ISSN 1864-6168
UDK 62

PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI. METODA BISEKCIJE

APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS. BISECTION METHOD

Marijan Čančarević, Nataša Lončarić

Stručni članak

Sažetak: *U prvom dijelu rada općenito je definiran problem nalaženja približnih realnih rješenja nelinearnih jednadžbi (nultočki neprekidnih funkcija) i izvedena je procjena greške aproksimacije. U nastavku je izložena metoda bisekcije (polovljenja) i analiza greške. Također, rad sadrži matematički softver –Matlab potreban za rješavanje nelinearnih jednadžbi primjenom računala. Sve izloženo popraćeno je riješenim primjerima.*

Ključne riječi: *približno rješenje, nelinearna jednadžba, greška aproksimacije, metoda bisekcije (polovljenja),Matlab, m-file aproksimacija*

Professional paper

Abstract:*In the first part of the paper a general definition of the problem of finding approximate real solutions of nonlinear equations (zeros of continuous functions) is given and an estimate of approximation error is derived. It is followed by exposed Bisection method (The Halving Method) and error analysis. Moreover, this paper presents mathematical software Matlab required for solving nonlinear equations using computers. Everything presented is accompanied by solved examples.*

Keywords:*approximate solution, nonlinear equation, approximation error, Bisection method (The Halving Method), Matlab, m-file approximation*

1. UVOD

Pretpostavimo da je poznato kako se rješavaju jednadžbe $3x-5=0,\ x^2-3x-4=0,\ \sin x+\cos x=1,$ $\log(2x-3)-\log(3x+4)=-1, \ldots.$

Tako npr. jednadžbu

$$\log(2x-3)-\log(3x+4)=-1 \qquad (1)$$

rješavamo na sljedeći način:

$$\log(2x-3)-\log(3x+4)=-1$$

$$\log\frac{2x-3}{3x+4}=\log\frac{1}{10}$$

$$\frac{2x-3}{3x+4}=\frac{1}{10}$$

$$10(2x-3)=3x+4$$

$$17x=34$$

$$x=2$$

Lako provjerimo uvrštavanjem da je $x=2$ rješenje jednadžbe (1).

Što napraviti ako je zadana jednadžba

$$\log(2x-3)=-x$$

koja na prvi pogled izgleda jednostavnije nego prethodno riješena jednadžba? Primjenjujući elementarnu matematiku zadanu jednadžbu nije moguće riješiti i ne preostaje ništa drugo nego da se rješenje traži nekom od metoda numeričke matematike.

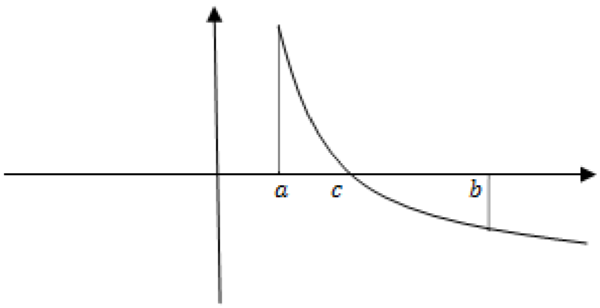
2. PRIBLIŽNO RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

Promotrimo problem nalaženja približnog realnog rješenja (aproksimacije rješenja) jednadžbe

$f(x)=0$ ili nultočke funkcije $f(x)$.

Najprije spomenimo važno svojstvo funkcije neprekidne na segmentu:

Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ i $f(a)\cdot f(b)<0$, onda postoji bar jedan $c\in\langle a,b\rangle$ takav da je $f(c) = 0$. Ako je pritom $f(x)$ strogo monotona funkcija, onda je c jedinstven (slika 1.).



Slika 1. Svojstvo funkcije neprekidne na segmentu

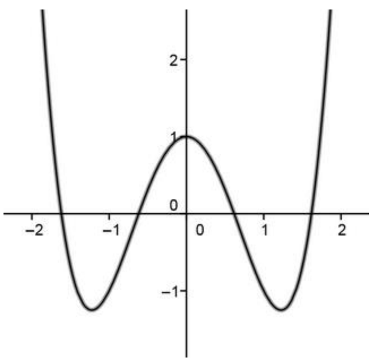
Ovo svojstvo nam omogućava da računski provjerimo postojanje nultočke funkcije u odabranom segmentu . Tako funkcija $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ ima realnu nultočku u intervalu $[1.5,2]$ jer je

$$f(1.5) \cdot f(2) = -\frac{11}{16} \cdot 5 < 0.$$

Lako se vidi da je za svaki $x \in [1.5,2]$ derivacija

$$f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$$

pozitivna, što znači da funkcija $f(x)$raste na intervalu $[1.5,2]$ i da postoji samo jedna nultočka. Često interval u kojem se nalazi nultočka funkcije određujemo grafičkim putem. Ako znamo nacrtati graf funkcije, onda iz grafa iščitamo interval unutar kojeg se nalazi sjecište grafa i osi apscisa (x-osi). Graf funkcije$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ prikazan je na slici 2.

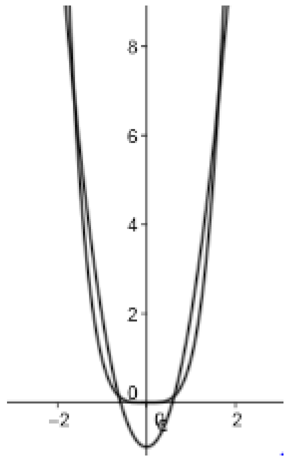


Slika 2. Graf funkcije $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

Iz grafičkog prikaza saznaje se da jednadžba $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ ima četiri realna rješenja, odnosno funkcija $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ ima četiri realne nultočke.

Ako je u jednadžbi $f(x) = 0$ graf funkcije $f(x)$složen za skiciranje, onda jednadžbu (ako je moguće) treba zapisati u obliku $g(x) = h(x)$, pri čemu su nam poznati grafovi funkcija $g(x)$ i $h(x)$.

Rješenja jednadžbe su apscise sjecišta grafova funkcija $g(x)$ i $h(x)$. Jednadžbu $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ možemo zapisati u obliku $x^4 = 3x^2 - 1$ (slika 3.) ili $x^4 + 1 = 3x^2$.



Slika 3. Grafički prikaz rješenja jednadžbe $x^4 = 3x^2 - 1$

Točnost aproksimacije može se ocjenjivati sljedećim teoremom.

Teorem 1. Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$ i derivabilna u $\langle a,b \rangle$. Ako je $c \in [a,b]$ točno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, a c_n približno, onda vrijedi sljedeća nejednakost:

$$|c - c_n| \le \frac{|f(c_n)|}{m}, \ m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)| \qquad (2)$$

Dokaz: Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti između c i c_n postoji broj $\bar{c}$ takav da je

$$f(c) - f(c_n) = f'(\bar{c})(c - c_n).$$

Kako je $f(c) = 0$, dobivamo

$$|c - c_n| = \left| \frac{f(c_n)}{f'(\bar{c})} \right|,$$

a za $m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|$

$$|c - c_n| \le \frac{|f(c_n)|}{m}$$

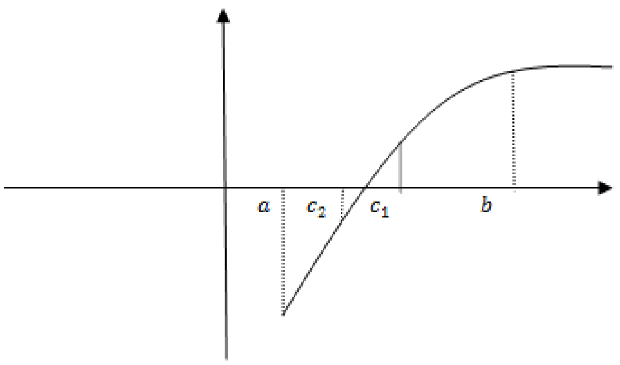
čime smo dokazali nejednakost (2).

Nakon lociranja rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ izabire se neka od metoda za nalaženja približnog rješenja, npr. metoda bisekcije, metoda iteracije, Newtonova metoda, metoda sekante i dr. U nastavku je izložena metoda bisekcije koja je najjednostavnija.

3. METODA BISEKCIJE (POLOVLJENJA)

Pretpostavimo da se u intervalu $[a,b]$ nalazi jedinstveno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, gdje je funkcija $f(x)$ neprekidna (slika 4.). Stavimo $a_1 = a$, $b_1 = b$ i $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Ako je $f(c_1) = 0$, tada je c_1 traženo rješenje . Ako nije i vrijedi $f(a_1) \cdot f(c_1) < 0$, sljedeću aproksimaciju c_2 tražimo u intervalu $[a_1, c_1]$ i uvodimo $a_2 = a_1, b_2 = c_1$ *i* $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$. U slučaju da je

$f(a_1) \cdot f(c_1) > 0$, aproksimaciju c_2 tražimo u intervalu $[c_1, b_1]$i $a_2 = c_1, b_2 = b_1$. Postupak nastavljamo sve dok ne postignemo zadanu točnost (ε) ili unaprijed zadan broj koraka (n).



Slika 4. Metoda bisekcije

Ovime smo definirali niz intervala $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, tj. omeđene i monotone nizove

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \text{ (rastući) i}$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots b_n \geq \cdots \text{ (padajući)}$$

za koje vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Kako je $f(a_n)f(b_n) < 0$ i funkcija $f(x)$ neprekidna, to je $(f(c))^2 \leq 0$, odnosno $f(c) = 0$.

Kad se govori o točnosti aproksimacije, odnosno o apsolutnoj graničnoj grešci, ona je u 1. koraku manja ili jednaka polovini duljine početnog intervala.
Doista, $c \in [a, b]$ i $c_1 = \frac{a+b}{2}$ daje

$$|c - c_1| = \left|c - \frac{a+b}{2}\right| \leq \left|b - \frac{a+b}{2}\right| = \frac{b-a}{2}.$$

Općenito, greška aproksimacije ε rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ nakon n koraka (polovljenja) određena je nejednadžbom

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon.$$

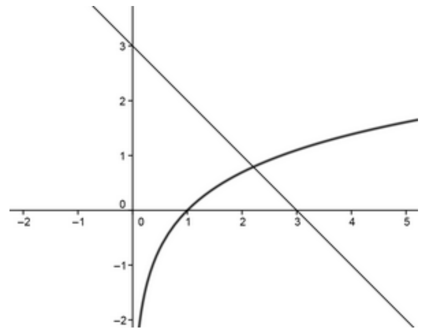
Iz prethodne nejednadžbe nalazimo

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2}, \qquad (3)$$

čime je određen broj koraka koje treba izvršiti da bi aproksimirali rješenje jednadžbe za zadanu točnost ε.

Primjer 1.Riješimo metodom bisekcije jednadžbu $\ln x + x - 3 = 0$ s točnošću $0.5 \cdot 10^{-2}$.

Rješenje: Zapišimo jednadžbu u obliku $\ln x = -x + 3$. Grafički, rješenje jednadžbe je apscisa sjecišta grafova funkcija $g(x) = \ln x$ i $h(x) = -x + 3$ (slika 5.). Sa slike iščitavamo da se krivulje sijeku u intervalu [2,3].



Slika 5. Grafički prikaz rješenja jednadžbe$\ln x = -x + 3$

Činjenice da je funkcija $f(x) = \ln x + x - 3$ neprekidna na segmentu [2,3] i

$$f(2) \cdot f(3) = (\ln 2 + 2 - 3) \cdot (\ln 3 + 3 - 3) < 0$$

potvrđuju točnost izbora intervala određene grafičkim putem. Nađimo još i prirodan broj n za zadanu točnost $0.5 \cdot 10^{-2}$. Uvrstimo li u (3) podatke koje imamo, dobivamo

$$n \geq \frac{\log(3-2) - \log(0.5 \cdot 10^{-2})}{\log 2} \approx 7.6439 \text{ odnosno } n = 8.$$

Radi jednostavnosti, računski dobivene brojeve zaokružujemo na četiri decimale. Preglednost i lakše praćenje postupka i greške aproksimacije omogućuje nam tabela 1.

Tabela 1. Koraci pri određivanju rješenja jednadžbe metodom bisekcije

i	a_i	b_i	c_i	$f(a_i)$	$f(c_i)$	$f(a_i)f(c_i)$	ε
1	2	3	2.5	-	+	-	0.5
2	2	2.5	2.25	-	+	-	0.25
3	2	2.25	2.125	-	-	+	0.125
4	2.125	2.25	2.1875	-	-	+	0.0625
5	2.1875	2.25	2.2188	-	+	-	0.0313
6	2.1875	2.2188	2.2031	-	-	+	0.0156
7	2.2031	2.2188	2.2110	-	+	-	0.0078
8	2.2031	2.2110	**2.2070**				**0.0039**

Dobije se da zadana jednadžba ima približno rješenje $c_8 = 2.2070$ i apsolutnu graničnu grešku aproksimacije $\varepsilon = 0.0039$.

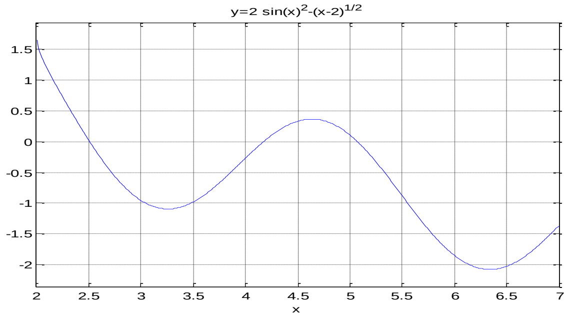
Pokažimo sada kako riješiti problem nalaženja realne nultočke (rješenja jednadžbe) koristeći matematički softver -Matlab.

Primjer 2. Metodom bisekcije odredimo najveću nultočku funkcije $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{x-2}$ za $n = 10$ i procijenimo točnost.

Rješenje: Do rješenja možemo doći istim postupkom kao u prethodnom primjeru. Međutim, račun postaje puno jednostavniji i precizniji ako koristimo neki od mnogo

ponuđenih matematičkih softvera. Riješimo primjer uz primjenu programskog paketa i jezika Matlab.
Najprije lociramo nultočku skiciranjem grafa funkcije $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{x-2}$ (slika 6).

```
>>syms x
>> f=2*sin(x)^2-sqrt(x-2);
>>ezplot(f,[2,7])
>>grid
```



Slika 6. Graf funkcije $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{x-2}$

Zadana funkcija ima tri realne nultočke i najveća se nalazi u intervalu [5,6]. Da nema drugih nultočki većih od 6, lako se vidi usporedbom funkcija $g(x) = 2\sin^2 x$ i $h(x) = \sqrt{x-2}$. Kako za svaki realan broj x vrijedi $2\sin^2 x \leq 2$ i za $x \geq 6$ je $\sqrt{x-2} \geq 2$, zaključujemo da se desno od 6 grafovi funkcija $g(x)$ i $h(x)$ ne mogu sjeći. Naravno, to možemo i grafički utvrditi tako da u naredbi ezplot (f, [2,7]) mijenjamo interval.

Napišimo program **(m-file)** kojim se realizira metoda bisekcije. Program može biti sljedeći:

```
function y=metbis(funkcija,a,b,n)
if subs(funkcija,a)*subs(funkcija,b)>0 ,'greška u ulaznimpodacima', end
formatlong
for k=1:n
c=(a+b)/2;
if abs(subs(funkcija,c))==0, break, end
if subs(funkcija,c)*subs(funkcija,a)>0 a=c;
else b=c; end
end
y=c;
```

Pozovimo sada m–file metbis sa stvarnim parametrima (funkcija= $f, a = 5, b = 6, n = 10$):

```
>> metbis(f,5,6,10)
ans =  5.07128906250000
```

Dakle, deseta c_{10} aproksimacija najveće nultočke funkcije $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{x-2}$ iznosi $c_{10} = 5.0712890625$.

Za graničnu apsolutnu grešku aproksimacije vrijedi:

$$\frac{6-5}{2^{10}} \leq \varepsilon \text{ tj. } 0.0009765625 \leq \varepsilon$$

Napomena 1. Funkcijski m-file metbis (funkcija, a, b, n) omogućuje rješavanje bilo koje nelinerne jednadžbe oblika $f(x) = 0$ (nađemo realne nultočke bilo koje funkcije$f(x)$).

4. ZAKLJUČAK

Određivanje približnih vrijednosti (aproksimacija) nije rezultat samo matematičke teorije nego i realnost. U mnogim slučajevima, iako se zna točan rezultat koji je i praktično izvediv, zbog jednostavnosti primjenjuje se njegova aproksimacija. Tako se umjesto realnog broja s beskonačno mnogo decimalau praksi koristi njegova približna vrijednost s konačno decimalnih mjesta.Zamjenu točnih s približnim vrijednostima osigurava mogućnost praćenja greške. U mnogim praktičnim i teorijskim zadacima okvirno su poznate dopustive vrijednosti greške. Razvoj informacijskih tehnologija omogućava da teorijski razrađene metode i algoritme prilagodimo odgovarajućem softveru, a time povećamo preciznost približnog računa i pojednostavljenje.

5. LITERATURA

[1] Scitovski, R:Numerička matematika, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku,Osijek,2004.

[2] Ivanšić, I.: Numerička matematika, Element, Zagreb, 2002.

[3] Hunt, B.R.; Lipsman, R.I.; Rosenberg J.M.; A Guide to MATLAB for Beginers and Experinced Users, Cambridge University Press, 2001.

[4] Rivier, K.; Čulina, B.; Čančarević, M.:Matematika 1, Vsite, Zagreb,2010.

Kontakt autora:

Nataša Lončarić, prof. matematike
Tehnička škola Čakovec
Tel.: 098522111, e-mail: naloncaric@velv.hr

Marijan Čančarević, prof. matematike
Srednja gospodarska škola Križevci
Tel.: 0917258680
e-mail: marijancancarevic@net.hr