} - P_{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem svih ovih jednakosti, uz uvrštavanje $P_1 = 1$, izravno slijedi (b).

(c) Analogno dokazu (b).

(d) Ovu je jednakost najlakše dokazati matematičkom indukcijom (po n). Za $n = 0$ (c) se svodi na jednadžbu

$$P_0 = P_2$$

koja vrijedi prema početnim uvjetima uz relaciju (1). Pretpostavimo da je (c) točna za neki prirodan broj n. Tada za $n + 1$ imamo

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_{3k} = \sum_{k=0}^{n} P_{3k} + P_{3(n+1)} = P_{3n+2} + P_{3n+3} = P_{3n+5} = P_{3(n+1)+2},$$

pa (c) vrijedi i za broj $n + 1$, što je i valjalo pokazati.

(e) Analogno dokazu (d).

(f) Valjanost ove jednakosti za $n \in \{0, 1, 2\}$ provjerava se korištenjem proširena Padovanova niza (6). Pretpostavimo da (f) vrijedi za neki prirodan broj $n \geq 3$. Provjerimo vrijedi li ona i za broj $n + 1$. Primjenom jednakosti

$$
\begin{aligned}
P_{n-3} &= P_n - P_{n-2} \\
P_n &= P_{n-3} - P_{n-1} \\
P_{n+1} &= P_{n+3} - P_n = P_{n-1} + P_{n-2} \\
P_{n+2} &= P_n + P_{n-1}
\end{aligned}
$$

imamo redom:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} P_k^2 &= \sum_{k=0}^{n} P_k^2 + P_{n+1}^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2 + (P_{n+3} - P_n)^2 = \\ &= P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2 + P_{n+3}^2 - 2P_{n+3}P_n + P_n^2 = \\ &= P_{n+3}^2 + (P_n + P_{n-1})^2 - P_{n-1}^2 - (P_n - P_{n-2})^2 - 2P_{n+3}P_n + P_n^2 = \\ &= P_{n+3}^2 + 2P_nP_{n-1} + 2P_nP_{n-2} - P_{n-2}^2 - 2P_{n+3}P_n + P_n^2 = \\ &= P_{n+3}^2 + 2P_n(P_{n-1} + P_{n-2}) - P_{n-2}^2 - 2P_{n+3}P_n + P_n^2 = \\ &= P_{n+3}^2 + 2P_nP_{n+1} - P_{n-2}^2 - 2P_{n+3}P_n + P_n^2 = \\ &= P_{n+3}^2 - 2P_n(P_{n+3} - P_{n+1}) - P_{n-2}^2 + P_n^2 = \\ &= P_{n+3}^2 - 2P_n^2 - P_{n-2}^2 + P_n^2 = \\ &= P_{n+3}^2 - P_n^2 - P_{n-2}^2,\end{aligned}$$

pa (f) vrijedi i za broj $n+1$, što je i valjalo pokazati.

(g) i (h) Analogno dokazu (f). □

Spomenimo i jedno zanimljivo svojstvo proširena Padovanova niza (6). Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Indukcijom po varijabli n lako se pokaže da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$A^n = \begin{pmatrix} P_{n-5} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-4} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-1} & P_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Kažemo da je matrica A *generator* članova Padovanova niza. Primijetimo da je jednakost (15) istinita i za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Naime, nije teško provjeriti da je multiplikativni inverz matrice A jednak

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{-6} & P_{-4} & P_{-5} \\ P_{-5} & P_{-3} & P_{-4} \\ P_{-4} & P_{-2} & P_{-3} \end{pmatrix},$$

pa se ponovno indukcijom po varijabli n i uz korištenje jednakosti[7]

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n, \quad \text{za svaku } A \in Gl(3, \mathbb{R}), \tag{16}$$

[7] $Gl(3, \mathbb{R})$ je skup svih regularnih matrica reda 3. Napomenimo da jednakost (16) vrijedi i za bilo koji element skupa $Gl(m, \mathbb{R})$, tj. skupa svih regularnih matrica reda $m \in \mathbb{N}$.

pokaže da (15) vrijedi i za strogo negativne cjelobrojne vrijednosti varijable n. Detalje prepuštamo čitatelju.

6 Neke kombinatorne interpretacije Padovanova niza

Primjer 1. Odredite ukupan broj uređenih rastava[8] prirodnoga broja n na pribrojnike takve da je svaki od njih jednak 2 ili 3. Izračunajte traženi broj za $n = 10$.

Rješenje. Traženi broj promatramo kao funkciju prirodnoga broja n, pa neka je a_n ukupan broj promatranih rastava. Za $n = 1$ traženi rastav očito ne postoji, pa je stoga $a_1 = 0$. Za $n = 2$ i $n = 3$ postoje samo trivijalni rastavi $2 + 0$ i $3 + 0$. Dakle, $a_1 = a_2 = 1$.
U nastavku pretpostavimo da je $n \geq 4$. Uočimo da rastav prirodnoga broja n može započinjati ili s 2 ili s 3, tj. imamo točno dvije mogućnosti: $n = 2 + (n - 2)$ i $n = 3 + (n - 3)$. U prvom slučaju broj n možemo zapisati kao uređeni zbroj „dvojki" i/li „trojki" na onoliko različitih načina na koliko to možemo učiniti za broj $(n - 2)$, tj. na ukupno a_{n-2} načina, dok u drugom slučaju analognim razmatranjem zaključujemo da to možemo učiniti na ukupno a_{n-3} načina. Prema načelu zbroja slijedi

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}, \tag{17}$$

uz početne uvjete

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a_3 = 1.$$

Relacija (17) podudara se s relacijom (1), ali su indeksi u početnim uvjetima malo „pomaknuti", pa umjesto $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$ i $P_1 = 1$ piše $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$. Stoga zaključujemo da je $a_n = P_{n-2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Posebno, za $n = 10$ dobivamo ukupno $P_{10-2} = P_8 = 7$ različitih rastava, i

[8] Sintagma *uređen rastav* znači da se zbroj mora sastojati od najmanje jednoga pribrojnika, da svi pribrojnici moraju biti strogo pozitivni cijeli brojevi i da je bitan njihov poredak. Pritom se rastav oblika $n = n$ dogovoreno zapisuje kao $n = n + 0$ i ne razlikuje od rastava $n = 0 + n$.

to su:

$$\begin{gathered}2+2+2+2+2,\\ 2+2+3+3,\\ 2+3+2+3,\\ 2+3+3+2,\\ 3+2+3+2,\\ 3+2+2+3,\\ 3+3+2+2.\end{gathered}$$

Primjer 2. Pokažite da ukupan broj uređenih rastava nenegativnoga cijeloga broja n na pribrojnike od kojih niti jedan nije jednak 2 iznosi P_{2n-2}.

Rješenje. Neka je a_n ukupan broj uređenih rastava broja n. Očito je $a_0 = 1 = P_{-2}$, $a_1 = 1 = P_0$, $a_2 = 1 = P_2$ (u sva tri slučaja imamo samo trivijalne rastave $n = n + 0$). Dakle, nizovi (a_n) i (P_{2n-2}) imaju iste početne uvjete. Općenito, za prirodan broj $n \geq 4$ svaki promatrani rastav može počinjati s bilo kojim od brojeva iz skupa $\{1, 3, \ldots, n\}$ Analogno Primjeru 1, zaključujemo da rastava koji počinju s 1 ima ukupno a_{n-1}, rastava koji počinju s 3 ima ukupno a_{n-3} itd. Prema načelu zbroja slijedi:

$$a_n = \sum_{k=0,\, k\neq n-2}^{n-1} a_k,$$

što možemo zapisati u obliku:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - a_{n-2},$$

odnosno

$$a_n + a_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \tag{18}$$

Preostaje provjeriti da niz $(P_{2n-2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljava (18). Primijetimo da iz $a_n = P_{2n-2}$ slijedi $a_{n-2} = P_{2n-6}$ (i obratno), pa treba provjeriti valjanost jednakosti

$$P_{2n-2} + P_{2n-6} = \sum_{k=0}^{n-1} P_{2k-2}, \tag{19}$$

Desnu stranu (19) transformiramo ovako:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} P_{2k-2} &= P_{-2} + P_0 + P_2 + \cdots + P_{2(n-1)-2} = \\ &= P_{-2} + (P_0 + P_2 + \cdots + P_{2n-4}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} P_{2k} + P_{-2}.\end{aligned}$$

Primjenom (b) iz Propozicije 4 i $P_{-2} = 1$ jednakost (19) prelazi u

$$P_{2n-2} + P_{2n-6} = P_{2(n-2)+3} - 1 + 1,$$

odnosno

$$P_{2n-1} = P_{2n-2} + P_{2n-6}. \tag{20}$$

Istinitost (20) slijedi izravno iz (2) tako da u (2) umjesto varijable n pišemo $2n-1$. Dakle, niz $(P_{2n-2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljava (19) i tvrdnja primjera je dokazana.

Primjer 3. Neka je $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k$. Nađite *zatvorenu formu*[9] za $f(x)$. Funkciju f nazivamo *funkcija izvodnica Padovanova niza* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Rješenje. Radi jednostavnosti, radit ćemo s proširenim Padovanovim nizom (6), tj. pretpostavit ćemo da (1) vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Pomnožimo tu jednakost s x^k. Dobivamo

$$P_k x^k = P_{k-2} x^k + P_{k-3} x^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Formalnim zbrajanjem po k dobivamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k-2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} P_{k-3} x^k. \tag{21}$$

Lijeva strana (21) jednaka je $f(x)$. Prvi pribrojnik na desnoj strani transfor-

[9] *Zatvorena forma* funkcije f je analitički izraz kojim se definira propis te funkcije i koji sadrži konačno mnogo članova. Moguće je da zatvorena forma bude racionalna funkcija, eksponencijalna funkcija itd.

miramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} P_{k-2}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{k-2}x^2x^{k-2} = x^2\sum_{k=0}^{\infty} P_{k-2}x^{k-2} = \\ &= x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k + P_{-2}x^{-2} + P_{-1}x^{-1}\right) = \\ &= x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k + 1\cdot x^{-2} + 0\cdot x^{-1}\right) = \\ &= x^2 f(x) + 1.\end{aligned} \tag{22}$$

Potpuno analogno dobivamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{k-3}x^k = x^3 f(x) + x. \tag{23}$$

Uvrštavanjem (22) i (23) u (21) slijedi:

$$f(x) = x^2 f(x) + 1 + x^3 f(x) + x,$$

pa je tražena zatvorena forma funkcije f jednaka

$$f(x) = \frac{x+1}{1-x^2-x^3}.$$

Napomenimo da se danas znaju brojne interpretacije Padovanova niza čiji dokazi nisu elementarni, pa ih ovdje ne spominjemo. Zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu navedenu u sljedećoj točki.

Literatura

[1] R. Padovan: *Dom Hans van der Laan and the plastic number, Nexus IV: Architecture and Mathematics* (urednici: K. Williams i J. F. Rodrigues), str. 181-193, Kim Williams Books, 2002.

[2] E. W. Weisstein: *Padovan sequence, Mathworld - a Wolfram Web Resource*, javno dostupno na `http://mathworld.wolfram.com/PadovanSequence.html` (1. 9. 2012.)

[3] N. J. A. Sloane: *Sequence A00931, the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, javno dostupno na `http://oeis.org/A000931` (1. 9. 2012.)

[4] A. Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[5] D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[6] `http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence` (1. 9. 2012.)

[7] J. Aarts, R. Fokkink, G. Krujitzer, Morphic numbers, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **2**(2001.), javno dostupno na `www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2001-02-1-056.pdf` (27. 9. 2012.)