Osječki matematički list 13 (2013), 61-71

Dokazi nekih stereometrijskih činjenica koordinatnom metodom

Ilija Ilišević *

Sažetak

U radu se razmatra primjena koordinatne metode u dokazu niza zanimljivih tvrdnji iz stereometrije, te određivanju skupova točaka prostora koji zadovoljavaju određeni uvjet.

Ključne riječi: *koordinatna metoda, prostor, tetredar, kocka*

Proofs of some stereometric statements by means of the coordinate method

Abstract

In this paper, the application of the coordinate method to proving interesting statements in stereometry is considered. The determination of the set of points in space satisfying certain conditions is also studied by means of this method.

Keywords: *coordinate method, space, tetrahedron, cube*

Mnoge stereometrijske zadaće možemo riješiti primjenom analitičke geometrije (tzv. koordinatnom metodom). Najprije se prisjetimo nekih činjenica iz analitičke geometrije prostora koje će nam trebati pri rješavanju zadaća.

Neka je $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ pravokutni koordinatni sustav u prostoru; O je ishodište koordinatnog sustava, a $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ jedinični vektori koji se nalaze na pravcima x,y,z (koordinatne osi) redom. Vrijedi:

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

1. Udaljenost d točaka $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

   Posebno, udaljenost točke $T(x, y, z)$ od ishodišta koordinatnog sustava:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. Neka je dana dužina $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Tada su koordinate polovišta $P(x, y, z)$ dužine $\overline{AB}$ dane sa

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3. Jednadžba pravca u prostoru kroz točku $T(x_0, y_0, z_0)$ paralelno vektoru smjera $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ glasi

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

4. Jednadžba pravca kroz dvije točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$ glasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

5. Jednadžba ravnine:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

6. Ravnina $Ax + By + Cz + D = 0$ koja ne prolazi ishodištem može se predočiti i u segmentnom obliku

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1,$$

   gdje je $m = -\frac{D}{A}$, $n = -\frac{D}{B}$, $p = -\frac{D}{C}$.

7. Jednadžba ravnine koja sadrži nekolinearne točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ glasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Udaljenost d točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$ jednaka je
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

9. Ako su dani vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, tada je
$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}.$$

Sada ćemo koordinatnu metodu primijeniti u dokazima nekoliko zanimljivih tvrdnji o tetraedru kojemu su pobočni bridovi međusobno okomiti.

Zadatak 1. Ako su bočne strane tetraedra $SABC$ međusobno okomite i ako su $|SA| = a$, $|SB| = b$, $|SC| = c$ duljine pobočnih bridova dokažite da vrijedi:

a) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{1}{d^2}$, gdje je d udaljenost vrha S od strane ABC,

b) $\operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2$, gdje su α, β, γ unutarnji kutovi trokuta ABC,

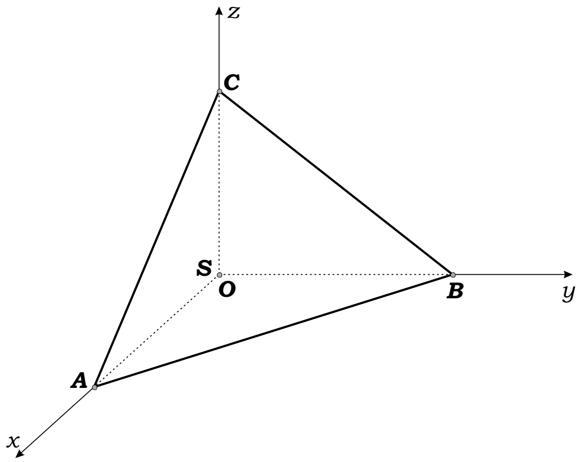
c) $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$, gdje su P_1, P_2, P_3 površine bočnih strana, a P površina strane ABC,

d) $P_1 + P_2 + P_3 \geq \dfrac{9v^2}{2}$, gdje su P_1, P_2, P_3 površine bočnih strana, a v duljina visine tetraedra,

e) ako za duljine bridova $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ vrijedi $|AB| = |BC|$, polumjer r sfere upisane u tetraedar $SABC$ jednak je
$$r = \frac{a(a + 2b - \sqrt{a^2 + 2b^2})}{2(2a + b)}.$$

Rješenje.

Postavimo tetraedar $SABC$ u pravokutni koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ u prostoru tako da je S ishodište koordinatnog sustava, a vrhovi A, B, C se redom nalaze na x-osi, y-osi, z-osi (Slika 1). Tada je $S(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.



Slika 1.

a) Jednadžba ravnine koja sadrži točke A, B, C je

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0.$$

Udaljenost točke S od te ravnine je

$$d = \frac{|\frac{1}{a} \cdot 0 + \frac{1}{b} \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot 0 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}},$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

b) Prema a) vrijedi

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

odakle slijedi

$$v = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}. \tag{1}$$

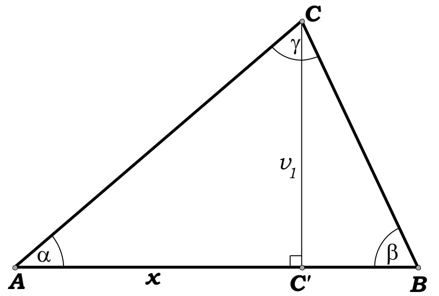
Neka je V volumen tetraedra. Tada iz $V = \frac{1}{6}abc$ i $V = \frac{1}{3}P_{\triangle ABC} \cdot v$ slijedi

$$P_{\triangle ABC} = \frac{\frac{1}{6}abc}{\frac{1}{3}v} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{2}.$$

Duljine bridova $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ su

$$|AB| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad |BC| = \sqrt{b^2+c^2}, \quad |AC| = \sqrt{a^2+c^2}.$$

Neka je v_1 duljina visine trokuta ABC iz vrha C na $\overline{AB}$ i neka je $x = |AC'|$, gdje je C' nožište te visine (Slika 2).



Slika 2.

Tada je

$$v_1 = \frac{2P_{\triangle ABC}}{|AB|} = \sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2}}.$$

Kako je, prema Pitagorinom poučku,

$$x^2 = |AC|^2 - v_1^2 = a^2+c^2 - \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2} = \frac{a^4}{a^2+b^2},$$

to je

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Stoga je

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{v_1} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$

Analogno bismo dobili

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{b^2}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}, \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{c^2}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$

Stoga je

$$\operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2.$$

c) Kako je

$$P_1 = P_{\triangle ABS} = \frac{1}{2}ab, \quad P_2 = P_{\triangle SBC} = \frac{1}{2}bc, \quad P_3 = P_{\triangle ASC} = \frac{1}{2}ac,$$

to je

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 \geq \frac{9v^2}{2} \quad &\iff \quad \frac{1}{2}(ab+bc+ac) \geq \frac{9}{2} \cdot \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \\ &\iff \quad ab+bc+ca \geq \frac{9a^2b^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \\ &\iff \quad (ab+bc+ac)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \geq 9a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Stoga je dovoljno dokazati posljednju nejednakost. Prema AG-nejednakosti je

$$ab+bc+ac \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac},$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2 \cdot a^2c^2 \cdot b^2c^2},$$

odakle se množenjem dobije tražena nejednakost

$$\begin{aligned} (ab+bc+ac)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) &\geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2 \cdot a^2c^2 \cdot b^2c^2} \\ &= 9\sqrt[3]{a^6b^6c^6} = 9a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

d) Kako je $|AB| = |BC|$, to Pitagorin poučak povlači $a^2 + b^2 = b^2 + c^2$, pa je $c = a$ odnosno $|SC| = a$. Nadalje,

$$|BC| = |AB| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad |AC| = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}.$$

Ako je V volumen, a O oplošje poliedra kojem se može upisati sfera polumjera r tada vrijedi formula

$$r = \frac{3V}{O} \tag{2}$$

koju ćemo koristiti kako bismo odredili polumjer tetraedru upisane sfere.
Površina trokuta ABC jednaka je, prema modificiranoj Heronovoj formuli,

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{4}\sqrt{(|AB|^2+|BC|^2+|AC|^2)^2 - 2(|AB|^4+|BC|^4+|AC|^4)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+a^2+b^2+2a^2)^2 - 2((a^2+b^2)^2+(a^2+b^2)^2+(2a^2)^2)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{4a^4+8a^2b^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+2b^2}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} O &= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+b^2} \\ &= ab + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2+2b^2} \\ &= \frac{1}{2}a(2b + a + \sqrt{a^2+2b^2}), \end{aligned}$$

odakle prema (2) dobivamo

$$\begin{aligned} r &= \frac{3 \cdot \frac{1}{6}a^2 b}{\frac{1}{2}a(2b+a+\sqrt{a^2+2b^2})} = \frac{ab(a+2b-\sqrt{a^2+2b^2})}{(2b+a)^2-(a^2+2b^2)} \\ &= \frac{ab(a+2b-\sqrt{a^2+2b^2})}{2b(2a+b)} = \frac{a(a+2b-\sqrt{a^2+2b^2})}{2(2a+b)}. \end{aligned}$$

e) Iz $\frac{ab}{2} = P_1$, $\frac{bc}{2} = P_2$ i $\frac{ac}{2} = P_3$ dobivamo

$$a = \sqrt{\frac{2P_1P_3}{P_2}}, \quad b = \sqrt{\frac{2P_1P_2}{P_3}}, \quad c = \sqrt{\frac{2P_2P_3}{P_1}}.$$

Kako je $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|BC| = \sqrt{b^2+c^2}$ i $|AC| = \sqrt{a^2+c^2}$, (Slika 1) to dobivamo

$$|AB| = \sqrt{\frac{2P_1}{P_2P_3}(P_2^2+P_3^2)}, \quad n = \sqrt{\frac{2P_2}{P_1P_3}(P_1^2+P_3^2)}, \quad |AC| = \sqrt{\frac{2P_3}{P_1P_2}(P_1^2+P_2^2)}.$$

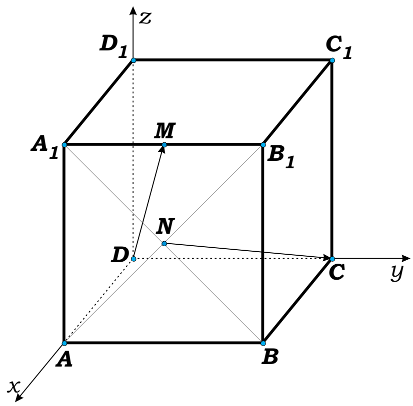
Površinu P četvrte strane dobivamo prema modificiranoj Heronovoj formuli

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(|AB|^2+|BC|^2+|AC|^2)^2 - 2(|AB|^4+|BC|^4+|AC|^4)},$$

odakle nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo

$$P = \sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2}.$$

Dokažimo sada i nekoliko zanimljivih tvrdnji o kocki.



Slika 3.

Zadatak 2. Dana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a. Neka je M polovište brida $\overline{A_1B_1}$, a N središte kvadrata ABB_1A_1. Dokažite da vrijedi

$$\sphericalangle(MD, NC) = \arccos \frac{5\sqrt{6}}{18}.$$

Rješenje. Smjestimo kocku u pravokutni koordinatni sustav $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, gdje međusobno okomiti jedinični vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ redom određuju koordinatne osi x, y, z (Slika 3) tako da je

$$A(a,0,0), B(a,a,0), C(0,a,0), D(0,0,0), A_1(a,0,a), B_1(a,a,a), C_1(0,a,a), D_1(0,0,a), \tag{3}$$

tada je

$$M\Big(a, \frac{a}{2}, a\Big), \quad N\Big(a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\Big),$$

pa je

$$\overrightarrow{DM} = a\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j} + a\vec{k}, \quad \overrightarrow{CN} = a\vec{i} - \frac{a}{2}\vec{j} + \frac{a}{2}\vec{k}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\cos \sphericalangle(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{CN}) &= \frac{a \cdot a + \frac{a}{2} \cdot (-\frac{a}{2}) + a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + (-\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2}} \\
&= \frac{a^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} \cdot \frac{6a^2}{4}}} = \frac{\frac{5a^2}{4}}{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{5}{3\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{18}.
\end{aligned}$$

Zadatak 3. Dokažite da je u kocki $ABCDA_1B_1C_1D_1$, brida duljine a, udaljenost S središta strane ADD_1A_1 od ravnine BC_1D jednaka $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Rješenje. Smjestimo danu kocku u pravokutni koordinatni sustav tako da za vrhove kocke vrijedi (3). Kako je S polovište dužine $\overline{AD_1}$, to je $S(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$. Jednadžba ravnine BC_1D je

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} x-a & y-a & z-0 \\ 0-a & a-a & a-0 \\ 0-a & 0-a & 0-0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-a & y-a & z \\ -a & 0 & a \\ -a & -a & 0 \end{vmatrix} \\
&= (x-a)(0+a^2) - (y-a)(0+a^2) + z(a^2+0) \\
&= a^2x - a^3 - a^2y + a^3 + a^2z \\
&= a^2(x-y+z),
\end{aligned}$$

tj. $x - y + z = 0$, a udaljenost d točke S od te ravnine

$$d = \frac{|\frac{a}{2} - 0 + \frac{a}{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Zadatak 4. U kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ je upisana sfera. Dokažite da suma kvadrata udaljenosti točke sfere od vrhova kocke ne ovisi o izboru točke.

Rješenje. Ako su vrhovi kocke dani sa (3) tada je središte sfere $S(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$. Neka točka na sferi ima koordinate $T(x, y, z)$. Polumjer sfere je $\frac{a}{2}$, pa je

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4}. \tag{4}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
& |AT|^2+|BT|^2+|CT|^2+|DT|^2 \\
& +|A_1T|^2+|B_1T|^2+|C_1T|^2+|D_1T|^2 \\
= \; & \big((x-a)^2+y^2+z^2\big)+\big((x-a)^2+(y-a)^2+z^2\big) \\
& +\big(x^2+(y-a)^2+z^2\big)+\big(x^2+y^2+z^2\big) \\
& +\big((x-a)^2+y^2+(z-a)^2\big)+\big((x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2\big) \\
& +\big(x^2+(y-a)^2+(z-a)^2\big)+\big(x^2+y^2+(z-a)^2\big) \\
= \; & 8(x^2+y^2+z^2)-8a(x+y+z)+12a^2 \\
\overset{(4)}{=} \; & 8\cdot\frac{a^2}{4}-8a(x+y+z)+12a^2 \\
= \; & 14a^2-8a(x+y+z).
\end{aligned} \tag{5}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
|TS|^2 &= \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2 \\
&= x^2+y^2+z^2-a(x+y+z)+\frac{3a^2}{4}
\end{aligned}$$

i $|TS|^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$, to je

$$x^2+y^2+z^2-a(x+y+z)+\frac{3a^2}{4}=\frac{a^2}{4},$$

što zbog (4) prelazi u

$$x+y+z=\frac{3a}{4}. \tag{6}$$

Ako (6) uvrstimo u (5), dobivamo

$$\begin{aligned}
& |AT|^2+|BT|^2+|CT|^2+|DT|^2 \\
& +|A_1T|^2+|B_1T|^2+|C_1T|^2+|D_1T|^2 \\
= \; & 14a^2-8a\cdot\frac{3a}{4}=14a^2-6a^2=8a^2.
\end{aligned}$$

Zadatak 5. Dana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a. U kojem omjeru točka E dijeli brid $\overline{AB}$ ako ona leži u ravnini određenoj središtima strana $ABCD$, ABB_1A_1 i točkom D_1?

Rješenje. Ako su vrhovi kocke dani sa (3) tada su koordinate točaka kojima je određena zadana ravnina dane sa

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right), \quad \left(a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \quad (0, 0, a),$$

a njezina jednadžba glasi

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} x - \frac{a}{2} & y - \frac{a}{2} & z - 0 \\ a - \frac{a}{2} & \frac{a}{2} - \frac{a}{2} & \frac{a}{2} - 0 \\ 0 - \frac{a}{2} & 0 - \frac{a}{2} & a - 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x - \frac{a}{2} & y - \frac{a}{2} & z \\ \frac{a}{2} & 0 & \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & a \end{vmatrix} \\
&= \left(x - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a^2}{4} - \left(y - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right) + z \cdot \frac{a^2}{4} \\
&= \frac{a^2}{4}x - \frac{a^3}{8} - \frac{3a^2}{4}y + \frac{3a^3}{8} + \frac{a^2}{4}z \\
&= \frac{a^2}{4}x - \frac{3a^2}{4}y + \frac{a^2}{4}z + \frac{a^3}{4} \\
&= \frac{a^2}{4}(x - 3y + z + a)
\end{aligned}$$

odnosno

$$x - 3y + z + a = 0.$$

Jednadžba pravca AB je $x = a$, $z = 0$, što uvršteno u jednadžbu ravnine daje

$$a - 3y + 0 + a = 0,$$

odakle je $y = \frac{2}{3}a$. Stoga točka E ima koordinate $(a, \frac{2}{3}a, 0)$, tj. dijeli brid $\overline{AB}$ u omjeru 1 : 2.

Literatura

[1] A. G. Cipkin, A. I. Pinskij, *Spravočnik po metodam rešenija zadač po matematike*, Nauka, Moskva, 1989.

[2] V. Devidé, *Riješeni zadaci iz više matematike*, svezak I, Školska knjiga, Zagreb, 1980.

[3] R. Stefanović, *Zbirka zadataka iz analitičke geometrije*, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1967.