Aritmetički nizovi prostih brojeva

Adrian Satja Kurdija

I prosti brojevi su samo brojevi, što znači da nisu "neuhvatljivi". U ovom članku razmatrat ćemo jednostavne primjere zadataka u kojima je riječ o aritmetičkim nizovima prostih brojeva. Podsjetimo se, niz je aritmetički ako je razlika njegovih uzastopnih članova konstantna, dakle niz oblika $a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots$ Primjeri aritmetičkih nizova su

$$1, 2, 3, 4, \ldots \quad (a_1 = 1, d = 1);$$
$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots \quad (a_1 = 1, d = 2);$$
$$10, 20, 30, 40, \ldots \quad (a_1 = 10, d = 10).$$

Neki primjeri

Riješimo sada neke primjere.

Primjer 1. Nađi tri prosta broja koji čine aritmetički niz s razlikom 8.

Rješenje. Neka su to brojevi p, $p+8$ i $p+16$. Ovi brojevi daju različite ostatke pri dijeljenju s 3, pa je jedan od njih djeljiv s 3. Kako su ovo prosti brojevi, jedina mogućnost je $p = 3$. To su brojevi 3, 11 i 19. ✓

Primjer 2. 15 prostih brojeva čini aritmetički niz. Dokaži da je razlika niza veća od 30000.

Rješenje. Niz je oblika $p_1, p_1+d, \ldots, p_1+14d$. Broj p_1 nije iz skupa {2, 3, 5, 7, 13} jer bi tada u nizu postojao (složen) broj $p_1 + p_1 d$.

Dalje dokažimo da je razlika d djeljiva s 2, 3, 5, 7, 11, 13. Npr., dokažimo da je djeljiva s 13. Kada d ne bi bio djeljiv s 13, tada bi brojevi $p_1, p_1+d, \ldots, p_1+12d$ davali različite ostatke pri dijeljenju s 13 pa bi jedan od njih bio djeljiv s 13, što nije moguće.

Analogno tome, d je djeljiv s 2, 3, 5, 7, 11, 13, pa on nije manji od $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$. ✓

Primjer 3. Nađi 7 različitih prostih brojeva manjih od 1000 koji zadovoljavaju

$$p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = \cdots = p_7 - p_6.$$

Rješenje. Riječ je o aritmetičkom nizu $p_1, p_1+d, \ldots, p_1+6d$. Zbog $p_1 + 6d < 1000$ vrijedi $d < 166$.

Analogno prethodnom primjeru vrijedi $p_1 \geq 7$. Kada bi bilo $p_1 > 7$, tada bi, ponovno analogno prethodnom primjeru, bilo $d \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, što nije moguće. Dakle, $p_1 = 7$. Sada je d djeljiv sa $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Ispitivanjem svih mogućnosti $d = 30, 60, 90, 120, 150$ dobivamo da je jedino rješenje $d = 150$. Traženi brojevi su 7, 161, 307, 457, 607, 757, 907. ✓

Za one koji žele dublje upoznati ovu građu preporučam sljedeće linkove:

`http://mathworld.wolfram.com/PrimeArithmeticProgression.html`

`http://www.dms.umontreal.ca/$\sim$andrew/PDF/PrimePatterns.pdf`

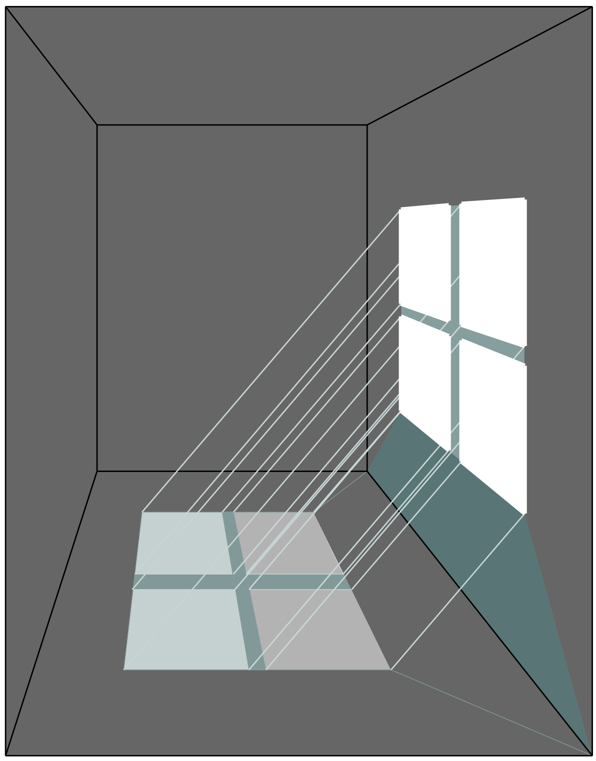
Zanimljivo je da je 2006. godine **Terence Tao** dobio ***Fieldsovu medalju*** za dokaz da postoje po volji veliki konačni aritmetički nizovi prostih brojeva.

Zadatci

Slijedi nekoliko zadataka za samostalni rad:

1. Postoji li geometrijski niz različitih prostih brojeva? (Koeficijent niza ne mora biti cijeli broj.)
2. U 3. primjeru bilo je $p_1 = 7$. Postoji li aritmetički niz različitih prostih brojeva koji započinje sedmicom, a ima više od 7 članova?
3. Pokušajte poopćiti 2. primjer.
4. Postoji li 2003 različitih prostih brojeva manjih od 1234567890 koji čine aritmetički niz?
5. Potražite 4 uzastopna prosta broja koji čine aritmetički niz.
6. Pokušajte napisati što bolji program koji traži aritmetički niz prostih brojeva sa zadanim prvim članom ili razlikom niza.

Slika s nacrtne geometrije
PROZOR



Josip Antološ, 3.razred, XV. gimnazija