Julijini skupovi i Mandelbrotov skup

Viktorija Sukser

U *PlayMath*-u br. **9** upoznali smo se s fraktalima, ovo je nastavak tog članka.

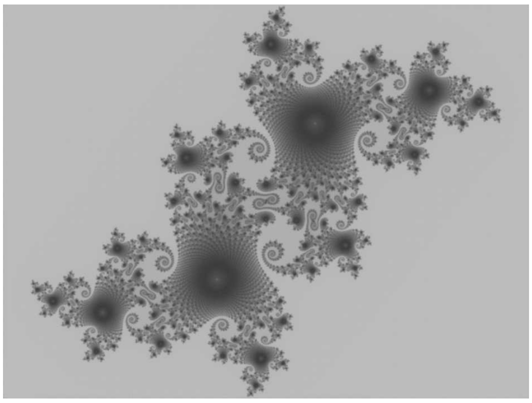
Kao posljednju, najkompleksniju skupinu fraktala navest ćemo **Julijine skupove** i zapanjujuće očaravajući **Mandelbrotov skup**.

Prvo, Julijini skupovi. Matematičar **Gaston Julia** proučavao je kvadratičnu funkciju $f(z) = z^2 + c$ i niz

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c,$$

gdje su z_n, $n \in \mathbb{N}$ i c kompleksni brojevi.

Tom je funkcijom dobio, za različite vrijednosti broja c, grafički prikaz kompleksnih brojeva u kompleksnoj (*Gaussovoj*) ravnini, i ti se skupovi nazivaju po njemu **- Julijini skupovi**. Evo primjera:



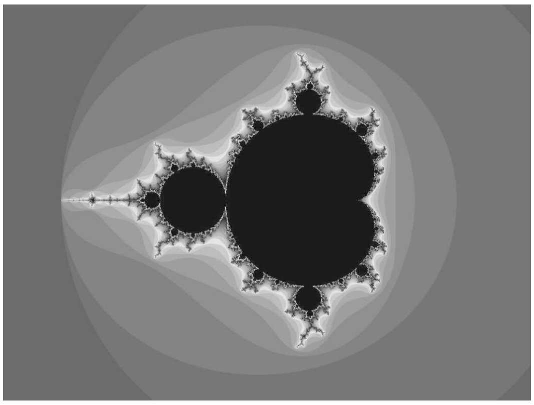
Nakon Julije, matematičar **Benoît Mandelbrot** promatrao je tu istu kvadratičnu funkciju i pripadni niz.

Godine 1979. promatrao je iteracije $z_{n+1} = z_n^2 + c$, pri čemu je smatrao da je riječ o kompleksnim brojevima $z_n = x_n + iy_n$ i $c = a + ib$, gdje je i imaginarna jedinica za koju je $i^2 = -1$. Iz poznatih pravila za množenje i zbrajanje kompleksnih brojeva dobio je jednadžbe za iteraciju x_n i y_n. Promatrao je kako se ponaša niz brojeva dobivenih iteracijom za razne c. Mandelbrotovom skupu pripadaju kompleksni brojevi c za koje apsolutna vrijednost

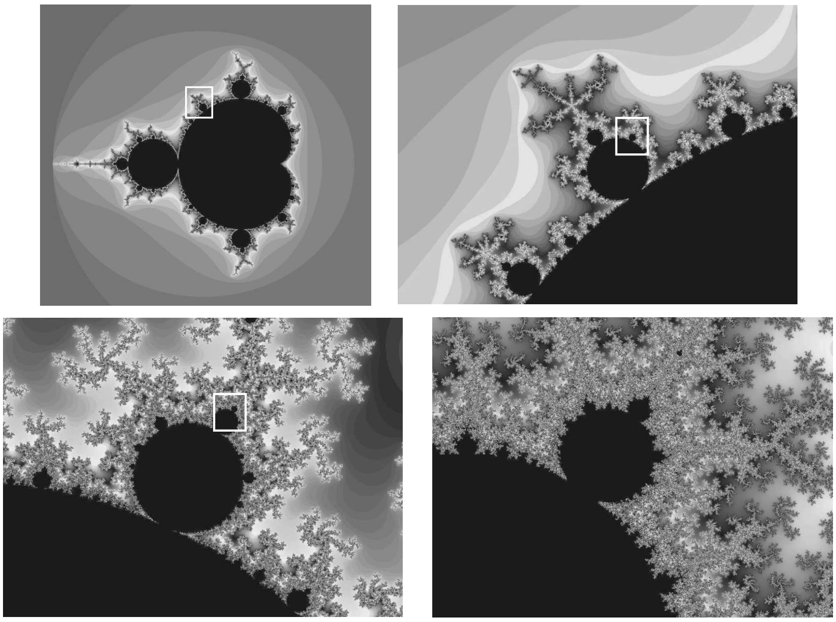
$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

za velike n teži prema konačnom broju.

Pogledajmo grafički prikaz tako definiranog Mandelbrotovog skupa:



Ako povećamo jedan dio skupa, možemo vidjeti nadasve raznolike oblike, koji su vrlo gusti. Još jednim povećavanjem možemo uočiti još raznovrsnije strukture. I daljnjim povećavanjem dolazimo do jednog svojstva vrlo važnog za fraktale (nije nužan element u svim njihovim prikazima, ali je odlika mnogih od njih), a to je samosličnost (spomenuta na početku). To je svojstvo koje kaže da ako uvećamo bilo koji dio fraktala, odnosno fraktalnog skupa, neodređeno mnogo puta, dobit ćemo početni (vanjski) oblik; jednostavnije rečeno, svaki unutarnji oblik sličan je ili čak potpuno isti onome što ga vidimo kao početni prikaz.



Iz toga proizlazi i sličnost između Julijinih skupova i Mandelbrotovog skupa.

Zaključak je stoga da su Julijini skupovi, ”otkriveni” prije Mandelbrotovog, samo mali dijelovi jedne velike tvorevine iznimnih oblika, bogatih strukturalnih linija, neobičnih ali prekrasnih, očaravajućih konstrukcija, za koju mnogi matematičari kažu kako je ona - Mandelbrotov skup - nešto najfascinantnije što se uopće može zamisliti.

Fraktalna je geometrija izgradila temelje novim granama znanosti, primjerice u matematičkom modeliranju: grafičkom oponašanju realnih oblika i prirodnih pojava (kao što su munje, oblaci, planinski reljefi, konture morskih obala), prikazima životinja (poput meduza) i biljaka (npr. mahovine, paprati, pa i cijela stabla); a također je pomoću njih utvrđeno da strukture i organizacije molekula u polimernim materijalima, rast kristala te primjeri difuzije ukazuju na primjenu nekih jednostavnih pravila iteracije.

Naša stvarnost je kaos. Fraktali su ”ljepša polovica”kaosa.

DODATCI

Dodatak I: IFS

U tipične matematičke metode za konstrukciju fraktala spada IFS (engl. *iterated function scheme*). Ona se primjenjuje na fraktalima kod kojih postoji neka pravilnost, i to preko inicijatora i generatora, gdje je inicijator neko početno stanje ili početni zadani prikaz, a generator postupak koji se onda konstantno postavlja na svaki novi dobiveni inicijator.

Dodatak II: Fraktali i kompleksni brojevi

Fraktali mogu biti povezani s kompleksnim brojevima. Ta je situacija obično puka slučajnost i rijetko se gdje događa. Imali smo je priliku vidjeti kod Julijinih skupova te kod Mandelbrotovog skupa. Kako Mandelbrotov skup obuhvaća i Julijine skupove, možemo onda samo reći da je Mandelbrotov skup u stvari grafički prikaz skupa kompleksnih brojeva u kompleksnoj, odnosno Gaussovoj ravnini.

$^{\pi}\mathrm{l}^{\alpha}\sqrt[y]{\mathbf{mat}\chi}$

Dodatak III: Sažete biografije matematičara ključnih za razvoj fraktala

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(03.03.1845., St. Petersburg, Rusija - 06.01.1918., Halle, Njemačka)
Bio je njemački matematičar ruskog podrijetla, najpoznatiji po teoriji skupova i po otkriću beskonačno velikih brojeva. Također je unaprijedio i studiju trigonometrijskih nizova, te je bio prvi koji je dokazao neprebrojivost realnih brojeva i značajno doprinio teoriji dimenzija. Nakon doktorata 1867. godine, prihvatio je mjesto predavača na Sveučilištu u Halleu 1869. godine, gdje je i ostao. Usko povezana za Cantorov rad u teoriji beskonačnih skupova bila je njegova definicija kontinuuma kao povezanog, savršenog skupa. Nikad nije sumnjao u potpunu istinitost svoga rada, no nailazeći na paradokse teorije skupova, Cantor je ostavio "obranu" teorije beskonačnih skupova mlađim matematičarima.

Niels Fabian Helge von Koch
(25.01.1870. - 11.03.1924.)
Švedski matematičar, koji je dao ime poznatom fraktalu znanom kao Kochova krivulja, što je bila jedna od najranije opisanih fraktalnih krivulja. Bio je potomak švedske plemićke obitelji. Von Koch je napisao nekoliko radova o teoriji brojeva. Jedan od njegovih rezultata bio je teorem iz 1901. godine, u kojem on iznosi dokaz kako je Riemannova hipoteza jednaka produženoj formi teorema o prostim brojevima.

Waclaw Franciszek Sierpiński
(14.03.1882. - 21.10.1969.)
Poljski matematičar, rođen u Varšavi, gdje je i umro. Bio je poznat po izvanrednim doprinosima teoriji skupova (istraživanja o aksiomu izbora te hipotezi kontinuuma), teoriji brojeva, teoriji funkcija i topologiji. Objavio je više od 700 radova i 50 knjiga, među kojima su i "Uvod u opću topologiju" (iz godine 1934.) te "Opća topologija" (1952. godine). Tri vrlo poznata fraktala nazvana su po njemu (trokut Sierpinskog, sag Sierpinskog, i krivulja Sierpinskog), kao i brojevi Sierpinskog te, povezan s njima, problem Sierpinskog.

Gaston Maurice Julia
(03.02.1893. - 19.03.1978.)
Bio je francuski matematičar, rođen u alžirskom gradiću Sidi Bel Abbesu. U mladosti bio je vrlo zainteresiran za matematiku i glazbu, ali je njegovo obrazovanje narušio Drugi svjetski rat, kada je pozvan u vojsku. U ratu je pretrpio vrlo ozbiljnu ozljedu - gubitak nosa, koji se poslije nije mogao "nadoknaditi" pa se Julia morao zadovoljiti nošenjem poveza preko mjesta gdje mu je nekad bio nos. Nakon rata bacio se na pisanje matematičkih članaka te je privukao pažnju jednim što ga je napisao i objavio 1918. godine, o iteraciji racionalne funkcije, čime je stekao popularnost ne samo u matematičkim krugovima, već svud diljem svijeta. Njegovim se djelima na području fraktala poslužio i Mandelbrot.

Benoît Mandelbrot
Francuski matematičar, rođen u Varšavi, ostatak života proveo u Francuskoj. U knjizi "Fraktalna geometrija prirode" prikazuje mnogo objekata (prikazi fraktala) do kojih su došli drugi matematičari, gdje je iznimka jedinstveni Mandelbrotov skup. Mandelbrot je ujedinio ove objekte zbog njihovih svojstava, od kojih jedno značajno samosličnost. Također je naglasio upotrebu fraktala kao realističnih i korisnih modela mnogih prirodnih fenomena, uključujući konture obala i riječnih korita, strukturu biljaka, krvnih žila i pluća, skupljanje galaksija, Brownovo gibanje, i dr. Mandelbrot je smatrao da su fraktali mnogo prirodniji oblici od umjetno glatkih i pravilnih objekata tradicionalne euklidske geometrije. Njegov neformalan stil pisanja, te naglasak na vizualnoj i geometrijskoj intuiciji, učinio je "Fraktalnu geometriju prirode" dostupnom i razumljivom nestručnjacima, što mu je donijelo veliku popularnost i dovelo do novog područja znanosti - kaosa.

Literatura

[1] Vjera Lopac: *Do kaosa i natrag - putovanje u nepredvidljivost*, Naklada Jesenski i Turk, Zagreb, 2003.

[2] Mervan Pašić: *Uvod u matematičku teoriju kaosa za inženjere*

[3] Šime Šuljić: *Mandelbrotov skup*, math.e br. **5**, HMD, Zagreb, 2005.