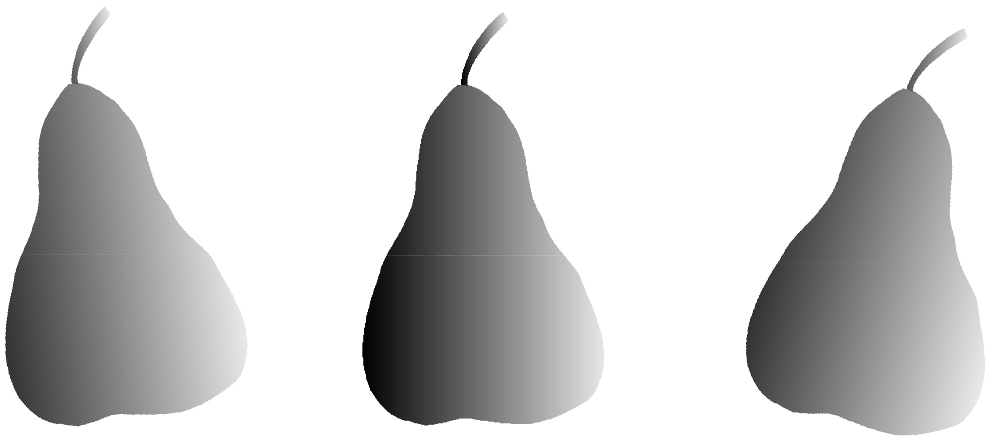
Prebrojimo pomoću polinoma

Matija Varga

Sigurno ste se ponekad u matematičkim zadatcima iz kombinatorike susreli s problemom prebrojavanja. Neki od navedenih problema mogu se rješavati pomoću kombinacija s ponavljanjima, no u nekim je slučajevima problem prebrojavanja složen i lakše ga je riješiti nekim drugim metodama.

Tako ćemo ovdje pokazati rješenje jednog zadatka iz prebrojavanja pomoću polinoma.



ZADATAK 1. U zdjeli imamo 6 krušaka koje moraju podijeliti Marko, Petar i Ivana. Pritom Marko mora dobiti najviše 2, Petar barem 1, a Ivana barem 2, a najviše 4 kruške. Na koliko načina možemo podijeliti kruške?

Označimo s x_1, x_2, x_3 redom broj odgovarajućih krušaka koje trebaju dobiti Marko, Petar i Ivana. Broj načina na koji se kruške mogu podijeliti jednak je broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

uz uvjete $x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 1$ i $2 \leq x_3 \leq 4$.

Sada ćemo svakoj osobi pridružiti odgovarajući polinom koji modelira zadanu situaciju.

1° Marko mora dobiti najviše dvije kruške pa njemu pridružujemo polinom:

$$1 + x + x^2,$$

gdje je $1 = x^0$ slučaj kad Marko ne dobiva nijednu krušku (nula krušaka), $x = x^1$ slučaj kad Marko dobiva jednu krušku i x^2 slučaj kad Marko dobiva dvije kruške.

2° Petar mora dobiti barem jednu krušku, a kako ne može dobiti više od 6 krušaka, njemu pridružujemo polinom

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

3° Ivana mora dobiti barem dvije, a najviše četiri kruške pa joj pridružujemo polinom

$$x^2 + x^3 + x^4.$$

Promatrajmo polinom koji je umnožak prethodno navednih

$$G(x) = (1 + x + x^2)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^2 + x^3 + x^4).$$

Traženi broj raspodjela šest krušaka na troje djece uz zadane uvjete upravo je jednak koeficijentu polinoma $G(x)$ uz x^6, što označavamo $[x^6]G(x)$.

Doista, ako iz prvog polinoma uzmemo član x^2, iz drugog x, a iz trećeg x^3, to odgovara slučaju kada Marko dobiva dvije, Petar jednu, a Ivana tri kruške.

Broj takvih slučajeva je broj raspodjela krušaka, a on je stvarno jednak koeficijentu uz x^6 polinoma $G(x)$.

Preostaje nam doći do tog broja. Kako je

$$G(x) = x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2)^2,$$

potrebno je naći koeficijent uz x^3 polinoma

$$H(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2)^2.$$

Kako bi smo olakšali posao, pozvat ćemo u pomoć jedan od *CAS*[1] programa. U ovom slučaju MAPLE. S manipulacijom algebarskim izrazima sreli smo se u prvom broju ovog časopisa.

Upišimo polinom H:

```
> H:=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)*(1+x+x^2)^2;
```

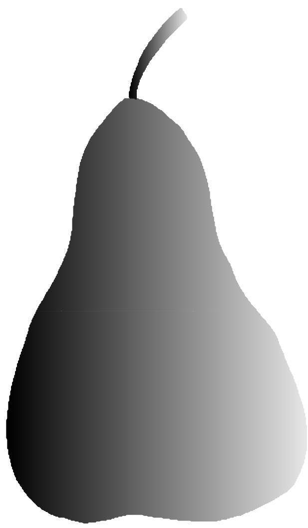
$$H := (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\,(1 + x + x^2)^2$$

MAPLE ima naredbu `coeff(P,x^k)`, koja za polinom P računa koeficijent uz x^k tj. $[x^k]P(x)$. Tako $[x^3]H(x)$ dobivamo

```
> coeff(H,x^3);
```

$$8$$

Dakle, broj načina na koji možemo podijeliti kruške je 8. ♣



[1] *CAS - Computer Algebra System*