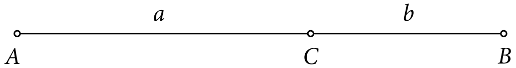
UMJETNOST ZLATNOG REZA

Marija Juričić Devčić, Zagreb

Odavno su umjetnici otkrili da je ljudskom oku najugodnije promatrati pravokutnik čije se stranice odnose u *zlatnom omjeru*. Da pojasnimo: zlatni omjer ili *zlatni rez* dobit ćemo ako dužinu $\overline{AB}$ podijelimo točkom C na dužine $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ tako da je $|AC|:|CB|=|AB|:|AC|$. Drugim riječima, dužinu smo podijelili na **dva dijela** duljina a i b, tako da se veći dio (a) prema manjem dijelu (b) odnosi kao cijela dužina ($a + b$) prema većem dijelu dužine (a). Dakle, $a : b = (a + b) : a$.



Slika 1. Zlatni rez

Iz ovog razmjera možemo izračunati vrijednost zlatnog omjera, koji ćemo označiti grčkim slovom φ. Uzmemo li da je $\varphi = \frac{a}{b}$, dobivamo jednadžbu

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \,. \tag{1}$$

Pomnožimo li tu jednadžbu s φ, dobit ćemo

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \,, \tag{2}$$

a odavde kvadratnu jednadžbu

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \,, \tag{3}$$

čija su rješenja $\varphi_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $\varphi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Rješenje φ_1 je negativno, pa ga odbacujemo (omjer duljina dužina mora biti pozitivan broj!). Dakle, jedino rješenje jednadžbe koje odgovara uvjetima problema jest φ_2, pa zaključujemo da je vrijednost zlatnog omjera

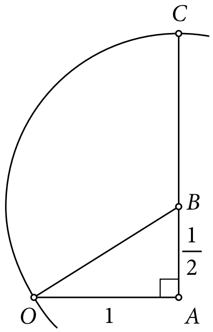
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\,033\,988... \approx 1.618 \,. \tag{4}$$

(Napomenimo: iako se za zlatni omjer znalo još u antičkoj Grčkoj, a neki tvrde čak i u starom Egiptu, to ime dobio je puno kasnije. U srednjem vijeku bio je popularan pod nazivom *božanski omjer*, a tek u 19. stoljeću naziv *zlatni rez* (*goldener schnitt*) uveo je njemački matematičar **Martin Ohm**, mlađi brat slavnijeg fizičara Georga Ohma.)

Točnu vrijednost zlatnog reza možemo odrediti geometrijskom konstrukcijom.

Zadatak: Konstruirajte dužinu duljine φ.

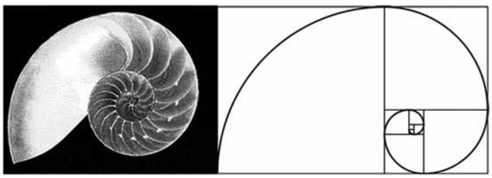
***Rješenje*:** Prema formuli (4) je $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Neka je zadana jedinična dužina $\overline{OA}$. U točki A konstruirajmo okomicu $\overline{AB}$ duljine $\frac{1}{2}$. Duljina dužine $\overline{OB}$ je prema Pitagorinom poučku jednaka



$$|OB| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Na polupravac AB nanesemo točku C tako da je $|BC| = |BO|$. Tada je $|AC| = \varphi$.

Približnu vrijednost zlatnog reza možemo dobiti jednom od sljedećih *aproksimacija*:

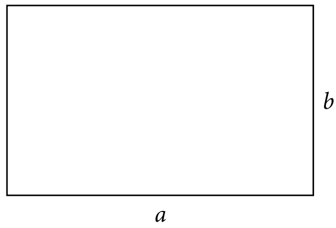


$$\frac{1}{1} = 1, \qquad \frac{13}{8} = 1.625,$$
$$\frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{21}{13} = 1.61538...,$$
$$\frac{3}{2} = 1.5, \qquad \frac{34}{21} = 1.61904...,$$
$$\frac{5}{3} = 1.666..., \qquad \frac{55}{34} = 1.61764...,$$
$$\frac{8}{5} = 1.6, \qquad \frac{89}{55} = 1.61818...,$$
$$\vdots$$

Nastavljajući ovaj niz, sve smo bliže *točnoj* vrijednosti zlatnog reza. Primijetimo da su omjeri u tom nizu dobiveni pomoću *Fibonaccijevih brojeva*. Fibonaccijevi su brojevi članovi niza 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …, gdje se svaki sljedeći član (osim prva dva) dobije kao zbroj dvaju prethodnih članova niza. Dakle, za poprilično točnu vrijednost zlatnog reza dovoljno je uzeti omjer dvaju uzastopnih Fibonaccijevih brojeva. Što su ti brojevi veći, to će točnost aproksimacije biti veća. (Umjetnici srednjeg vijeka, općinjeni *božanskim omjerom*, koristili su se ovim aproksimacijama.)

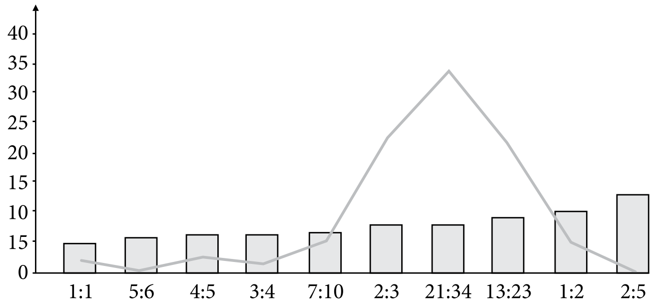
Uz ovu činjenicu vezana je i zanimljivost da je omjer broja ženskih i muških jedinki u idealnoj populaciji pčela približno jednak zlatnom rezu (vidi *Matku* br. 76).

Vratimo se pravokutniku s početka priče. Prisjetimo se: to je pravokutnik čije se stranice a i b odnose u zlatnom omjeru. Zvat ćemo ga *zlatni pravokutnik*.



Slika 2. Zlatni pravokutnik

Prema nekim istraživanjima, ovaj pravokutnik slovi kao najljepši među pravokutnicima. Jedno od njih je istraživanje koje je 1876. godine proveo njemački psiholog **Gustav Theodor Fechner**. Prema njegovu istraživanju, između deset pravokutnika različitih omjera stranica, najveći broj ispitanika izabrao je zlatni pravokutnik (odnosno njegovu aproksimaciju sa stranicama u omjeru 21 : 34) kao najljepši. Iz grafikona na slici 3. također se vidi i da je dobar dio ispitanika izabrao pravokutnike koji su bili najbliži *zlatnom*.



Slika 3. Rezultat Fechnerovog istraživanja (odabir „najljepšeg" pravokutnika)

Povjesničari umjetnosti vide zlatni pravokutnik i zlatni rez u mnogim djelima arhitekture i likovne umjetnosti. Poznatiji primjeri iz arhitekture su pročelja *Partenona* u Grčkoj, katedrale *Notre Dame* u Parizu u Francuskoj i *zgrade Ujedinjenih naroda* u New Yorku (SAD).

Literatura:

1. J. Damjanov, *Vizualni jezik i likovna umjetnost*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
2. J. Damjanov, *Likovna umjetnost*, I dio, Školska knjiga, Zagreb, 1983.
3. Z. Šikić, *Istine i laži o zlatnom rezu*, Poučak br. 15 (50.-69.str.), HMD, Zagreb, 2003.
4. D.Wells, *Rječnik zanimljivih i neobičnih brojeva*, Sveučilišna knjižara, Zagreb, 2005.

Internetske adrese:

http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio
http://www.goldennumber.net