Osječki matematički list 13 (2013), 33-41

Bitka spolova

Damira Keček [*]

Sažetak

U ovom radu prezentirana je igra Bitka spolova s proizvoljnim brojem igrača. Opisana su svojstva igre i definirane su funkcije isplata. Provedena je detaljna diskusija isplativosti igre za pojedinog igrača u određenim kombinacijama igre.

Ključne riječi: *igra Bitka spolova, igra Bitka spolova s n igrača, funkcija isplata*

Battle of sexes

Abstract

This paper presents the Battle of sexes game with an arbitrary number of players. Properties of the game are described and the payoff functions are defined. A detailed discussion of the game cost-effectiveness for each player in certain combinations is conducted.

Keywords: *Battle of sexes game, Battle of sexes game with n players, payoff function*

[*]Veleučilište u Varaždinu, J. Križanića 33/6, 42 000 Varaždin
damira.kecek@velv.hr

1 Uvod

Igre u kojima sudjeluju samo dva igrača i svaki igrač ima samo dva izbora nazivamo 2×2 igrama. Za pojedinog igrača postoje četiri moguća ishoda koji su iskazani isplatom. S četiri ishoda i dva igrača 2×2 igra u potpunosti je opisana s osam brojeva. Sve informacije o tome koji od osam brojeva je dodijeljen kojem igraču i u kojoj situaciji dane su matricom isplata. Retci u matrici isplata odgovaraju strategijama prvog igrača, a stupci strategijama drugog igrača.

Mnoge 2×2 igre, uključujući igru Zatvorenikova dilema, Igru kukavice, Bitka spolova i igru Lov na jelena predmet su teorijske i eksperimentalne analize u područjima filozofije, prava, biologije, sociologije, politike i u svim ostalim područjima u kojima se javljaju strateške situacije. O navedenim igrama više se može vidjeti u [2]. Zajedničko obilježje 2×2 igara je to da svaki igrač može izabrati strategiju koja je povoljna za drugog igrača i onu koja je štetna. Kažemo da igrač bira prijateljski ili neprijateljski način igre, odnosno da surađuje ili ne surađuje. Tako u igri Zatvorenikova dilema koja je opisana pričom o dvojici zatvorenika od kojih svaki može priznati ili ne priznati zločin, s time da pojedini zatvorenik ne zna koju je odluku donio drugi igrač, surađivati znači ne priznati zločin, a ne surađivati znači priznati zločin.

1.1 Bitka spolova s 2 igrača

Igra Bitka spolova u kojoj sudjeluju dvije osobe može se opisati jednim vrlo jednostavnim svakodnevnim primjerom. Naime, muž i žena u želji da zajedno provedu večer pokušavaju izabrati razonodu od zajedničkog interesa. Muž preferira gledanje nogometa kod kuće, a žena odlazak u kazalište. Igra Bitka spolova s dva igrača koordinacijska je igra s konfliktnim preferencijama. Dakle, preferirani izbori dvojice igrača u sukobu su jedan s drugim. U ovoj igri izbor koji igrač voli odgovara nesuradnji, dok suradnji odgovara izbor koji igrač ne voli. Tako odluka muža u odabiru preferencije žene predstavlja suradnju (odabir kazališta od strane muža kao razonode), dok odabir nogometa odgovara muževljevoj nesuradnji.

Ovisno o kombinaciji odluka igrači dobivaju određene isplate. Matrica isplata u simetričnim 2×2 igrama, tj. u igrama u kojima igrači raspolažu istim skupom strategija i dobivaju iste isplate za iste strategije, ima četiri moguće vrijednosti isplata. Označimo sa S isplatu igraču koji surađuje dok drugi igrač ne surađuje, a s T isplatu igraču koji ne surađuje dok drugi igrač surađuje. Ako i jedan i drugi igrač surađuju, onda svaki igrač dobiva isplatu R, a ako oba igrača ne surađuju, onda svaki igrač dobiva isplatu P. Dakle, u ovoj igri isplate igrača ovise o njihovu izboru te su dane sljedećom matricom isplata:

		Žena	
		bira nogomet	bira kazalište
Muž	bira kazalište	(R, R)	(S, T)
	bira nogomet	(T, S)	(P, P)

U svakoj zagradi matrice isplata postoje dvije vrijednosti. Prva vrijednost u zagradi predstavlja isplatu mužu, a druga isplatu ženi. Tako npr. kada i muž i žena surađuju (muž bira kazalište, a žena nogomet) i muž i žena dobivaju isplatu R. Kada muž surađuje (bira kazalište), a žena ne surađuje (bira kazalište) onda muž dobiva isplatu S, a žena isplatu T.
Igra Bitka spolova definirana je sljedećom relacijom:

$$R < P < S < T.$$

Iz nejednakosti $R + P < S + T$ slijedi da igrač dobiva veću isplatu kada su izbori igrača jednaki. U slučaju različitih izbora igrači dobivaju manju isplatu. Nejednakosti $S < T$ i $R < P$ jamče da će igrač dobiti veću isplatu kad je njegov izbor ono što preferira nego izbor onog što ne preferira.

2 Igra Bitka spolova s n igrača

2.1 Svojstva igre Bitka spolova s n igrača

Igru Bitka spolova s dva igrača možemo, uz određene promjene, proširiti na proizvoljno mnogo igrača. U nastavku navodimo svojstva igre s n igrača, $n > 2$, koja se odnose na preferencije igrača te odluke igrača i njihove isplate. Detaljnije o ovom proširenju se može vidjeti u [4].

Polazno svojstvo se odnosi na broj izbora za igrače.
(S1) U igri s n igrača svaki igrač ima dva izbora (za razonodu može izabrati gledanje nogometa ili odlazak u kazalište).

Svaki igrač preferira jedan od ta dva izbora.

(S2) U igri Bitka spolova u kojoj sudjeluje n igrača postoji barem jedan igrač čija je preferencija drugačija od preferencija ostalih igrača.

U situaciji kada bi svi igrači imali isti preferirani izbor, konfliktna situacija ne bi postojala.

Isplata igrača ovisi o tome da li je odluka igrača njegov preferirani izbor ili nije, te o broju igrača s istim izborom. Podijelimo igrače u dvije grupe, u grupu koju čine igrači koji biraju nogomet i u grupu koju čine igrači koji biraju kazalište. U svakoj grupi postoje igrači koji surađuju i koji ne surađuju.

(S3) Neovisno o izboru igrača, s porastom broja igrača u pojedinoj grupi raste i isplata svakog igrača te grupe.

(S4) Bez obzira na broj igrača u grupi, igrač dobiva veću isplatu kada je njegov izbor ono što voli, u odnosu na igrače čiji je izbor suprotan njihovim preferencijama.

(S5) Igrač koji ne voli svoj izbor, a koji je jednak izboru ostalih igrača, dobiva veću isplatu nego igrač koji voli svoj izbor, a koji je različit od izbora ostalih igrača.

2.2 Broj kombinacija u igri Bitka spolova s n igrača

Promatramo igru u kojoj sudjeluje n igrača, $n > 2$. Označimo s N broj igrača koji preferiraju nogomet. S obzirom da za svakog igrača postoji barem jedan igrač sa suprotnom preferencijom vrijedi

$$1 \leq N \leq n - 1.$$

Od N igrača koji preferiraju nogomet surađivati ih može $0, 1, ...$ ili svih N. Stoga, za N igrača koji preferiraju nogomet imamo $N + 1$ moguću situaciju s obzirom na broj igrača koji surađuju. S druge strane, od $n - N$ igrača koji preferiraju kazalište može njih $0, 1, ...$ ili $n - N$ surađivati pa postoji $n - N + 1$ moguća situacija s obzirom na broj igrača koji surađuju u toj grupi igrača. Tada za $N = 1, ..., n - 1$ imamo ukupno

$$2 \cdot n + 3 \cdot (n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 3 + n \cdot 2 = \sum_{N=1}^{n-1} (N+1)(n-N+1) \quad (1)$$

mogućih kombinacija. Raspišemo li formulu (1) dobivamo pregledniju formulu za broj kombinacija u igri Bitka spolova s n igrača. Imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{N=1}^{n-1}(N+1)(n-N+1) &= \sum_{N=1}^{n-1}(Nn-N^2+n+1)\\ &= n\sum_{N=1}^{n-1}N-\sum_{N=1}^{n-1}N^2+n\sum_{N=1}^{n-1}1+\sum_{N=1}^{n-1}1\\ &= n\cdot\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+n\cdot(n-1)+n-1\\ &= \frac{n^3+6n^2-n-6}{6}\\ &= \frac{(n^2-1)(n+6)}{6}.\end{aligned}$$

Dakle, broj svih mogućih kombinacija u igri Bitka spolova s n igrača je

$$\frac{(n^2-1)(n+6)}{6}. \tag{2}$$

Tako prema (2) u igri u kojoj sudjeluju tri igrača imamo 12 kombinacija. Ispišimo te kombinacije u obliku uređenih trojki na sljedeći način: (preferencija 1. igrača / izbor 1. igrača, preferencija 2. igrača / izbor 2. igrača, preferencija 3. igrača / izbor 3. igrača).
Dakle, prvo mjesto u trojki rezervirano je za preferenciju i izbor prvog igrača, drugo mjesto za preferenciju i izbor drugog igrača, a treće mjesto za preferenciju i izbor trećeg igrača. Imamo:

(K1) (kazalište/nogomet, kazalište/nogomet, nogomet/kazalište)

(K2) (kazalište/nogomet, kazalište/nogomet, nogomet/nogomet)

(K3) (kazalište/nogomet, kazalište/kazalište, nogomet/kazalište)

(K4) (kazalište/nogomet, kazalište/kazalište, nogomet/nogomet)

(K5) (kazalište/kazalište, kazalište/kazalište, nogomet/kazalište)

(K6) (kazalište/kazalište, kazalište/kazalište, nogomet/nogomet)

(K7) (kazalište/nogomet, nogomet/kazalište, nogomet/kazalište)

(K8) (kazalište/nogomet, nogomet/kazalište, nogomet/nogomet)

(K9) (kazalište/kazalište, nogomet/kazalište, nogomet/kazalište)

(K10) (kazalište/nogomet, nogomet/nogomet, nogomet/nogomet)

(K11) (kazalište/kazalište, nogomet/kazalište, nogomet/nogomet)

(K12) (kazalište/kazalište, nogomet/nogomet, nogomet/nogomet)

2.3 Funkcije isplata

Isplate igrača se u igrama s n igrača umjesto pomoću matrice isplata prikazuju funkcijama isplata. U igrama kao što su Zatvorenikova dilema i Igra kukavice u kojima sudjeluje n igrača funkcije isplata ovise o broju igrača koji surađuju. U takvim igrama je važno kako i kada igrači surađuju te kako ih natjerati na suradnju. Suradnja sama po sebi u igri Bitka spolova nije važna. Štoviše, u igri s dva igrača smo vidjeli da igrači dobivaju najmanju isplatu kada obojica surađuju.

U nastavku ćemo definirati funkcije isplata ovisno o broju igrača koji surađuju u igri i ovisno o broju igrača s istim izborom. Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da su funkcije isplata linearne funkcije. Na temelju igre s tri igrača provest ćemo analizu koje od navedenih funkcija daju točniji opis isplata za igru Bitka spolova.

Označimo s y broj igrača koji surađuju; očito je $0 \leq y \leq n$. Označimo sa $s(y)$ isplatu igraču koji surađuje, a s $d(y)$ isplatu igraču koji ne surađuje. Primijetimo da vrijednosti $s(0)$ i $d(n)$ nema smisla definirati. I u igri s n igrača koristimo oznake isplata S, T, R i P iz uvodnog dijela. Vrijednost S odgovara isplati igraču koji surađuje dok svi ostali igrači ne surađuju, a vrijednost T isplati igraču koji ne surađuje kad svi drugi igrači surađuju. Kada svi igrači surađuju, svaki igrač dobiva isplatu R, a kada niti jedan igrač ne surađuje tada svaki igrač dobiva vrijednost P. Tako je:

$$d(0) = P \tag{3}$$

i

$$d(n-1) = T. \tag{4}$$

Prema (3) i (4) te pretpostavci da su funkcije isplata linearne, funkcija isplata d glasi:

$$d(y) = P + \frac{T-P}{n-1} \cdot y, \quad 0 \leq y \leq n-1. \tag{5}$$

Nadalje imamo

$$s(1) = S \tag{6}$$

i

$$s(n) = R \tag{7}$$

pa iz (6) i (7) te pretpostavke o linearnosti funkcija isplata slijedi da funkcija s ima oblik:

$$s(y) = S + \frac{R - S}{n - 1} \cdot (y - 1), \quad 1 \leq y \leq n. \tag{8}$$

S druge strane, označimo s x broj igrača s istim izborom, $1 \leq x \leq n$. Ako je izbor igrača ujedno i njegova preferencija, igrač dobiva isplatu $v(x)$. U suprotnom, dobiva isplatu $m(x)$. Primijetimo kako iz svojstva (S3) slijedi da su funkcije v i m monotono rastuće. Prema svojstvu (S4) imamo:

$$v(x) > m(x), \text{za svaki } x$$

dok prema svojstvu (S5) vrijedi:

$$m(n) > v(1).$$

Analizirajmo funkcije isplata promatrajući kombinacije (K2) i (K8) igre Bitka spolova s tri igrača. U obje kombinacije prvi i drugi igrač surađuju (odabiru razonodu koju ne preferiraju), dok treći igrač ne surađuje (bira razonodu koju i preferira). I u (K2) i u (K8) kombinaciji surađuju dva igrača $(y = 2)$. Isplate igrača u pojedinoj kombinaciji zapisivat ćemo u sljedećem obliku:

(isplata 1. igrača, isplata 2. igrača, isplata 3. igrača).

Koristeći funkcije s i d imamo sljedeće isplate:

$$\text{isplata u (K2)} : \left(s(2) = \frac{S + R}{2}, s(2) = \frac{S + R}{2}, d(2) = T \right)$$

$$\text{isplata u (K8)} : \left(s(2) = \frac{S + R}{2}, s(2) = \frac{S + R}{2}, d(2) = T \right).$$

Dakle, za dvije različite kombinacije, (K2) i (K8), s jednakim brojem igrača koji surađuju, isplate po igračima u obje kombinacije su jednake. Ako koristimo funkcije v i m imamo sljedeće isplate:

$$\text{isplata u (K2)} : (m(3), m(3), v(3))$$

$$\text{isplata u (K8)} : (m(2), m(1), v(2)).$$

Možemo primijetiti da se sada isplate u (K2) i (K8) razlikuju. U (K2) treći igrač ne surađuje, ali mu je izbor jednak izboru svih ostalih igrača. S obzirom da igrač koji ne surađuje može dobiti najveću isplatu samo kada mu je izbor jednak izboru svih ostalih igrača, treći igrač s pravom dobiva najveću isplatu u igri, isplatu $v(3)$. On također dobiva i najveću moguću isplatu, isplatu T, koristimo li funkcije s i d. Međutim, u (K8) treći igrač ne surađuje i njegov je izbor jednak samo izboru prvog igrača. Preko funkcija s i d njemu je dodijeljena najveća isplata, isplata T, što nije u skladu sa svojstvima igre. Preko funkcija v i m, treći igrač dobiva isplatu $v(2)$ što je manje od najveće isplate $v(3)$. Nadalje, promotrimo kombinacije (K6) i (K12) igre Bitka spolova s tri igrača. I u (K6) i u (K12) niti jedan igrač ne surađuje ($y = 0$). Isplate igrača preko funkcija s i d su:

$$\text{isplata u (K6)} : (d(0) = P, d(0) = P, d(0) = P)$$

$$\text{isplata u (K12)} : (d(0) = P, d(0) = P, d(0) = P).$$

U oba slučaja isplate igrača su jednake. Isplate preko funkcija v i m su:

$$\text{isplata u (K6)} : (v(2), v(2), v(1))$$

$$\text{isplata u (K12)} : (v(1), v(2), v(2)).$$

Primijetimo da su sada isplate prvog i trećeg igrača zamijenjene. U (K6) treći igrač dobiva manju isplatu nego treći igrač u (K12). U (K12) isplata prvog igrača manja je od isplate prvog igrača u (K6).

Na temelju provedene diskusije o isplatama igrača u pojedinoj kombinaciji igre Bitka spolova s tri igrača možemo zaključiti da funkcije v i m egzaktnije opisuju isplate igrača. Iz tog se razloga u igri Bitka spolova u koju je uključeno više od dva igrača isplate igrača se ne iskazuju funkcijama isplata koje ovise o broju igrača koji surađuju u igri, već funkcijama isplata koje ovise o broju igrača s istim izborom.
S obzirom da je u ovom radu diskusija provedena na četiri od ukupno 12 kombinacija čitatelja se upućuje da na ostalim kombinacijama provjeri da li se uvijek pravilnija isplata dobiva korištenjem funkcija v i m.

Literatura

[1] D. Robinson, D. Goforth, *The Topology of the* 2×2 *games. A new periodic table*, Routledge Advances in Game Theory, Routledge/Taylor&Francis Group, New York, 2005.

[2] Y. Shoham, K. Leyton-Brown, *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations*, Cambridge University Press, 2009.

[3] M. N. Szilagyi, I. Somogyi, Agent-Based Simulation of *N*-Person Games with Crossing Payoff Functions, *Complex Systems*, **17**(2008), 427-439

[4] J. Zhao, M. N. Szilagyi, F. Szidarovszky, An *N*-Person Battle of Sexes Game, *Physica A*, **387**(2008), 3669-3677