ISSN 1846-6168
UDK 62

KAOTIČNO PONAŠANJE ITERACIJSKOG PROCESA U NEWTONOVOJ METODI – NEWTONOV FRAKTAL

CHAOTIC BEHAVIOUR IN NEWTON ITERATIVE PROCESS APPROACH – NEWTON'S FRACTAL

Sanja Zlatić

Stručni članak

Sažetak: *Ono što se danas naziva Newtonovom metodom Isaac Newton otkrio je oko 1670. godine. Iako je Newtonova metoda veoma stara, tek je nedavno otkriveno da poopćenje ove metode na kompleksnu ravninu dovodi do prekrasnih fraktalnih slika. Kod jednadžbi koje imaju više od jednog rješenja postavlja se pitanje kojem će rješenju voditi Newtonova metoda. Nultočke promatrane funkcije ponašaju se kao magneti za proces iteracije te stvaraju oko sebe tzv. „privlačne bazene“. Rješenje koje će metoda pronaći ovisi o početnoj aproksimaciji. Grafički, svakoj nultočki zadane funkcije pridružena je jedna boja, a točke kompleksne ravnine obojane su bojom nultočke prema kojoj konvergiraju. Granica između privlačnih bazena ekstremno je složen objekt. Iako bazeni sami po sebi nisu fraktalni jer sadrže velike skupove bez ikakve podstrukture, njihove granice imaju fraktalna svojstva. Krenuvši od bilo koje točke na granici bazena uvijek se dobiva prijelaz iteracijskog procesa u kaos.*

Ključne riječi: *aproksimacija, iteracija, Newtonov fraktal, Newtonova metoda*

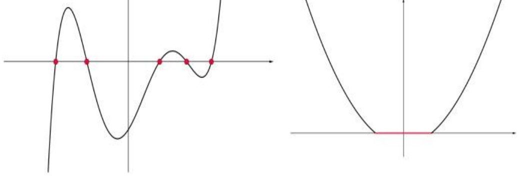
Professional paper

Abstract: *Isaac Newton discovered what we now call Newton's method around 1670. Although Newton's method is an old application of calculus, it was discovered relatively recently that extending it to the complex plane leads to a very interesting fractal pattern. For equations that have more than one solution, the question is which solution will Newton's method lead to. Zeros of the observed function act as magnets for the iteration process and around themselves create the so called 'attractive pools.' The solution the method will find depends on the initial approximation. Graphically, each zero for given function is associated with a single colour, and the point of the complex plane are painted in the colour of the zero which they converge on. The boundary between the attractive pools is an extremely complicated subject. Although the pools themselves are not fractal because they contain large sets without any substructure, their boundaries have fractal properties. Starting from any point on the border of the pool, we always get the transition of iterative process into chaos.*

Key words: *approximation, iteration, Newton's fractal, Newton's method*

1. UVOD

Računanje nultočaka nelinearnih funkcija jedan je od najčešćih zadataka primijenjene matematike. Neka je zadana funkcija $f: I \to \mathbb{R},\ I \subset \mathbb{R}$. Traže se svi $x \in I$ za koje vrijedi $f(x) = 0$. Takve točke zovu se rješenja (korijeni) pripadne jednadžbe ili nultočke funkcije f. Pretpostavlja se da je funkcija f neprekidna na intervalu I te da su joj nultočke izolirane. U protivnom bi postojao problem konvergencije (slika 1.).

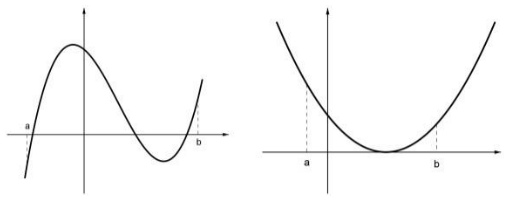


Slika 1. Graf neprekidne funkcije s izoliranim nultočkama (lijevo) i graf funkcije s prekidom (desno)

Traženje nultočaka na zadanu točnost sastoji se od dva koraka: izolacije nultočke, tj. nalaženje intervala unutar kojeg se nultočka nalazi, te iterativnog nalaženja nultočke na traženu točnost. Interval unutar kojeg se nalazi nultočka funkcije može se odrediti tako da se pronađu vrijednosti a i b za koje vrijedi:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad (1)$$

Relacija (1) osigurava postojanje barem jedne nultočke unutar intervala $[a, b]$ (slika 2. lijevo). S druge strane, ako je $f(a) \cdot f(b) > 0$ to ne mora značiti da f nema unutar $[a, b]$ nultočku (slika 2. desno). Može se dogoditi da su nultočke loše separirane ili da f ima unutar intervala $[a, b]$ paran broj (brojeći ih s višestrukostima) nultočaka ili nultočku parnog reda.



Slika 2. Graf funkcije s tri nultočke unutar intervala I=$[a,b]$ za koji vrijedi $f(a)\cdot f(b)<0$ (lijevo), te graf funkcije s dvostrukom nultočkom unutar intervala I=$[a,b]$ za koji vrijedi $f(a)\cdot f(b)>0$ (desno)

Metode za nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija na zadanu točnost razlikuju po tome hoće li uvijek konvergirati ili neće konvergirati, te po brzini konvergencije. Uobičajen je slučaj da brze metode nemaju sigurnu konvergenciju, dok je sporije metode imaju. Brzina konvergencije definira se pomoću reda konvergencije metode.

Definicija 1. Niz iteracija $(x_n,\ n\in\mathbb{N}_0)$ konvergira prema točki α s redom konvergencije $p, p\ \geq 1$ ako vrijedi

$$|\alpha-x_n|\leq c|\alpha-x_{n-1}|^p,\ n\in\mathbb{N} \qquad (2)$$

za neki $c\ >0$. Ako je $p=1$, kaže se da niz konvergira linearno prema α. U tom slučaju je nužno da je $c\ <1$ i c se obično naziva faktor linearne konvergencije.
Relacija (2) katkad nije pogodna za linearne iterativne algoritme. Ako se za slučaj $p=1$ i $c<1$ u (2) upotrijebi indukcija po n, tada slijedi da je:

$$|\alpha-x_n|\leq c^n|\alpha-x_0|,\ n\in\mathbb{N} \qquad (3)$$

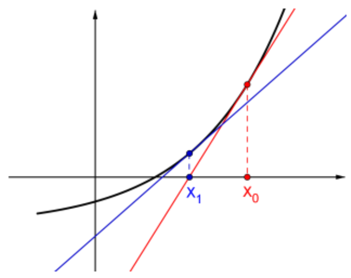
Ponekad je mnogo lakše dokazati da vrijedi (3) nego (2). U slučaju (3) kaže se da niz iteracija konvergira linearno s faktorom c. [1]

2. NEWTONOVA METODA ILI METODA TANGENTE

Newtonova metoda ili metoda tangente je klasična shema rješavanja jednadžbi sve boljim aproksimacijama. Metoda počinje procjenom. Primjenom uzastopnih ponavljanja, tj. iteracija procjena vodi sve boljoj i boljoj procjeni. Proces iteracije približava se odgovoru kao dinamički sustav koji traži svoje stabilno stanje. Newtonova metoda je djelotvorna za polinomne jednadžbe višeg stupnja koje nisu izravno rješive. Kako je iteracija glavna snaga računala, pogodna je i za mnoštvo računalnih algoritama. [2]

2.1. Geometrijska interpretacija Newtonove metode

Ideja Newtonove metode je graf funkcije f aproksimirati tangentom. Pretpostavlja se da je zadana početna točka x_0. Ideja metode je povući tangentu na graf funkcije f u točki $T_0\big(x_0,f(x_0)\big)$ te definirati novu aproksimaciju x_1 u točki presjeka tangente s osi x (slika 3.). Dakle, Newtonova, Newton-Raphsonova ili metoda tangente sastoji se u tome da se $n+1$ – va aproksimacija x_{n+1} odredi kao sjecište x osi i tangente na graf funkcije f u točki s apscisom x_n.



Slika 3. Geometrijska interpretacija Newtonove metode

Iz interpretacije se vidi da se točka x_{n+1} u odnosu na x_n nalazi u smjeru pada funkcije f (pod uvjetom da je $f'(x_n)\ \neq 0$, što je nužno da bi se mogao napraviti korak Newtonove metode). Na osnovu ovog zapažanja može se konstruirati globalno konvergentna Newtonova metoda. Polazeći od aproksimacije x_n konstruira se x_{n+1} Newtonovim korakom. Nova aproksimacija se prihvaća ako vrijedi:

$$|f(x_{n+1})|<|f(x_n)| \qquad (4)$$

U suprotnom se zaključuje da je Newtonova iteracija otišla predaleko te treba smanjiti korak. Ako se korak dovoljno smanji dolazi se do prihvatljive aproksimacije. Dakle, umjesto x_{n+1} uzima se $\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ kao nova aproksimacija te se ponavlja postupak polovljenja sve dok uvjet (4) ne bude zadovoljen. Jednadžba tangente u točki $T_n\big(x_n,f(x_n)\big)$ glasi:

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n) \qquad (5)$$

Pri tome je f' oznaka za derivaciju funkcije f. S obzirom na to da tangenta u točki $T_n\big(x_n,f(x_n)\big)$ siječe os x u x_{n+1}, iz zahtjeva $y=0$ za $x_{n+1}=x$ slijedi da je nova aproksimacija dana izrazom:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n\geq 0\ , \qquad (6)$$

uz pretpostavku da $f'(x_n)$ postoji te da je $f'(x_n)\neq 0, \forall x_n$ [1,3].

2.2. Analitički izvod Newtonove metode

Do Newtonove metode može se doći i analitički. Neka je α nultočka funkcije f. Pretpostavka je da je funkcija f dva puta neprekidno derivabilna na nekom intervalu oko α, tj. da je $f\in C^2(I)$, $\alpha\in I$. Neka je $x_n\in I$ aproksimacija nultočke α. Funkcija f može se razviti u Taylorov red oko x_n do uključivo prvog člana:

$$f(x)=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+\frac{f''(\xi_n)}{2}(x-x_n)^2 \qquad (7)$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n, tj. $\xi_n\in I$. Uvrštavanjem nultočke $x=\alpha$ u relaciju (7) slijedi:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2 \quad (8)$$

Uz pretpostavku da je $f'(x_n) \neq 0$, sređivanjem jednadžbe (8) dobiva se:

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \quad (9)$$

Ako se pretpostavi da je aproksimacija x_n dovoljno blizu α, tj. da je $|\alpha - x_n|$ mali, slijedi da je $(\alpha - x_n)^2$ puno manji što znači da se zadnji član u relaciji (9) može zanemariti. Dakle, uz pretpostavku da je $x_{n+1} \approx \alpha$, vrijedi[1, 4]:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (10)$$

2.3. Analiza konvergencije i ocjena greške Newtonove metode

Aproksimacijom grafa funkcije tangentom gubi se sigurna konvergencija metode. Ovisno o početnoj aproksimaciji, može se dogoditi da metoda ne konvergira prema nultočki funkcije. Uvrštavanjem relacije (10) u (9) dobiva se:

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \quad (11)$$

Iz jednadžbe (11) može se zaključiti da je Newtonova metoda, kad konvergira, kvadratno konvergentna. Takav zaključak vrijedi samo ako $f'(x_n)$ ne teži k nuli tijekom cijelog procesa, tj. ako je $f'(\alpha) \neq 0$, dakle ako je nultočka jednostruka.

Teorem 1. Neka su f, f' i f'' neprekidne za sve x u nekom intervalu koji sadrži jednostruku nultočku α. Ako je početna aproksimacija x_0 izabrana dovoljno blizu nultočke α, niz iteracija x_n konvergirat će prema α s redom konvergencije $p = 2$. Štoviše, vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \quad (12)$$

Ovaj teorem daje dovoljne uvjete za tzv. lokalnu konvergenciju Newtonove metode prema jednostrukoj nultočki α. Konvergencija je lokalna jer je postavljen uvjet da početna aproksimacija mora biti dovoljno blizu nultočke.

Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je $I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}, |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$ segment radijusa ε oko α. Uz pretpostavku da je f klase $C^2(I_\varepsilon)$ za sve dovoljno male ε, definira se:

$$m_1(\varepsilon) = \min_{x\in I_\varepsilon} |f'(x)| \quad (13)$$

$$M_2(\varepsilon) = \max_{x\in I_\varepsilon} |f''(x)| \quad (14)$$

$$M(\varepsilon) = \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} \quad (15)$$

Ako je ε toliko mali da vrijedi $\varepsilon < \frac{1}{2M(\varepsilon)}$, tada je za bilo koju početnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$ Newtonova metoda dobro definirana i konvergira barem kvadratno prema jedinoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.

U nekim situacijama ovaj rezultat o lokalnoj konvergenciji može se iskoristiti kako bi se osigurala konvergencija Newtonove metode. Uz pretpostavku da je locirana nultočka α funkcije f u segmentu $[a, b]$ i da je $f \in C^2[a, b]$, definira se $m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ i $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Neka je f strogo monotona na $[a, b]$, što je ekvivalentno s $m_1 > 0$. Tada f ima jedinstvenu nultočku α na $[a, b]$.

Veličine m_1 i M_2 daju i lokalne ocjene greške iteracija u Newtonovoj metodi, uz uvjet da su sve iteracije u segmentu $[a, b]$. Ocjena greške za svaku iteraciju x_n u Newtonovoj metodi glasi:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \quad (16)$$

Ako je ε gornja ograda za apsolutnu grešku, tj. tražena točnost, tada zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon \quad (17)$$

$$\text{tj.} \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}. \quad (18)$$

garantira da vrijedi $|\alpha - x_0| \leq \varepsilon$ do na grešku zaokruživanja. Relaciju (18) zovemo kriterij zaustavljanja iteracije u Newtonovoj metodi.

U analizi konvergencije i ocjeni greške korištena je pretpostavka da je funkcija f strogo monotona na $[a, b]$, tj. da prva derivacija f' ima fiksni predznak na cijelom intervalu. Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, može se dobiti i globalna konvergencija Newtonove metode uz odgovarajući izbor početne aproksimacije.

Teorem 2. Neka je $f \in C^2[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ i neka prva i druga derivacija f' i f'' nemaju nultočku u $[a, b]$, tj. imaju konstantan predznak na $[a, b]$. Ako polazna iteracija x_0 iz intervala $[a, b]$ zadovoljava uvjet

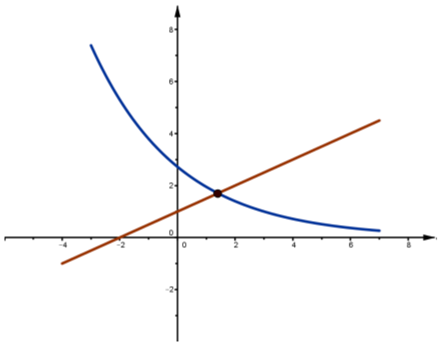
$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0, \quad (19)$$

tada niz iteracija dobiven Newtonovom metodom konvergira prema jedinstvenoj jednostrukoj nultočki funkcije f. [1,4]

2.4. Rješavanje nelinearnih jednadžbi Newtonovom metodom

Primjer 1. Uz pomoć softwera Matlab R2012a, Newtonovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$ određena je nultočka funkcije $f(x) = e^{-\frac{x}{3}+1} - \frac{x}{2} - 1$.

S obzirom na to da je traženje nultočke funkcije f ekvivalentno traženju rješenja jednadžbe $e^{-\frac{x}{3}+1} = \frac{x}{2} + 1$, u svrhu izolacije nultočaka zadane funkcije, nacrtani su grafovi funkcija $f_1(x) = e^{-\frac{x}{3}+1}$ i $f_2(x) = \frac{x}{2} + 1$ te je određen interval u kojem se nalazi točka presjeka.



Slika 4. Graf funkcije $f_1(x) = e^{-\frac{x}{3}+1}$ i $f_2(x) = \frac{x}{2} + 1$

Iz slike se može zaključiti da zadana funkcija ima jedinstvenu nultočku u intervalu $I = [1,2]$. Prva i druga derivacija funkcije f glase:

$$f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}+1} - \frac{1}{2} \tag{20}$$

$$f''(x) = \frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}+1} \tag{21}$$

Dakle, $m_1 = \min_{x\in[1,2]}|f'(x)| = 0.965204141696$,

$M_2 = \max_{x\in[1,2]}|f''(x)| = 0.588276672276$.

Kriterij zaustavljanja:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.001811481 \tag{22}$$

S obzirom na to da vrijede uvjeti teorema 2, u svrhu osiguravanja sigurne konvergencije prema nultočki funkcije za početnu aproksimaciju uzima se da je $x_0 = 2$. U Matlabu je napravljena funkcija newton [5]:

```
function newton(f, df, x0, e, m1, M2)

format long
    if nargin ~= 6
        error('pogresan unos elemenata');
    end

    f = inline(f);
    df = inline(df);
                x(1) = x0 - (f(x0)/df(x0));
    ex(1) = abs(x(1)-x0);
    k = 2;
    g=sqrt(2*m1*e/M2);

    while (ex(k-1) > g)
        x(k) = x(k-1) - (f(x(k-1))/df(x(k-1)))
        ex(k) = abs(x(k)-x(k-1));
        k = k+1;
    end

end
```

Prilikom poziva funkcije newton unosi se zadana funkcija, derivacija funkcije, početna aproksimacija, tražena točnost te m1 i M2. Kao izlaz, funkcija vraća aproksimaciju nultočke funkcije dobivene u svakom koraku iteracije.

Tabela 1. Newtonova metoda za traženje nultočke funkcije $\boldsymbol{f(x) = e^{-\frac{x}{3}+1} - \frac{x}{2} - 1}$

broj iteracija	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	x_n
1	0.626175902905177	1.373824097094823
2	0.030405944185757	1.404230041280580
3	0.626175902905177	1.373824097094823
4	0.030405944185757	1.404230041280580
5	0.000082463914584	1.404312505195164

Nultočka zadane funkcije, uz traženu točnost, dobivena je nakon provedenih 5 iteracija i iznosi:

$$x_5 = 1.404312505195164$$

Primjer 2. Neka je zadan polinom $f(x) = x^3 - 4x$. Zadana funkcija ima tri realne nultočke $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. Postavlja se pitanje kojem će rješenju težiti Newtonova metoda prilikom nasumičnog odabira početne aproksimacije. Funkcija newton2 za unesenu proizvoljnu početnu aproksimaciju izvršava korak Newtonove metode sve dok nije zadovoljen uvjet $f(x) = 0$, ili je napravljen maksimalan broj iteracija zadan u pozivu funkcije [5].

```
function  [x] = newton2(f, df, x0, iter)

format long
    if nargin ~= 4
        error('pogresan unos elemenata');
    end

    f = inline(f);
    df = inline(df);

    x(1) = x0 - (f(x0)/df(x0));
    k = 2;

    while (k <= iter) && (f(x(k-1)) ~= 0)
        x(k) = x(k-1) - (f(x(k-1))/df(x(k-1)));
        k = k+1;
    end

end
```

Domena funkcije podijeljena je na tri intervala: $< -\infty, -2 >$, $< -2, 2 >$, $< 2, \infty >$. Promatrano je kamo teži niz iteracija u ovisnosti o intervalu u kojem se nalazi početna aproksimacija.

Tabela 2. Konvergencija Newtonove metode prilikom traženja nultočke funkcije $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 4x}$ za nasumično odabranu početnu aproksimaciju iz intervala $< -\infty, -2 >$

broj iteracija	x_n			
0	-16	-8	-4	-2.5
1	-10.7225	-5.44681	-2.90909	-2.11864
2	-7.23221	-3.80208	-2.30209	-2.00928
3	-4.94760	-2.79226	-2.05065	-2.00006
4	-3.48841	-2.24552	-2.00182	-2.00000
5	-2.61177	-2.03516	-2.00000	
6	-2.16421	-2.00089		
7	-2.01698	-2.00000		
8	-2.00021			
9	-2.00000			

S obzirom na dobivene rezultate može se pretpostaviti da za početne aproksimacije iz intervala $<-\infty,-2>$ niz iteracija x_n konvergira prema nultočki $x_n=-2$.

Tabela 3. Konvergencija Newtonove metode prilikom traženja nultočke funkcije $\boldsymbol{f(x)=x^3-4x}$ za nasumično odabranu početnu aproksimaciju iz intervala $<\mathbf{2},\infty>$

broj iteracija	x_n			
0	16	8	4	2.5
1	10.7225	5.44681	2.90909	2.11864
2	7.23221	3.80208	2.30209	2.00928
3	4.94760	2.79226	2.05065	2.00006
4	3.48841	2.24552	2.00182	2.00000
5	2.61177	2.03516	2.00000	
6	2.16421	2.00089		
7	2.01698	2.00000		
8	2.00021			
9	2.00000			

Analogno intervalu $<-\infty,-2>$, za početnu aproksimaciju iz intervala $<2,\infty>$ niz iteracija konvergira prema nultočki $x_n=2$. Izvršavanje funkcije newton2 za različite početne aproksimacije dovodi do zaključka da što je početna aproksimacija bliže nultočki, kovergencija Newtonove metode je brža.

Tabela 4. Konvergencija Newtonove metode prilikom traženja nultočke funkcije $\boldsymbol{f(x)=x^3-4x}$ za nasumično odabranu početnu aproksimaciju iz intervala $<-\mathbf{2},\mathbf{2}>$

broj iteracija	x_n			
0	-1.2	-1.1	-0.9	-0.8
1	-10.8000	7.19459	0.92866	0.49231
2	-7.28326	4.92321	-1.13380	-0.07291
3	-4.98070	3.47320	20.31275	0.00019
4	-3.50907	2.60320	13.58574	0.00000
5	-2.62345	2.16057	9.12306	
6	-2.16920	2.01629	6.18106	
7	-2.01794	2.00020	4.26972	
8	-2.00024	2.00000	3.07109	
9	-2.00000		2.38449	
10			2.07663	
11			2.00404	
12			2.00001	
13			2.00000	

Za početne aproksimacije iz intervala $<-2,2>$ situacija je malo složenija. Iz dobivenih rezultata vidi se da za vrlo male razlike u početnim aproksimacijama niz iteracija teži različitim nultočkama, i to ne uvijek onoj najbližoj kao što je pretpostavljeno da će se dogoditi. Za početne aproksimacije $x_0=-1.1$ i $x_0=-0.9$ niz iteracija teži nultočki $x_n=2$ usprkos tome što se nultočke -2 i 0 nalaze bliže.

3. NEWTONOV FRAKTAL

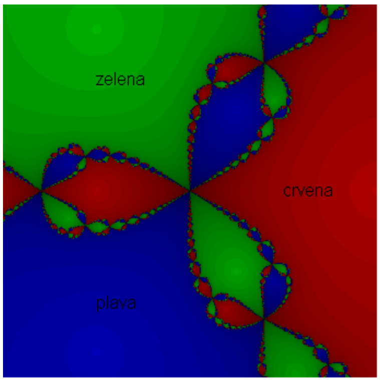
Ako se Newtonova metoda poopći na kompleksnu ravninu, gdje se ona sustavno provodi za svaku točku promatranog uzorka $\mathbb{C}-$ ravnine za neki zadani polinom, dobiva se grafička interpretacija problema gdje se kao direktni nedostatak iteracijske metode javljaju fraktalni uzorci. Sama priroda složenog (pa i realnog) iteratora izrazito je osjetljiva na početne uvjete te se on može promatrati u kontekstu dinamičkog sustava, gdje je njegovo buduće stanje definirano sadašnjim stanjem uz neke dodatne uvjete i parametre. Poopćenje problema na kompleksnu ravninu generira uistinu fascinantne fraktalne skupove koji su ostvareni Matlabom R2012a. [6,7]

```
p=zeros(n,n);z=p;l=p;a=p;
solmap=zeros(n,n,3);
x=linspace(-1,1,n);
y=x;
[X,Y] = meshgrid(x,y);
for k=1:n
    for j=1:n
        z(k,j)=x(j)+1i*y(n+1-k);
        m=(z(k,j));
        while abs(f(m)) > 1e-6
            m=m-((f(m)/g(m)));
            a(k,j)=imag(m);
            if a(k,j)<1e-6 && a(k,j)>-1e-6
                a(k,j)=0;
            end
            p(k,j)=p(k,j)+1;
        end
    end
end
maxp=max(max(p));
for k=1:n
    for j=1:n
        if a(k,j) == 0
            solmap(k,j,1)=1-(p(k,j)/maxp)^0.4;
        elseif a(k,j)> 0
            solmap(k,j,2)=1-(p(k,j)/maxp)^0.4;
        else
            solmap(k,j,3)=1-(p(k,j)/maxp)^0.4;
        end
    end
end
pcolor(X,Y,p);
colormap pink;
shading interp;
axis equal tight;
figure
imagesc(solmap);
text(250,200,['zelena'],...
    'VerticalAlignment','middle',...
    'HorizontalAlignment','left',...
    'FontSize',12)
text(750,500,['crvena'],...
    'VerticalAlignment','middle',...
    'HorizontalAlignment','left',...
    'FontSize',12)
text(250,800,['plava'],...
    'VerticalAlignment','middle',...
    'HorizontalAlignment','left',...
    'FontSize',12)
shading interp; axis equal tight off;
```

Točki složene ravnine boju se može pridružiti na dva načina: prema kriteriju konvergencije i kriteriju iteracije. Kriterij konvergencije svakoj nultočki polinoma pridružuje jedinstvenu boju. Točka koja u iteracijskom procesu konvergira ima boju korijena prema kojem konvergira, a sve divergentne točke imaju svoju nezavisnu boju. Kriterij iteracije svakoj točki složene ravnine pridružuje boju s obzirom na broj iteracija potrebnih da točka dosegne svoje konačno stanje.

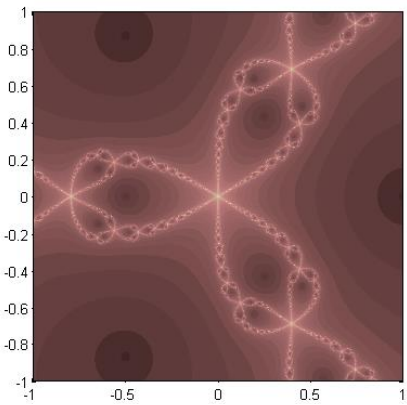
Polinom trećeg stupnja $f(z)=z^3-1$ ima tri rješenja. Jedno realno $z_1=1$ i dva složena $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Prikazani u kompleksnoj ravnini, ova tri korijena vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Te su nultočke ekvidistantni složeni brojevi kojima se argumenti razlikuju za višekratnik od 120°.

Zamislimo li složenu ravninu kao glatku površinu s tri duboke udoline u koju je s nekog položaja puštena kuglica, postavlja se pitanje u koju će se dolinu kuglica otkotrljati. Uz pomoć računala može se nacrtati slika tako da su točke obojane s tri različite boje ovisno o tome kojem rješenju teže. Nijansa boje ovisi o brzini konvergencije kojom točka teži prema rješenju. Grubom procjenom može se zaključiti da dinamika Newtonove metode dijeli plohu na tri dijela. Općenito, točke blizu određenog rješenja brzo vode tom rješenju. Sustavno računalno istraživanje pokazuje složeniji ustroj. Dok se neke početne procjene brzo približavaju korijenu, druge nasumično poskakuju naokolo prije nego što se napokon upute prema rješenju. Ponekad se čini da će točka upasti u beskonačan ciklus koji će se zauvijek ponavljati, nikad ne dostižući jedno od tri rješenja. Ovim problemom bavio se američki matematičar John Hubbard. Istražujući prostor sve dalje i dalje u sve finijim pojedinostima, Hubbard i njegovi studenti bili su zapanjeni slikom koja se počela pojavljivati. Primijetili su da nijedna točka nije granica između samo dvije boje. Kad god se dvije boje pokušavaju spojiti, treća se uvijek umeće nizom novih, sebi sličnih upada (slika 5.). Izgleda nemoguće, ali svaka granična točka graniči s područjem svake od triju boja. [2,6]



Slika 5. Newtonov fraktal za polinom $f(z) = z^3 - 1$ nastao pridruživanjem boje prema kriteriju konvergencije

Točke koje su obojane crvenom bojom konvergiraju prema 0, obojane plavom bojom prema $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, a obojane zelenom bojom konvergiraju prema $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.



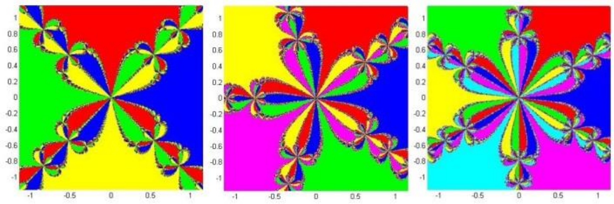
Slika 6. Newtonov fraktal za polinom $f(z) = z^3 - 1$ nastao pridruživanjem boje prema kriteriju iteracije

Na slici 6. najtamnijom bojom obojane su nultočke funkcije. Broj iteracija u tim točkama očito je jednak nuli. Svjetlijim točkama trebalo je više vremena da konvergiraju. Točke obojane potpuno bijelom bojom nisu uopće konvergirale, pri čemu je uvažena činjenica da je broj iteracija limitiran nekim konačnim iznosom u svrhu sprečavanja beskonačne petlje. Fraktalni skup realiziran na ovaj način daje globalni uvid u brzinu promjene složenog dinamičkog sustava na promatranom uzorku kompleksne ravnine.

Koristeći se Matlabom R2012a, Newtonova metoda primijenjena je na polinom $z^4 - 1$. Nultočke polinoma su $1, -1, i, -i$. Kaos se očituje na simetralama I. i III. te II. i IV. kvadranta jer se ovdje nalaze točke koje su na jednakim udaljenostima od spomenutih nultočaka (slika 7.). Funkcijom newtonfractal generirani su newtonovi fraktali za različite polinome [9].

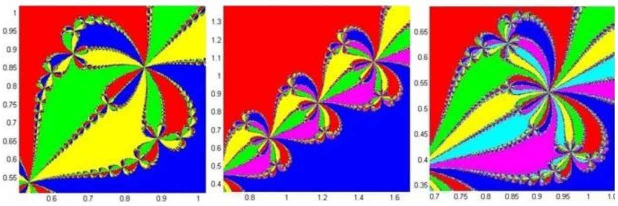
```
function newtonfraktal(koef,br,raspon)


greska = 10^(-3);
maxiteracija = 1000;


if nargin ~= 3
        error('pogresan unos elemenata');
end

korijen = roots(koef);
st = length(koef)-1;

if st>6
   error(sprintf('broj koeficijenata mora biti manji
   ili jednak 6'))
end


if (nargin < 3)
   margin = 0.5;
   xlow =  min(real(korijen));
   xhigh = max(real(korijen));
   ylow =  min(imag(korijen));
   yhigh = max(imag(korijen));
   xmin = xlow-margin*(max(xhigh-xlow,1));
   xmax = xhigh+margin*(max(xhigh-xlow,1));
   ymin = ylow-margin*(max(yhigh-ylow,1));
   ymax = yhigh+margin*(max(yhigh-ylow,1));

else
   xmin = raspon(1);
   xmax = raspon(2);
   ymin = raspon(3);
   ymax = raspon(4);
end


x = linspace(xmin,xmax,br);
y = linspace(ymin,ymax,br);
boje = 'mcbryg';
brojacboje = zeros(1,st);
bojanje = zeros(st,br^2);
p = [st:-1:1].*koef(1:st);


for u=x
    for v=y
z = u+v*i;
z0 = z;
err = inf;
iteracija = 0;


while ((err > greska) & (iteracija<maxiteracija))
f = polyval(koef,z);
fd = polyval(p,z);
znew = z-polyval(koef,z)/polyval(p,z);
err = abs(z-znew);
iteracija = iteracija+1;
z = znew;
end
```

```
if err <= greska
  root = z;
else
   root = NaN;
end

[razlika,kojikorijen]=min(abs(root-korijen));
brojacboje(kojikorijen)=brojacboje(kojikorijen)+1;
bojanje(kojikorijen,brojacboje(kojikorijen))=z0;
     end
end


figure(1)
clf()
hold on


for k = 1:st
    plotarg = strcat(boje(k),'.');
    boja = bojanje(k,1:brojacboje(k));
    plot(boja,plotarg,'MarkerSize',1)
end
axis('equal')
axis([xmin xmax ymin ymax])
hold off
```

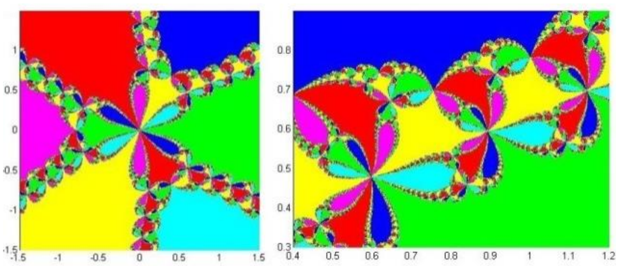


Slika 7. Newtonovi fraktali za polinome $f(z) = z^4 - 1$, $f(z) = z^5 - 1$ i $f(z) = z^6 - 1$ nastali pridruživanjem boje prema kriteriju konvergencije

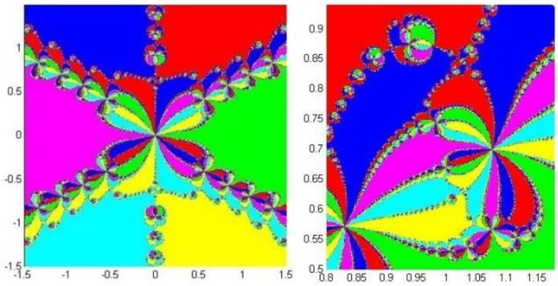
Oblik fraktalnog skupa definiran je mnogim parametrima: kompleksnim polinomom, maksimalnim brojem iteracija, zadanom točnošću, veličinom uzorka složene ravnine i slično, no ono što ostaje kao univerzalno obilježje za bilo koji polinom jest kaos koji se uvijek javlja na granici bazena privlačnosti i u polovima iteratora. [6]



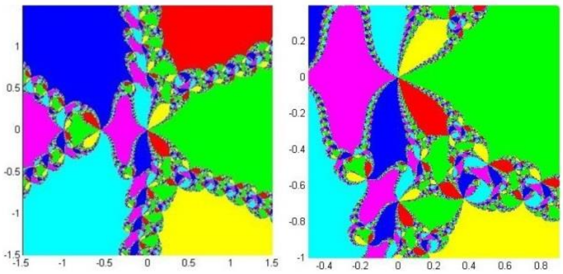
Slika 8. Fraktalna svojstva na granicama bazena privlačnosti za polinome $f(z) = z^4 - 1$, $f(z) = z^5 - 1$ i $f(z) = z^6 - 1$



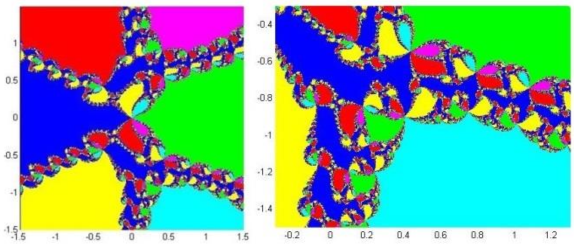
Slika 9. Fraktalna svojstva na granicama bazena privlačnosti za polinom $f(z) = z^6 + z^3 - 1$



Slika 10. Fraktalna svojstva na granicama bazena privlačnosti za polinom $f(z) = z^6 + z^4 - 1$



Slika 11. Fraktalna svojstva na granicama bazena privlačnosti za polinom $f(z) = z^6 + z^5 + z^3 + z^2 - 1$



Slika 12. Fraktalna svojstva na granicama bazena privlačnosti za polinom $f(z) = z^6 + z^4 + z^3 + z^2 - 1$

4. ZAKLJUČAK

Važna karakteristika Newtonove metode je osjetljivost na početne uvjete, što je jako važno svojstvo svakog kaotičnog dinamičkog sustava gdje se onda najčešće u vizualizaciji problema javljaju fraktalni uzorci. U nekoliko je slučajeva Newtonova metoda potpuno nekorisna. U slučaju kada je za početnu aproksimaciju uzeta točka koja se nalazi na granici između dva rješenja tangenta u točki $(x_0, f(x_0))$ paralelna je s osi x. S obzirom na to da nazivnik u iteracijskoj metodi postaje nula, dobivena je izrazito jaka divergencija. Općenito, ovaj se problem javlja u svim ekstremima funkcije f jer u nazivniku iteratora imamo derivaciju funkcije koja je za ekstreme te funkcije jednaka nuli. Dakle, svaka aproksimacija stacionarnom točkom daje kaotično ponašanje iteracijskog procesa. Usprkos tome, s obzirom na to da Newtonova metoda brzo konvergira za početne aproksimacije u okolini nultočke, smatra se jednom od najčešće korištenih metoda za pronalaženje korijena jednadžbe. [6]

5. LITERATURA

[1] Drmač, Z.; Hari, V.; Maručić, M.; Rogina, M.; Singer, S.; Singer, S.: Elektronski udžbenik iz Numeričke analize, Sveučilište u Zagrebu, Pmf – matematički odsjek, Zagreb, 2003.

[2] Gleick, J.: Kaos – rađanje nove znanosti, Izvori, Zagreb, 1996.

[3] Jurak, M.: Rješavanje nelinearnih jednadžbi, materijali za nastavu iz praktikuma primijenjene matematike 1, Sveučilište u Zagrebu, PMF – matematički odsjek, Zagreb, 2005.

[4] Singer, S., Bosner, T.: Numerička analiza – 23. predavanje, Sveučilište u Zagrebu, PMF – matematički odsjek, Zagreb

[5] http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28227-newtons-method/content/ newton.m (Dostupno: 10.10.2013.)

[6] Matijević, M.: Fraktalni oblici u numeričkim aproksimacijama, Hrvatski matematički elektronički časopis, No. 5 (lipanj 2005.)

[7] http://www.oup.com/us/static/companion.websites/pratap/extrashtml/nfractal.html (Dostupno: 10.10.2013.)

[8] http://facstaff.unca.edu/mcmcclur/mathematicaGraphics/Newton/ (Dostupno: 10.10.2013.)

[9] http://www.massey.ac.nz/~ctuffley/fractals/ newtonfrac.m (Dostupno: 10.10.2013.)

Kontakt autora:

Sanja Zlatić, dipl.inž.mat.
Veleučilište u Varaždinu, vanjski suradnik
J. Križanića 33, 42 000 Varaždin
e-mail: sanja.zlatic@velv.hr