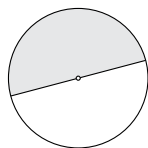
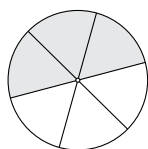
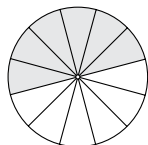


SKRAĆIVANJE ZANIMLJIVIH RAZLOMAKA

Ljubica Bačić, Vukovar



Pitate li se možda kako skratiti razlomke

$$\frac{202}{303}, \frac{4655}{4674}, \frac{20\ 122\ 012}{20\ 132\ 013}, \frac{2013}{201\ 320\ 131\ 650}?$$

Na prvi pogled nije vidljivo imaju li brojnik i nazivnik zajedničkog djelitelja. Uočite ponavljaju li se znamenke po nekom pravilu. Možda će upravo to dati odgovor na početno pitanje. Prije toga prisjetimo se što znači skratiti razlomak.

Skratiti razlomak znači podijeliti brojnik i nazivnik istim prirodnim brojem. Npr. razlomak $\frac{10}{15}$ možemo skratiti brojem 5 na sljedeći način:

$$\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}.$$

Pri tome za dobiveni razlomak $\frac{2}{3}$ kažemo da je *potpuno skraćen* ili *neskrativ*, jer brojnik i nazivnik nemaju više zajedničkih djelitelja.

Učenici skraćuju razlomke primjenom već poznatih pravila djeljivosti brojem 2, 3, 5, 9 i 10. Ukoliko razlomak treba skratiti do neskrativog razlomka, potrebno je naći najveći zajednički djelitelj brojnika i nazivnika. No, što raditi u slučaju kad ne vidimo ili ne možemo naći zajednički djelitelj? Objasnimo to na početnim primjerima!

Primjer 1. Skratimo razlomak $\frac{202}{303}$.

Rješenje: Prvo pogledajmo jesu li i brojnik i nazivnik istovremeno djeljivi brojevima 2, 3, 5, 9 ili 10. Primjenom naučenih pravila djeljivosti vidimo da nisu djeljivi. Dalje bismo mogli provjeravati je li zajednički djelitelj brojnika i nazivnika neki od prostih brojeva 7, 11, 13, ... Zbog pismenog dijeljenja to je dugotrajan proces! Uočimo da su prva i posljednja znamenka brojnika i nazivnika jednake. Pokušajmo od nazivnika 303 oduzeti brojnik 202. Vrijednost te razlike je 101, što je prost broj. Uočavamo da je $202 = 101 \times 2$ i $303 = 101 \times 3$, tj. i brojnik i nazivnik višekratnici su broja 101. Dakle, njihov najveći zajednički djelitelj je upravo broj 101.

$$\frac{202}{303} = \frac{202:101}{303:101} = \frac{2}{3}.$$

Primjer 2. Skratimo razlomak $\frac{4655}{4674}$.

Rješenje: Lako vidimo da se razlomak ne može skratiti brojevima 2, 3, 5, 9 ili 10. Ako malo bolje pogledamo, vidimo da su prve dvije znamenke brojnika i nazivnika međusobno jednake. Oduzmemo li od nazivnika razlomka



(broja 4674) njegov brojnik (4655), uočiti ćemo da je ta razlika jednaka 19, a to je prost broj. Provjerimo je li 19 zajednički djelitelj brojnika i nazivnika? Pismenim dijeljenjem vidimo da je: $4655 : 19 = 245$ i $4674 : 19 = 246$. Dakle, razlomak možemo skratiti brojem 19.

$$\frac{4655}{4674} = \frac{4655 : 19}{4674 : 19} = \frac{245}{246}.$$

Uočimo da je dobiveni razlomak neskrativ jer su 245 i 246 uzastopni brojevi, a za uzastopne brojeve znamo da su relativno prosti.

Primjer 3. Skratimo razlomak $\frac{20\ 122\ 012}{20\ 132\ 013}$.

Rješenje: Promatranjem posljednje znamenke vidimo da se razlomak ne može skratiti brojevima 2, 5 i 10. Zbroj znamenaka je 10 odnosno 12 pa se ne može skratiti ni brojem 3 ni brojem 9. Uočimo da se brojnik sastoji od dva broja 2012. Očito je djeljiv brojem 2012, tj. $20\ 122\ 012 : 2012 = 10\ 001$. Slično, nazivnik je djeljiv brojem 2013 odnosno $20\ 132\ 013 : 2013 = 10\ 001$. Stoga zaključujemo da se razlomak može skratiti brojem 10 001.



$$\frac{20122012}{20132013} = \frac{20122012 : 10001}{20132013 : 10001} = \frac{2012}{2013}.$$

Dobiveni razlomak ponovno je neskrativ jer su 2012 i 2013 uzastopni brojevi, a za uzastopne brojeve znamo da su relativno prosti.

Primjer 4. Skratimo razlomak $\frac{2013}{201\ 320\ 131\ 650}$.

Rješenje: Prva ideja bila bi da je razlomak možda skrativ brojem 2013. Ali, nazivnik nije djeljiv brojem 2013 jer brojem 2013 nije djeljiv zadnji četvero-znamenasti dio. Uočimo da je $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ te da je broj 201 320 131 650 djeljiv brojem 3. Razlika zbroja znamenaka na parnim mjestima i znamenaka na neparnim mjestima je 0, pa je 201 320 131 650 djeljiv i brojem 11. Budući da je taj broj djeljiv i brojem 3 i brojem 11, on je djeljiv i njihovim umnoškom, tj. brojem $3 \cdot 11 = 33$. Broj 201 320 131 650 nije djeljiv brojem 61 jer smo vidjeli da nije djeljiv brojem 2013. Dakle,

$$\frac{2013}{201\ 320\ 131\ 650} = \frac{2013 : 33}{201\ 320\ 131\ 650 : 33} = \frac{61}{6\ 100\ 610\ 050}$$

Na kraju, ovakvi i slični zadaci često budu na natjecanjima iz matematike. Zgodni su za dodatnu nastavu s učenicima koji žele znati više, stoga pokušajte riješiti sljedeće zadatke.

Zadatak. Skratite razlomke:

a) $\frac{309}{412}$, b) $\frac{6248}{6319}$, c) $\frac{201\ 120\ 112\ 011}{201\ 320\ 132\ 013}$.

