O DJELJIVOSTI CIJELIH BROJEVA

Šefket Arslanagić, Sarajevo

Djeljivost cijelih brojeva predstavlja vrlo zanimljivo i važno područje algebre koje je gotovo nezaobilazno na raznim učeničkim natjecanjima širom svijeta. Na ovu su temu i u Matki objavljeni razni zanimljivi članci. U ovom ćemo članku koristiti sljedeća dva pravila:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right), \tag{1}$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$; te

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right), \tag{2}$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ i n neparan prirodan broj.

Koristeći navedene činjenice, kroz primjere ćemo dokazati nekoliko tvrdnji u vezi s djeljivošću cijelih brojeva. Naravno, ovdje ćemo poštovati metodičko načelo koje glasi: od lakšega k težem.

Primjer 1. Dokažimo sljedeće tvrdnje:

a) $99 \mid 10^{10} - 1$; b) $100 \mid 11^{10} - 1$; c) $620 \mid 125^5 - 25^6$;

d) $33 \mid 2^{55} + 1$; e) $13 \mid 3^{2013} - 1$.

Rješenje:

a) Primjenom pravila (1) dobivamo:

$$10^{10} - 1 = \left(10^2\right)^5 - 1 = 100^5 - 1 = (100-1)\cdot\left(100^4 + 100^3 + 100^2 + 100 + 1\right) = 99 \cdot M$$

pri čemu je $M = 100^4 + 100^3 + 100^2 + 100 + 1$. Dakle, $99 \mid 10^{10} - 1$, što je trebalo dokazati.

b) Primjenom pravila (1) dobivamo:

$$\begin{aligned} 11^{10} - 1 &= (11-1)\left(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1\right) = \\ &= 10\left(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1\right). \end{aligned}$$

U zagradi se nalazi zbroj deset pribrojnika koji završavaju znamenkom 1, pa taj zbroj završava znamenkom 0 te je djeljiv brojem 10. Dakle, broj $11^{10} - 1$ djeljiv je brojem 10 × 10 = 100, što je trebalo dokazati.

c) Primjenom pravila (1) dobivamo:

$$\begin{aligned} 125^5 - 25^6 &= \left(5^3\right)^5 - \left(5^2\right)^6 = 5^{15} - 5^{12} = 5^{12}\left(5^3 - 1\right) \overset{(1)}{=} 5^{12}(5-1)\left(5^2 + 5 + 1\right) = \\ &= 5^{11} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 31 = 5^{11} \cdot 20 \cdot 31 = 5^{11} \cdot 620, \end{aligned}$$

a ovaj broj djeljiv je brojem 620, što je trebalo dokazati.

d) Primjenom pravila (2) dobivamo:

$$2^{55}+1=\left(2^5\right)^{11}+1=32^{11}+1^{11}\overset{(2)}{=}(32+1)\left(32^{10}-32^9+32^8-\ldots-32+1\right)=$$
$$=33\left(32^{10}-32^9+32^8-\ldots-32+1\right),$$

a ovaj broj djeljiv je brojem 33, što je trebalo dokazati.

e) Primjenom pravila (1) dobivamo:

$$3^{2013}-1=3^{3\cdot 671}-1=\left(3^3\right)^{671}-1=27^{671}-1^{671}\overset{(1)}{=}(27-1)\left(27^{670}+27^{669}+\ldots+27+1\right)=$$
$$=26\left(27^{670}+27^{669}+\ldots+2^{27}+1\right),$$

a ovaj broj djeljiv je brojem 13, što je trebalo dokazati.

Primjer 2. Dokažimo da je broj $M=2^{4n+1}-2^{2n}-1;\ (n\in\mathbb{N})$ djeljiv brojem 9.

Rješenje: Zadani izraz $M=2^{4n+1}-2^{2n}-1$ možemo pisati u obliku:

$$M=2^{4n+1}-2^{2n}-1=2\cdot 2^{4n}-2^{2n}-1=2\cdot\left(2^{2n}\right)^2-2\cdot 2^{2n}+2^{2n}-1=$$
$$=2\cdot 2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)+\left(2^{2n}-1\right),\text{ tj. } M=\left(2^{2n}-1\right)\left(2^{2n+1}+1\right).$$

Kako je na temelju (1) i (2)

$$M=2^{4n+1}-2^{2n}-1=2\cdot 2^{4n}-2^{2n}-1=2\cdot\left(2^{2n}\right)^2-2\cdot 2^{2n}+2^{2n}-1=2\cdot 2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)+\left(2^{2n}-1\right)$$

te

$$2^{2n+1}+1=(2+1)\left(2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2+1\right),\text{ tj.}$$
$$2^{2n+1}+1=3\left(2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2+1\right),$$

dobivamo da je

$$M=9\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1\right)\left(2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-\ldots-2+1\right),$$

a ovaj broj je djeljiv brojem 9, što je trebalo dokazati.

Primjer 3. Neka je n prirodan broj. Dokažimo da je broj $M = 3^n + 63$ djeljiv brojem 72 ako i samo ako je n paran broj.

Rješenje: **a)** Neka je n paran prirodan broj. Dokazat ćemo da je broj n djeljiv brojem 72. Za $n = 2$ vrijedi $M=3^2+63=72$, što znači da je tvrdnja točna. Neka je n paran broj veći od broja 2, tj. $n=2k,\ \left(k=2,\ 3,\ 4,\ldots\right)$. Onda je:

$$M=3^{2k}+63=\left(3^2\right)^k+63=9^k+63=9^k-9+72=9\left(9^{k-1}-1\right)+72\overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=}9(9-1)\left(9^{k-2}+9^{k-3}+\ldots+9+1\right)+72=$$
$$=9\cdot 8\left(9^{k-2}+9^{k-3}+\ldots+9+1\right)+72=$$
$$=72\left(9^{k-2}+9^{k-3}+\ldots+9+2\right),\text{ tj. } 72|M\text{ , što je trebalo dokazati.}$$

b) Neka je broj $M = 3^n + 63$ djeljiv brojem 72; dokazat ćemo da je n paran broj.

$$M = 3^n + 63 = 3^n - 9 + 72 = 3^2\left(3^{n-2} - 1\right) + 72 = 9\left(3^{n-2} - 1\right) + 72 .$$

Ovaj broj djeljiv je brojem 72 samo u slučaju kada je broj $P = 3^{n-2} - 1$ djeljiv brojem 8. Na temelju pravila (1) vrijedi:

$$P = (3-1)\left(3^{n-3} + 3^{n-4} + \ldots + 3^2 + 3 + 1\right), \text{ tj.}$$

$$P = 2\left(3^{n-3} + 3^{n-4} + \ldots + 3^2 + 3 + 1\right),$$

pa $8 | P$ ako vrijedi $4 | 3^{n-3} + 3^{n-4} + \ldots + 3^2 + 3 + 1$.

Ako je n neparan broj, tj. $n = 2k - 1; \left(k \in \mathbb{N}\right)$, tada u zbroju $3^{n-3} + 3^{n-4} + \ldots + 3^2 + 3 + 1$ ima neparan broj $(2k-1)$ pribrojnika koji su neparni, pa je u tom slučaju $4 \nmid 3^{n-3} + 3^{n-4} + \ldots + 3^2 + 3 + 1$. Znači, n mora biti paran broj, tj. $n = 2k$, što je trebalo dokazati.

Primjer 4. Dokažimo da je broj $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ djeljiv brojem 7.

Rješenje: Zadani broj A možemo pisati u obliku

$$A = 2222^{5555} + 5555^{2222} = \left(2222^{5555} + 4^{5555}\right) + \left(5555^{2222} - 4^{2222}\right) - \left(4^{5555} - 4^{2222}\right).$$

Prema (1) i (2) slijedi:

1° $2222^{5555} + 4^{5555} = (2222 + 4) \cdot A_1 = 2226 A_1 = 7 \cdot 318 A_1$ je djeljivo brojem 7;

2° $5555^{2222} - 4^{2222} = (5555 - 4) \cdot A_2 = 5551 A_2 = 7 \cdot 793 A_2$ je djeljiv brojem 7;

3° $4^{5555} - 4^{2222} = 4^{2222}\left(4^{3333} - 1\right) = 4^{2222} \cdot \left[\left(4^3\right)^{1111} - 1\right] = 4^{2222} \cdot \left(64^{1111} - 1\right) =$

$= 4^{2222} \cdot (64 - 1) \cdot A_3 = 63 \cdot 4^{2222} \cdot A_3 = 7 \cdot 9 \cdot 4^{2222} \cdot A_3$ je djeljiv brojem 7.

Iz 1°, 2° i 3° slijedi da $7 | 2222^{5555} + 5555^{2222}$, što je trebalo dokazati.

Literatura:

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.