Osječki matematički list 13 (2013), 73-83

Konstruktivna geometrija u nastavi matematike

Nikola Koceić Bilan* Nikolina Smajić† Luisa Trombetta Burić‡

Sažetak

Konstruktivna geometrija ima svoju nezamjenjivu ulogu u nastavi matematike. U ovomu radu uvodimo aksiome konstruktivne geometrije tj. usustavljujemo pravila kojima se u nastavi geometrije služimo kao nepisanim pravilima. Time konstruktivna geometrija postaje disciplina koja se bavi realizacijom klasičnog modela Euklidske geometrije. Ona nam pomaže pri naslućivanju i dokazivanju istina koje vrijede u tom, a onda i u bilo kojem drugom, modelu Euklidske geometrije. Napose, algebarskim jezikom možemo opisati rješivost geometrijskih problema konstruktivnim metodama.

Ključne riječi: *rješivost konstruktivne zadaće, euklidska konstrukcija, konstruktibilni broj*

*Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Splitu, Teslina 12, koceic@pmfst.hr

†niksma@pmfst.hr

‡Aspira, Split, lisatro@gmail.com

Nikola Koceić Bilan Nikolina Smajić Luisa Trombetta Burić

A constructive geometry in teaching of mathematics

Abstract

Constructive geometry plays an important role in teaching mathematics. In this paper we give axioms of constructive geometry, i.e. we incorporate all unwritten rules into a deductive system. In such manner constructive geometry becomes a mathematical discipline dealing with one particular realization of the classical model of Euclidian geometry. Its methods provide research into this model of geometry. Solvability of constructive geometry problems is characterized in a rather algebraic way.

Keywords: *solvability of constructive geometry problem, euclidian construction, constructible number*

1 Povijesni pregled

Po mišljenju mnogih povjesničara znanosti, matematika se razvila iz geometrije ravnine (planimetrije), a značajni dio te geometrije činile su upravo geometrijske konstrukcije. Njima su bili zaokupljeni mnogi poznati matematičari antičke Grčke čemu svjedoče brojni riješeni i neriješeni matematički problemi postavljeni u to doba. Na primjer, Apolonijev problem, kvadratura kruga, trisekcija kuta, duplikacija kocke, samo su neki od problema koji su zaokupljali pozornost vrsnih matematičara sve do najnovijeg doba, a neki od tih problema (npr. kvadratura kruga) su razriješeni tek prije nešto više od sto godina.

Stoljećima se geometrija razvijala kao *induktivna znanost*, znanost u kojoj se empirijskim putem dolazilo do pojedinačnih spoznaja iz kojih su se zatim indukcijom izvodile opće tvrdnje.

Euklid iz Aleksandrije (3.st.pr.Kr.) grčki matematičar, smatran "ocem geometrije".

Prvi jasno i precizno postavljen i razrađen pristup geometriji čija realizacija odgovara našoj intuitivnoj predodžbi, nalazimo u Euklidovom poznatom djelu Elementi koje se sastoji od 13 knjiga. U tom je djelu Euklid (330. pr. Kr. – 275. pr. Kr.) sustavno izložio gotovo čitavu grčku matematiku svoga vremena. Današnja elementarna geometrija se u malo čemu razlikuje od geometrije izložene u tom djelu. Naime, u Euklidovim Elementima je geometrija prezentirana kao deduktivna disciplina gdje se, polazeći od izvjesnog broja osnovnih pojmova i tvrdnji koje se uzimaju istinitima (aksiomi i postulati) i na osnovi nekoliko određenih pravila matematičkog i logičkog zaključivanja, gradio sustav sve složenijih dedukcija. Ta, 2300 godina stara elementarna geometrija Euklida, tzv. Euklidska geometrija, je prvi primjer formaliziranja deduktivnog sustava koji ujedno predstavlja i standard za sve takve sustave.

Osnovni objekti euklidske geometrije ravnine su točke, kao elementi te ravnine, i pravci, kao neki njezini istaknuti podskupovi. Ta dva tipa objekata zadovoljavaju poznate grupe aksioma: aksiome incidencije, aksiome uređaja, aksiome metrike, aksiome simetrije, te aksiom o paralelama. Ovako aksiomatski definirana euklidska geometrija ima apstraktni karakter i kao takva dopušta realizaciju u različitim modelima. Tako bi jedan njezin model bio model u kojem je osnovni prostor euklidska (dvodimenzionalna) polusfera bez glavne kružnice (hemisfera bez ekvatora). Točke u tom modelu su sve točke te polusfere, a pravci su glavne polukružnice. Jedan model euklidske geometrije je analitička geometrija u kojoj su točke uređeni parovi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pravci jednadžbe $Ax + By + C = 0$, a incidencija je zadana tako da smatramo da točka (x_0, y_0) pripada pravcu $Ax + By + C = 0$ ako je $Ax_0 + By_0 + C = 0$. No, intuitivno najbliži model je onaj koji su koristili još stari Grci i koji je svakom čovjeku jasan i prepoznatljiv. To je tzv. *klasični model* u kojem se ravnina shvaća kao ravna neograničena ploha (poput neograničenog lista papira), točke kao njezini beskonačno mali nedjeljivi dijelovi, a pravci kao neograničene ravne crte. Kako bismo vizualizirali, tj. realizirali ovaj klasični model, ravninu ćemo predočiti kao ograničenu ravnu crtaću plohu (npr. list papira), točku kao trag na crtaćoj plohi nastao uslijed trenutnog dodira crtaćeg pribora (npr. olovke) s tom plohom, te pravac kao trag nanesen na crtaću plohu crtaćim priborom prislonjenim uz neko ravno pomagalo.

I premda ovakva predodžba ravnine, točke i pravca ne odgovara u potpunosti našoj apstraktnoj predodžbi tih objekata, ipak njihovo crtanje i analiziranje odnosa među njima pomaže pri naslućivanju i dokazivanju istina koje vrijede u tom klasičnom modelu euklidske geometrije, a onda i u bilo kojem drugom njezinom modelu. Takva predodžba ravnine, točke i pravca, zajedno s crtaćim tehnikama i svim zaključcima koji iz toga proizlaze tvore **konstruktivnu geometriju**.

Prije Euklida stari su Grci u geometriji koristili isključivo tehnike konstruktivne geometrije, pri čemu određene tvrdnje nisu dokazivali već su ih smatrali neupitno istinitima i iz tih istina izvodili ostale zaključke. Euklid je sva ta znanja sistematizirao i postavio geometriju deduktivno uzimajući te neupitne istine za aksiome pomoću kojih je potom dokazivao sve ostale tvrdnje. Definirajući geometriju ravnine aksiomatski, Euklid ju je apstrahirao i odvojio od klasičnog modela u kojem je početno bila realizirana.

Tako je konstruktivna geometrija postala tek jedna od mogućih realizacija klasičnog modela geometrije, a klasični model tek jedan od mogućih modela geometrije. No, unatoč tome što se aksiomatskom postavkom geometrija ravnine može predočiti u različitim modelima, klasični model je ostao najprihvaćeniji i najprisutniji jer je intuitivno čovjeku najbliži i najjasniji. Jednako tako, konstruktivna geometrija, kao realizacija tog klasičnog modela geometrije, bila je i jest najprihvaćenija njegova realizacija i osnovni alat u nastavi geometrije za osnovne i srednje škole. Učeći geometriju od osnovne preko srednje škole učenik prolazi kroz sličan proces spoznavanja kroz koji su prolazili stari Grci od naslućivanja neupitnih istina, preko tvrdnji koje iz toga proizlaze do spoznavanja cjelokupnog sustava euklidske geometrije.

2 Aksiomi konstruktivne geometrije

Označimo sa π ravninu u klasičnom modelu euklidske geometrije. Bilo koji podskup ravnine π nazivamo **geometrijskom figurom** ili kraće **figurom** ravnine π. Primijetimo da se geometrijske figure mogu sastojati od konačno ili beskonačno mnogo točaka i da je sama točka figura.

Konstruirati neku figuru znači „nacrtati" tu figuru na crtaćoj plohi. No, zbog ograničenosti same plohe, nesavršenosti ljudskog oka i crtaćih vještina, kao i nepreciznosti crtaćeg pribora, prezentacija geometrijske figure kao crteža na crtaćoj plohi puna je nedostataka, pa se pitanje konstrukcije te figure svodi na postavljanje jasnih pravila i konvencija kojima ćemo te nedostatke učiniti minornima u smislu da ti nedostaci ne mogu dovesti u pitanje ispravnost zaključivanja. Ta pravila i konvencije uzimamo za aksiome konstruktivne geometrije.

Aksiomi konstruktivne geometrije:

A1. *Svaka zadana (tj. nacrtana) figura, ma koliko složena bila, smatramo da je konstruirana.*

A2. *Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda je konstruirana i njihova unija.*

A3. *Ako su konstruirane dvije figure, onda je moguće ustanoviti je li njihova razlika prazan skup ili nije. U slučaju da je razlika neprazna, i ta razlika je konstruirana.*

A4. *Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda je moguće ustanoviti je li njihov presjek prazan skup ili nije. U slučaju da je presjek neprazan, i taj presjek je konstruiran.*

A5. *Ako je dana neka neprazna figura, onda je moguće konstruirati točku koja pripada toj figuri.*

A6. *Ako je dana figura pravi podskup ravnine, onda je moguće konstruirati točku koja ne pripada toj figuri.*

Četvrti aksiom nam govori da, i kad na crtaćoj plohi ne vidimo presjek dviju figura (primjerice ako presjek izlazi izvan crtaće plohe) ili je taj presjek iz nekog razloga teško precizno odrediti (primjerice ako je debljina traga takva da ne možemo jednoznačno odrediti presjek), uvijek možemo utvrditi sijeku li se te figure ili ne i odrediti njihov presjek. Tako, na primjer, smatramo da uvijek možemo utvrditi leži li zadana točka na zadanom pravcu. Nadalje, peti i šesti aksiom nam osiguravaju da uvijek možemo odabrati neku točku na pravcu i neku točku izvan pravca.

Svaki problem u kojem se traži konstrukcija figure sa zadanim svojstvima (uvjetima) nazivamo **konstruktivnom zadaćom**.

Rješenjem konstruktivne zadaće smatramo svaku figuru koja zadovoljava postavljene uvjete, tj. ima sva tražena svojstva postavljena u toj konstruktivnoj zadaći. Ako uvjeti (svojstva) konstruktivne zadaće ne određuju položaj rješenja u odnosu na druge dane figure, onda čitavu klasu izometričnih figura koje zadovoljavaju uvjete postavljene u toj zadaći smatramo jednim rješenjem te konstruktivne zadaće. Tako na primjer, ako ne odredimo položaj tražene figure, onda zadaća u kojoj se traži konstrukcija trokuta sa zadanim stranicama ili nema rješenja ili ima točno jedno rješenje. No, ako zadamo položaj jedne stranice traženog trokuta, onda zadaća ili nema rješenja ili ima točno dva, osnosimetrična, rješenja. Nadalje, zadamo li samo položaj jednog vrha traženog trokuta, ta zadaća ili nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja.

S obzirom na broj rješenja, konstruktivna zadaća može biti:

- ***Nemoguća*** *- zadaća koja nema rješenje.*
- ***Jednoznačna*** *- zadaća koja ima točno jedno rješenje.*
- ***Višeznačna*** *- zadaća koja ima više od jednog, a konačno mnogo rješenja.*
- ***Beskonačnoznačna*** *- zadaća koja ima beskonačno mnogo rješenja.*

Za konstrukciju figura potreban je crtaći pribor. Tako, želimo li nacrtati neki pravac ili dužinu moramo imati ravnalo i pribor koji ostavlja trag na crtaćoj plohi, za crtanje kružnice moramo imati šestar itd. Općenito, bilo koju konstruktivnu zadaću koja ima barem jedno rješenje nazivamo **mogućom**. Kažemo da je konstruktivna zadaća **rješiva** ako je moguća i ako je njezino rješenje moguće konstruirati uz pomoć odabranih alata. U protivnom kažemo da je zadaća **nerješiva**. Primjerice konstrukcija trokuta kojemu su zadane sve tri simetrale kutova je, općenito, moguća ali nerješiva zadaća uz pomoć šestara i dva trokuta, tj. mogu se zadati tri dužine takve da postoji trokut kojemu su duljine simetrala kutova jednake duljinama zadanih

dužina ali ga pomoću šestara i 2 trokuta iz zadanih dužina ne možemo konstruirati. Slično je konstrukcija pravilnog sedmerokuta moguća (jer takav poligon postoji) ali nerješiva konstruktivna zadaća pomoću šestara i 2 trokuta.
U konstruktivnoj geometriji (kao i u nastavi) mogu biti dopušteni različiti alati (trokuti, kutomjer, krivuljari...). Ipak, najčešće korišteni alati su:

- *Jednobridno neoznačeno ravnalo, tj. ravnalo kojemu možemo upotrebljavati jedan od dva međusobno paralelna brida i na njemu ne postoji oznaka mjere.*
- *Šestar s promjenjivim, po volji velikim rasponom.*

Konstruktivnu moć ravnala i šestara, odnosno postupke za koje smatramo da su uz njihovu pomoć uvijek izvedivi, opisuju sljedeća dva aksioma:

*A*7. *Ravnalom se mogu izvesti sljedeće konstrukcije:*

- *Konstrukcija dužine ako su zadane njezine rubne točke.*
- *Konstrukcija polupravca ako je zadana njegova rubna točka i još jedna točka tog polupravca.*
- *Konstrukcija pravca ako su zadane dvije njegove različite točke.*

*A*8. *Šestarom se mogu izvesti sljedeće konstrukcije:*

- *Konstrukcija kružnice ako je zadano njezino središte i njezin polumjer.*
- *Konstrukcija bilo kojeg od dva luka kružnice određenog s dvije točke kružnice ako je zadano središte kružnice i krajnje točke tog luka.*

Svaku konstrukciju u kojoj su dopušteni samo gore navedeni alati nazivamo **euklidskom konstrukcijom**.
Konstrukcije koje izravno omogućuju aksiomi $A1$ - $A8$ nazivamo **osnovnim konstrukcijama**. To su: konstrukcija dužine uz dane rubne točke, konstrukcija pravca uz dane dvije različite točke, konstrukcija presjeka dvaju neparalelnih pravaca, konstrukcija kružnice uz dano središte i polumjer, konstrukcija presjeka dviju kružnica, presjeka pravca i kružnice.

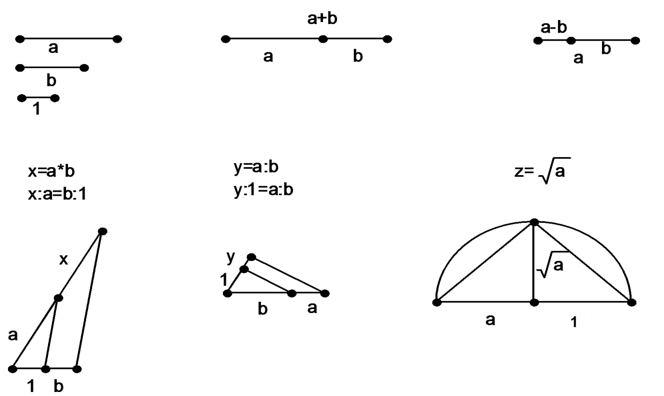
Napomena 2.1. Svaka konstruktivna zadaća koja je rješiva uz dopušteni alat koji se sastoji od šestara i dva neoznačena trokuta (standardni trokuti iz školskog pribora samo bez oznaka za mjeru) rješiva je i euklidskom konstrukcijom, i obratno. Stoga nam je za dopušteni alat dovoljno uzeti ravnalo i šestar.

3 Rješivost konstruktivne zadaće pomoću euklidskih konstrukcija

Iz zadanih dužina i jedinične dužine možemo konstruirati svaku dužinu kojoj je duljina jednaka zbroju, razlici, umnošku, kvocijentu ili kvadratnom korijenu zadanih duljina. Štoviše, vrijedi:

Teorem 3.1. Neka je dano konačno mnogo dužina i neka je $x > 0$ neki pozitivan realan broj. Ako x možemo prikazati pomoću konačno mnogo racionalnih operacija (zbrajanja, oduzimanja, množenja i djeljenja) i konačno mnogo operacija kvadratnog korijenovanja nad duljinama danih dužina, onda možemo iz danih dužina euklidskom konstrukcijom konstruirati dužinu duljine x.

Dokaz ovog teorema proizlazi iz konstrukcija dužina čije duljine odgovaraju zbroju, razlici, umnošku, kvocijentu i drugom korijenu duljina zadanih dužina prikazanih na *Slici 1.*:



Slika 1: Konstrukcije.

Dakle, ako se konstruktivna zadaća riješi algebarski i ako se duljina dužine koja predstavlja rješenje zadatka može izraziti pomoću zadanih duljina pomoću racionalnih operacija i operacija kvadratnog korjenovanja, onda je ta konstruktivna zadaća rješiva.

Gornji teorem nam daje samo dovoljan uvjet za konstrukciju dužine duljine x iz konačno mnogo danih dužina pomoću ravnala i šestara, tj. dovoljan uvjet za rješivost konstruktivne zadaće, ali ne i odgovor na pitanje kada je konstruktivna zadaća rješiva, a kada ne. No, pokazat ćemo da vrijedi i obrat te tvrdnje (vidi [1]).

Teorem 3.2. Neka je zadano konačno mnogo dužina. Ako euklidskom konstrukcijom možemo konstruirati dužinu duljine x, onda se x može prikazati pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i operacija kvadratnog korjenovanja nad duljinama zadanih dužina.

Dokaz. Ako je u ravnini π uveden pravokutni koordinatni sustav, onda svaku točku iz π možemo identificirati uređenim parom (x, y), svaki pravac jednadžbom $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, a svaku kružnicu jednadžbom $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Nadalje, svaka zadana dužina određena je svojim krajnjim točkama čije su koordinate također zadane. Ne smanjujući općenitost smijemo pretpostaviti da svaka zadana dužina ima za rubne točke ishodište i točku $(0, d)$ gdje je d njezina duljina, te da sve pomoćne figure (točke, pravci i kružnice) u ovoj euklidskoj konstrukciji dobijemo u konačno mnogo koraka direktno iz zadanih dužina. Budući se svaka konstrukcija svodi na konačan niz osnovnih konstrukcija, provedimo te pretpostavljene konstrukcije analitički:
1. Pravac koji prolazi danim točkama (a_1, b_1) i (a_2, b_2) ima jednadžbu

$$(b_1 - b_2)\, x + (a_2 - a_1)\, y + a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0.$$

2. Sjecište dvaju neparalelnih pravaca

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_2 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

je točka (x_s, y_s) , gdje je

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \\ y_s &= \frac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}. \end{aligned}$$

Budući ti pravci nisu paralelni, to je

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0.$$

3. Kružnica čije je središte u točki (a_s, b_s) i koja prolazi točkom $(a_{1,} b_1)$ ima jednadžbu

$$x^2 + y^2 - 2a_s x - 2b_s y + a_s^2 + b_s^2 - (a_s - a_1)^2 - (b_s - b_1)^2 = 0.$$

4. Koordinate sjecišta (x_s, y_s) pravca $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ i kružnice $x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ dobivamo rješavanjem sustava ovih dviju jednadžbi. U slučaju da je $b_1 \neq 0$ dobivamo

$$x_s = \frac{-B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}, \;\; y_s = \frac{-a_1}{b_1} x_s - \frac{c_1}{b_1},$$

gdje je

$$\begin{aligned} A &= a_1^2 + b_1^2, \\ B &= b_1^2 a_2 + 2a_1 c_1 - a_1 b_1 b_2, \\ C &= c_1^2 - b_1 c_1 b_2 + b_1^2 c_2. \end{aligned}$$

U slučaju da je $b_1 = 0$ slijedi da je $a_1 \neq 0$, pa dobivamo

$$x_s = \frac{-c_1}{a_1}, \; y_s = \frac{-B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC},$$

gdje je

$$\begin{aligned} A &= a_1^2, \\ B &= a_1^2 b_2, \\ C &= c_1^2 - a_1 c_1 a_2 + a_1^2 c_2. \end{aligned}$$

Ako je $B^2 - 4AC < 0$, onda se pravac i kružnica ne sijeku.
5. Sjecišta dviju kružnica

$$x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

su sjecišta bilo koje od tih kružnica i pravca

$$(a_1 - a_2)\, x + (b_1 - b_2)\, y + c_1 - c_2 = 0,$$

pa se 5. svodi na 4.
Dakle, prateći svaku osnovnu konstrukciju analitički dobivamo točke čije koordinate su izražene preko poznatih (zadanih) koordinata (duljina), pomoću racionalnih operacija i operacija kvadratnog korjenovanja. Stoga, ako je

$$x = |T_1 T_2|\,,$$

gdje je $\overline{T_1 T_2}$ dužina koju dobijemo uz pomoć konačno mnogo osnovnih konstrukcija, onda, budući je

$$|T_1 T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \; T_1\,(x_1, y_1)\,, \; T_2\,(x_2, y_2)\,,$$

x možemo izraziti pomoću konačno mnogo racionalnih operacija i operacija kvadratnog korjenovanja nad duljinama zadanih dužina. $\square$

Ovaj teorem nam daje odgovor o rješivosti konstruktivne zadaće euklidskim konstrukcijama i to algebarskim jezikom.

Napomena 3.1. Budući da je za svaki šiljasti kut jednoznačno određen pravokutan trokut čija je hipotenuza duljine 1, a duljine kateta su sinus, odnosno kosinus toga kuta, to se konstrukcija kuta svodi na konstrukciju dužine, pa konstrukciju kuta posebno ne razmatramo.

Iz prethodnog zaključujemo da je konstruktivna zadaća kojoj je zadana samo jedinična dužina rješiva ako i samo ako je duljina dužine koja rješava tu zadaću konstruktibilan broj, pri čemu neki pozitivni realni broj x nazivamo *konstruktibilnim brojem* ako je moguće iz jedinične dužine euklidskom konstrukcijom konstruirati dužinu duljine x.

No, u slučaju da su u konstruktivnoj zadaći zadane i druge dužine, osim jedinične, vrijedi:

Korolar 3.1. Ako se duljina dužine, koja je rješenje konstruktivne zadaće, ne može izraziti preko zadanih duljina uz pomoć konačno mnogo racionalnih operacija i operacija kvadratnog korjenovanja, onda konstruktivna zadaća nije rješiva i obratno.

Prethodni korolar daje operativni kriterij o nerješivosti, odnosno rješivosti neke konstruktivne zadaće. Budući da nas zanima pitanje rješivosti neke konstruktivne zadaće općenito za zadane podatke, tj. zadane figure koje se svode na zadane dužine, odnosno brojeve koji predstavljaju njihove duljine, to je, za dokaz nerješivosti konstruktivne zadaće, dovoljno promatrati slučaj kada su zadani brojevi racionalni. U tom slučaju je dovoljno ispitati konstruktibilnost broja koji rješava konstruktivnu zadaću. Na takav način se pitanje (ne)rješivosti konstruktivne zadaće svodi na pitanje (ne)konstruktibilnosti broja koji je rješenje algebarske jednadžbe dobivene algebarskim rješavanjem zadanog problema za zadane racionalne brojeve. Ako rješenje takve jednadžbe nije konstruktibilan broj onda konstruktivna zadaća općenito nije rješiva (što ne znači da nije rješiva za neke partikularne zadane podatke).

Budući da nije lako "od oka" utvrditi može li se neki broj prikazati pomoću konačnog niza racionalnih operacija i operacija drugog korijena, prirodno je istražiti jednostavnije kriterije za utvrđivanje konstruktibilnosti nekog broja. Pomoću takvih kriterija bismo lakše utvrdili je li neki broj, koji je rješenje neke algebarske jednadžbe, nekonstruktibilan, a time i dokazali da je konstruktivna zadaća, koja se za početne racionalne podatke svodi na tu jednadžbu, nerješiva.

Očito je da niti jedan transcedentan broj nije konstruktibilan. Stoga je primjerice problem kvadrature kruga (konstruirati kvadrat čija je površina jednaka površini zadanog kruga) koji se svodi na konstrukciju dužine duljine π nerješiv, što je posljedica teorema o transcedentnosti broja π.

Budući je svaki racionalni broj konstruktibilan, to je svaka konstruktivna zadaća, čije se algebarsko rješavanje svodi na linearnu jednadžbu s racionalnim koeficijentima, rješiva. Slično, budući je kvadratni korijen iz konstruktibilnog broja konstruktibilan, to je svaka konstruktivna zadaća čije se algebarsko rješavanje svodi na kvadratnu jednadžbu s racionalnim koeficijentima, rješiva. Za one probleme koji se algebarskim rješavanjem svode na jednadžbu trećeg stupnja s racionalnim koeficijentima od koristi nam je sljedeći teorem (vidi [2]).

Teorem 3.3. Jednadžbi trećeg stupnja s racionalnim koeficijentima su sva rješenja konstruktibilna ako i samo ako ima racionalni korijen.

Pomoću ovoga teorema se lako pokaže da problem duplikacije kocke (konstruirati brid kocke volumena dvostruko većega od volumena zadane kocke) nije rješiv jer se svodi na jednadžbu $x^3 = a$ kojoj rješenja, općenito, nisu konstruktibilni brojevi. Slično se pokaže i da je problem trisekcije kuta (zadani kut podijeliti na tri sukladna kuta) nerješiv. Ovaj problem je naravno moguć, a rješiv može postati ako dopustimo neke dodatne instrumente. Primjerice, ako je u ravnini zadana krivulja Maclaurenova trisektrisa onda je problem trisekcije kuta rješiv. Svakako je prirodnije u dodatni dopušteni alat uvrstiti neku zadanu figuru nego dodatni crtaći instrument (npr. kutomjer) za kojega bismo prvo trebali aksiomom odrediti njegovu konstruktivnu moć (npr. da pomoću kutomjera možemo konstruirati kut zadane lučne mjere, čime bismo tom instrumentu pretpostavili i dopustili prevelike i neprirodne konstruktivne mogućnosti).

Literatura

[1] D.Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[2] B.Pavković, D.Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[3] N. Smajić, *Klasični grčki problemi*, diplomski rad PMF-Split, 2012.