JEDAN KONSTRUKTIVNI ZADATAK

Šefekt Arslanagić, Sarajevo, BiH

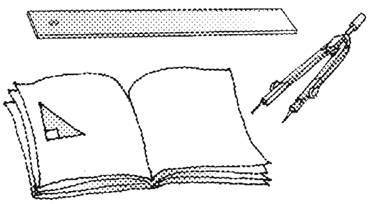
U Matkama od 23. do 28. broja objavljen je niz članaka autorice Sanje Varošanec vezanih uz konstrukcije trokuta ako je zadan zbroj duljina stranica, razlika duljina stranica, jedna ili barem jedna visina, te konstrukcije trokuta pomoću težišnice, dok je u Matki broj 54 objavljen članak Željka Buranjija o konstrukciji trokuta pomoću polumjera. U ovom ćemo se članku pozabaviti jednim posebnim konstruktivnim zadatkom vezanim uz pravokutni trokut.

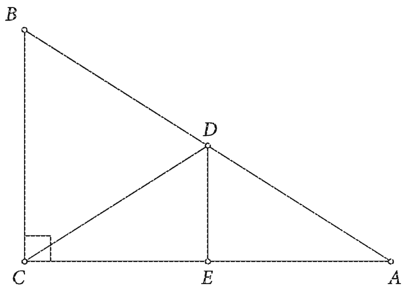
Riječ je o sljedećem zadatku:

Konstruirajte pravokutni trokut ΔABC kojemu su zadani polumjer opisane kružnice (R) i polumjer upisane kružnice (r).

Prije nego što prijeđemo na rješavanje ovog zadatka, dokazat ćemo dva poučka koji se odnose na polumjere opisane i upisane kružnice (R i r) za bilo koji pravokutni trokut.

Poučak 1. U pravokutnom trokutu ΔABC za polumjer opisane kružnice vrijedi jednakost $R=\frac{c}{2}$, gdje je $|AB| = c$ duljina hipotenuze tog trokuta.





Slika 1.

Dokaz: Neka je točka D polovište hipotenuze $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ΔABC (sl. 1.); tada je $\overline{CD}$ težišnica trokuta ΔABC. Ako je točka E polovište katete $\overline{AC}$ toga trokuta, onda je $\overline{DE}$ srednjica trokuta ΔABC te je $\overline{DE} \| \overline{BC}$. Budući da je $\overline{BC} \perp \overline{AC}$, onda je i $\overline{DE} \perp \overline{AC}$. Budući da je $|CE| = |AE|$, $|\angle CED| = |\angle AED| = 90^\circ$ i $|DE| = |DE|$, zaključujemo da je $\Delta ADE \cong \Delta CDE$. Iz te sukladnosti slijedi da je $|CD| = |AD|$.

Budući da je točka D polovište hipotenuze $\overline{AB}$ (tj. da vrijedi $|AD| = |BD|$), zaključujemo da je $|CD| = |AD| = |BD| = \frac{1}{2}|AB|$.

Dakle, točka C pripada kružnici opisanoj trokutu ΔABC sa središtem u točki D - polovištu hipotenuze $\overline{AB}$ trokuta. Zbog toga je polumjer te kružnice $R=\frac{1}{2}|AB|$, tj. $R=\frac{c}{2}$.

Poučak 2. U pravokutnom trokutu ΔABC vrijedi jednakost $r=\frac{a+b-c}{2}$, pri čemu su $a = |BC|$ i $b = |AC|$ duljine kateta, a $c = |AB|$ duljina hipotenuze tog trokuta.

Dokaz 1: Neka je u pravokutni trokut ΔABC upisana kružnica k čiji je polumjer duljine r, a središte joj je točka I (sl. 2.).

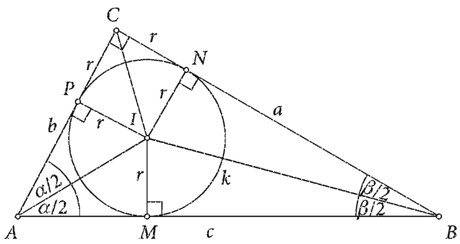
Površina trokuta ΔABC jednaka je zbroju površina triju trokuta sa zajedničkim vrhom I:

$$p_{\Delta ABC} = p_{\Delta BIC} + p_{\Delta AIC} + p_{\Delta AIB}\text{, tj.}$$

$$p_{\Delta ABC} = \frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2},$$

odnosno (stavljajući da je $p_{\Delta ABC}=p$):

$$p=\frac{a+b+c}{2}\cdot r.$$



Slika 2.

Označimo li sa $s=\frac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta ΔABC, njegova je površina jednaka $p=rs$.

Budući da je $p=\frac{ab}{2}$ i $p=rs$, zaključujemo da je $rs=\frac{ab}{2}$, tj. $r\cdot\frac{a+b+c}{2}=\frac{ab}{2}$, odakle slijedi $r=\frac{ab}{a+b+c}$. Dalje dobivamo:

$$r=\frac{ab}{a+b+c}\cdot\frac{a+b-c}{a+b-c};\ (a+b>c)$$

$$r=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2};$$

$$r=\frac{ab(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2},\ \left(c^2=a^2+b^2\right)$$

te najzad

$$r=\frac{a+b-c}{2},$$

što je trebalo dokazati.

Dokaz 2: Neka su točke *M*, *N* i *P* redom dirališta kružnice *k* sa stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ΔABC (sl. 2.). Iz činjenice da vrijedi $\Delta AIM \cong \Delta AIP$, $\Delta BIM \cong \Delta BIN$ i $\Delta CIP \cong \Delta CIN$, slijedi:

$$|AM| = |AP|, |BM| = |BN| \text{ i } |CP| = |CN| = r$$

(jer je četverokut *CPIN* kvadrat).

Nadalje, zbog $|AM| = |AP| = b - r, |BM| = |BN| = a - r$, kao i

$$|AB| = |AM| + |BM| \text{ i } |AB| = c,$$

vrijedi jednakost:

$$c = b - r + a - r,$$

a odavde je

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

što je i trebalo dokazati.

Sada ćemo prijeći na konstrukciju pravokutnog trokuta ΔABC kojemu su zadani *R* i *r*. Iz jednakosti $r = \frac{a+b-c}{2}$ dobivamo $r = \frac{a+b}{2} - R$, odnosno $R + r = \frac{a+b}{2}$, tj. $a + b = 2(R + r)$. Dakle, dani zadatak sveli smo na ekvivalentni zadatak konstrukcije pravokutnog trokuta kod kojega je:

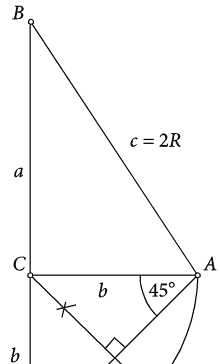
$$c = 2R,\ a + b = 2(R + r), |\angle ACB| = 90°,$$

gdje su *R* i *r* zadani.

Svakako ovaj zadatak nije teško riješiti.

1° Analiza

Neka je pravokutni trokut ΔABC traženo rješenje (sl. 3). Kako je $|CD| = |AC| = b$ ($D \in BC$), to je $|BD| = |BC| + |CD| = a + b$. Trokut ΔACD je jednakokračan i pravokutan pa je $|\angle CAD| = |\angle CDA| = 45°$, a točka *C* pripada simetrali *s* dužine $\overline{AD}$. Također je $|AB| = c = 2R$. Dakle, trokut ΔABD je određen jer je u njemu poznato $|BD| = a + b = 2(R + r)$, $|AB| = 2R$ i $|\angle BDA| = 45°$, i taj se trokut može lako konstruirati. Sjecište simetrale *s* stranice $\overline{AD}$ s dužinom $\overline{BD}$ jest točka *C*. Na kraju spojimo točke *A* i *C* pravcem *AC*.



Slika 3.

2° **Konstrukcija** se sada lako izvodi pomoću šestara i ravnala. Preporučujemo mladim čitateljima da to učine sami uzimajući po volji R i r (vodeći računa da prema **Emmerichovoj** nejednakosti za pravokutni trokut mora vrijediti nejednakost $R \geq \left(1+\sqrt{2}\right)r$).

3° **Dokaz** slijedi očigledno iz analize koja je detaljno provedena.

4° **Diskusija**

Zadatak ima jedno rješenje ako je $R \geq \left(1+\sqrt{2}\right)r$. Budući da je $|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 = 2b^2$, to je $|AD| = b\sqrt{2}$, pa za trokut ΔABD vrijedi nejednakost trokuta $|AB| + |AD| > |BD|$, tj. $c + b\sqrt{2} > a + b$, tj. $c > a - \left(\sqrt{2}-1\right)b \Leftrightarrow b > r\sqrt{2}$, što je točno jer je $c > a$.

Napomena: Dokazat ćemo Emmerichovu nejednakost: $R \geq \left(1+\sqrt{2}\right)r$.

Dokaz: Kako je $R = \frac{c}{2}$ i $r = \frac{a+b-c}{2}$, to je Emmerichova nejednakost ekvivalentna s nejednakošću:

$$\frac{c}{2} \geq \left(1+\sqrt{2}\right) \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

$$\Leftrightarrow c \geq \left(1+\sqrt{2}\right)(a+b-c) / \cdot \left(\sqrt{2}-1>0\right)$$

$$\Leftrightarrow c\left(\sqrt{2}-1\right) \geq a+b-c$$

$$\Leftrightarrow a+b \leq c\sqrt{2}. \quad (*)$$

Na temelju nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine, vrijedi:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a+b \leq \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}; \ \left(c^2 = a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow a+b \leq c\sqrt{2},$$

a ovo je ($*$). Dakle, Emmerichova je nejednakost točna. Vrijedi jednakost ako je $a = b$, tj. kada je u pitanju jednakokračni pravokutni trokut.

LITERATURA

1. Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.