

Geometrija prostora – presjeci tijela ravninom

SNJEŽANA DEČMAN¹, ANDREJA HALAVUK², ŽELJKA MILIN ŠIPUŠ³

1. Uvod

Prostorni zor predstavlja važan dio ljudske inteligencije. To je područje već od 1920-ih godina aktivno područje istraživanja za psihologiju, matematiku, umjetnost, prirodoslovlje i tehniku. Iako ne postoji opći dogovor oko terminologije u području, možemo reći da je *prostorni zor* sveobuhvatni pojam koji podrazumijeva prikazivanje, transformiranje, generiranje i prisjećanje simboličke, neverbalne, najčešće prostorne informacije. Razvijanje prostornog zora cilj je i matematičkog obrazovanja. Dokument *Referentni okvir o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje* Europskog parlamenta i vijeća ističe prostorno mišljenje kao dio matematičke kompetencije. U dokumentu *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje* za područje Matematika, posvećena je sustavna pažnja geometriji prostora (a time i razvoju prostornog zora) kroz cijelu obrazovnu osnovnoškolsku i srednjoškolsku vertikalnu. U ovom će članku biti govora o jednoj mogućoj temi u (još neprovedenoj) predmetnoj razradi *Nacionalnog okvirnog kurikuluma* iz geometrije prostora u srednjoškolskoj matematici – to je tema o presjecima tijela ravninom. Ta tema i sad postoji u gimnazijskom programu matematike.

2. Istraživanja prostornog zora

Kao što je već spomenuto, istraživanja prostornog zora vrlo su aktivna područja istraživanja. U istraživačkom kontekstu razlikuju se pojmovi kao prostorne sposobnosti (eng. *spatial abilities*) i prostorne vještine (eng. *spatial skills*). Iako se često koriste i s jednakim značenjima (tako ćemo ih koristiti i u ovom članku), ti se pojmovi zapravo odnose na urođene sposobnosti (prostorne sposobnosti), za razliku od naučenih vještina (prostorne vještine). Kod odraslih ljudi praktički ih je nemoguće razlikovati. Najčešće se istražuju sposobnosti prostorne vizualizacije, među koje se ubrajaju sposobnosti misaone rotacije i misaone transformacije, te sposobnosti prepoznavanja prostornih odnosa.

¹Tema diplomskog rada: *Perspektiva u nastavi matematike*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb

²Tema diplomskog rada: *Kosa aksonometrija*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb

³Željka Milin Šipuš, PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu

U svijetu se često provode testiranja prostornog zora, osobito studentske STEM (*Science, Technology, Engineering, Mathematics*) populacije (primjerice [5], [6]). Pokazuje se da je razvijeni prostorni zor, pored znanja matematike, dobar prediktor uspješnosti na tim studijima, osobito na inženjerskim. Pritom se često koriste standardizirani svjetski testovi kao *Test misaonih rotacija*, *Test misaonog presijecanja* ili neki drugi testovi koji znaju biti razvijeni za specifične svrhe. Korištenje standardiziranih svjetskih testova ima za prednost mogućnost uspoređivanja rezultata postignutih u različitim obrazovnim sustavima, kao i praćenje rezultata kroz generacije studenata.

Mnoga istraživanja (npr. [4]) potvrđuju da se na razvoj prostornog zora može utjecati. Počevši od rane životne dobi, pokazuje se da neke aktivnosti, kao što je slaganje LEGO kockica, ručni rad, sviranje glazbenih instrumenata, bavljenje nekim sportovima, te u novije vrijeme i igranje računalnih 3D-igrica, pridonose razvoju prostornog zora. Vrlo je važno napomenuti da mnogobrojna znanstvena istraživanja pokazuju da je geometrija prostora unutar matematičkog obrazovanja prirodan okvir za razvoj prostornog zora. Njezin je cilj osposobljavanje učenika za korištenje geometrijskih pojmova, koncepata i postupaka za rješavanje konkretnih prostorno-geometrijskih problema, kao i problema iz svakodnevnog života koji uključuju te sadržaje. To se u visokoškolskom obrazovanju posebno odnosi na predmete kao što je nacrtana (deskriptivna) geometrija. U njima se proučavaju metode prikazivanja trodimenzijskih objekata u dvodimenzijskoj ravnini (papiru, ploči, platnu, zaslону računala), kao i konstruktivno rješavanje geometrijskih 3D-problema ([7], [8]). Znanstvena istraživanja, a i zdrav razum, potvrđuju neosporan pozitivan utjecaj poznavanja 3D-metoda i konstrukcija na razumijevanje prostornih odnosa i razvoj prostornog zora. Današnja iskustva u poučavanju nacrtne geometrije pokazuju da je vrlo izazovan zadatak naći idealnu ravnotežu geometrijskih sadržaja i CAD-softwarea ([7], [8]). Geometrijske 3D-metode i konstrukcije znaju biti vrlo složene za provođenje, pa time i zamorne, a i često se uče kao „recepti”. Software pak omogućuje brzo prikazivanje, a često i manipuliranje nacrtanim objektima u svrhu vizualiziranja i istraživanja, no bez ideje kako se problemi rješavaju. Kako bi razumjeli sadržaje prostorne geometrije, studentima inženjerskih fakulteta u Austriji i Mađarskoj, i studentima u SAD-u koji pokazuju slabije rezultate na testovima prostornog zora, često se nude pripremni tečajevi prostorne geometrije ([10]). Zanimljivo je i istraživanje [9] provedeno u Japanu u kojem je analiziran utjecaj promjena nacionalnog kurikuluma na prostorne sposobnosti studenata koji upisuju visoko obrazovanje. Uočen je pad postignutih rezultata na *Testu misaonog presijecanja*, no dubinskom je analizom ustanovljeno da se promjene u postignućima prvenstveno mogu pripisati promijenjenim ulaznim zahtjevima u visoko obrazovanje i povećanju upisne kvote.

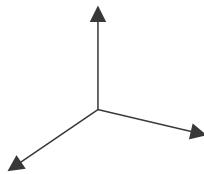
Sve te spoznaje osobito su važne za žensku populaciju za koju istraživanja utvrđuju da ima prosječno slabije razvijeni prostorni zor, posebno u području misaonih rotacija (primjerice, meta-istraživanje [3]). Pokazuje se da žene rješavanju prostornih problema radije pristupaju analitički nego holistički, a takav pristup zahtijeva

više vremena, što je također važan faktor koji pridonosi slabijem prosječnom uspjehu ženske populacije ([2]). Holističke strategije uključuju prikazivanje i manipuliranje prostornim informacijama „na prostorni način”, tj. uključuju misaono korištenje prostornih odnosa, dok su u analitičkim strategijama prostorne informacije reducirane na niz ne-prostornih odnosa.

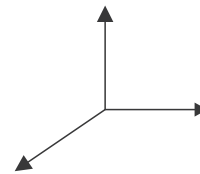
2. Metode prikazivanja trodimenzijskih objekata

Prostorna vizualizacija je sposobnost misaonog predočavanja odnosno prikazivanja trodimenzijskog objekta na dvodimenzijskoj ravnini, tj. ravnini slike. Pritom se služimo metodama projiciranja. Tipičan i poznat primjer projiciranja je nastajanje sunčeve sjene objekta. Pritom je Sunce središte projiciranja, sunčeve zrake su zrake projiciranja, Zemljino tlo je ravnina slike, a sjena objekta je slika projiciranja.

Projiciranje može biti paralelno ili centralno, ovisno o načinu upada zraka projiciranja na ravninu slike. Kod paralelnog projiciranja, sve zrake projiciranja su paralelne, dok kod centralnog projiciranja zrake projiciranja dolaze iz jedne točke – središta (centra) projiciranja. Centralnim projiciranjem u ravnini projekcije nastaje slika koja se naziva *centralna projekcija* ili *perspektiva*. Paralelno projiciranje, ovisno o kutu upada zrake projiciranja na podlogu (ravninu slike), može biti koso ili ortogonalno. Kosim projiciranjem nastaje projekcija koja se naziva *kosa aksonometrija*, odnosno, u posebnom slučaju *kosa projekcija*. Aksonometrijsku sliku zadajemo tako da zadamo sliku (projekciju) nekog ortonormiranog skupa vektora (osni križ, slika 1.), koji je kod kose projekcije zadan kao na slici 2. Kod kose se projekcije, dakle, za razliku od kose aksonometrije općenito, jedna koordinatna ravnina projicira paralelno s ravninom slike (papira, ploče, zaslona računala).



Slika 1.

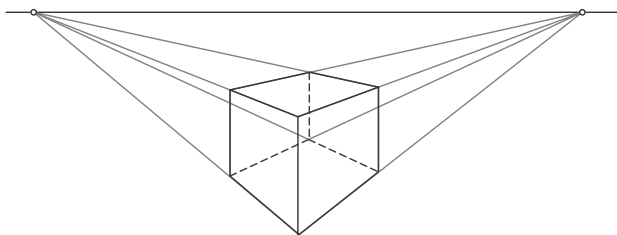


Slika 2.

Ortogonalno projiciranje koristi se i kod tzv. Mongeove projekcije, tj. projekcije na par okomitih ravnina – na horizontalnu (tlocrt) i vertikalnu ravninu (nacrt). Mongeova projekcija klasična je metoda nacrtne geometrije za rješavanje konstruktivnih 3D-problema. Problemi se rješavaju u paru okomitih ravnina iz kojih se onda može rekonstruirati i prostorno rješenje. Po potrebi, tijelo se projicira i na treću ravninu, okomitu na zadane ravnine (bokocrt), odnosno na neku ravninu koja je okomita ili na horizontalnu ili na vertikalnu ravninu (stranocrt).

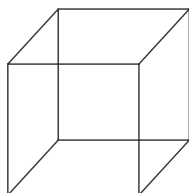
Projiciranje ima svojstvo da pravce preslikava u pravce, uz sljedeće iznimke: kod paralelnog projiciranja u točku se projiciraju svi pravci koji su usporedni zrakama

projiciranja, a kod centralnog projiciranja svi pravci koji prolaze središtem projiciranja. Važno svojstvo paralelnog projiciranja je da se paralelni pravci projiciraju u paralelne pravce (ukoliko to nisu pravci koji se projiciraju u točke), dok kod centralnog projiciranja to nije slučaj jer se tamo paralelni pravci projiciraju u pravce koji se sijeku na „horizontu”, u točki koju nazivamo *nedogled* (osim pravaca koji su usporedni s ravninom projiciranja). Na slici 3. prikazana je kocka u perspektivi u kojoj su istaknuta dva nedogleda, dvije točke u kojima se sijeku odgovarajuće familije paralelnih pravaca.

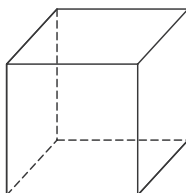


Slika 3. Perspektivna slika kocke

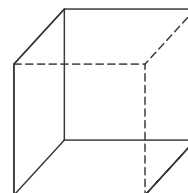
Kad zamišljamo nacrtani objekt, koristimo usvojene konvencije kao, na primjer, označavanje nevidljivih linija iscrtkanom linijom. Bez toga, kosu projekciju kocke nacrtanu na slici 4.a možemo zamisliti kao kocku na slici 4.b ili na slici 4.c. Uočimo da kocku na slici 4.b gledamo odozgo, a kocku na slici 4.c odozdo.



Slika 4.a



Slika 4.b



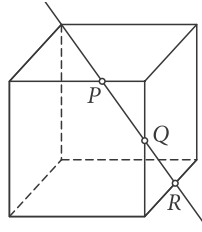
Slika 4.c

3. Presjeci tijela ravninom

Problem određivanja presječnog lika tijela i ravnine tipični je problem prostorne konstruktivne geometrije. Takve presjeke često srećemo i u životnim situacijama, primjerice, možemo ih dobiti rezanjem kruha, sira, jabuke i slično. U nastavi geometrije poželjno ih je uvesti upravo tako, postupno, kroz sve cikluse obrazovanja. Za proučavanje apstraktnijih situacija možemo koristiti gotove geometrijske modele, izraditi modele od gline ili koristiti software dinamičke geometrije.

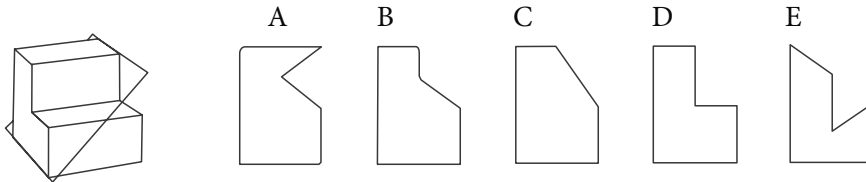
U osnovi problema ravninskog presjeka je problem određivanja presjeka pravca i ravnine, tj. određivanje probodišta, koji se javlja pri određivanju presjeka bridova tijela ili izvodnica tijela ravninom. Već se u problemu određivanja probodišta mogu javiti problemi kod misaone vizualizacije nacrtanih tijela, kao u sljedećem primjeru:

Primjer 1. Na slici 5. prikazana je kocka u kosoj projekciji. Točke P , Q , R su točke na njezinim bridovima. Pripada li točka R pravcu PQ ?



Slika 5.

Određivanje ravninskih presjeka tijela je, u načelu, složen problem koji uključuje i određena znanja (na primjer, poznavanje presjeka kružnog valjka ili stošca ravninom). Od mnogobrojnih standardiziranih svjetskih testova koji procjenjuju prostorni zor, *Test misaonog presijecanja* je test kojim se ispituje sposobnost misaone vizualizacije ravninskih presjeka objekata. Njegovo provođenje, bez posebne edukacije, obično pokazuje da je određivanje ravninskih presjeka (složenih) objekata težak zadatak za studente. Test obuhvaća zadatke određivanja oblika ravninskog presjeka složenih uglatih i oblikih objekata, kao i zadatke utvrđivanja metričkih odnosa ravninskog presjeka. Na sljedećoj je slici prikazan uvodni primjer iz testa (točan je odgovor D).

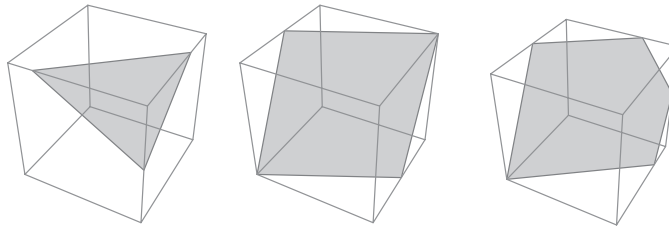


Slika 6. Uvodni primjer iz Testa misaonog presijecanja

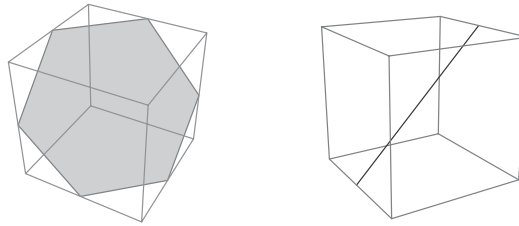
I u Hrvatskoj je provedeno istraživanje prostornog zora studenata tehničkih fakulteta i nastavničkih smjerova matematike ([1]). Usporedni rezultati s rezultatima studentske populacije u regiji (Austrija, Njemačka, Mađarska) i u Japanu, upućuju na manjkavosti postojećeg školskog nastavnog plana u području geometrije prostora.

Zadržimo se na ravninskim presjecima kocke koja omogućuje dovoljno prostora za učeničko istraživanje. Neka od mogućih pitanja za istraživanje su: *Može li presjek kocke ravninom biti trokut, četverokut, peterokut, šesterokut, sedmerokut, ...? Može li presječni trokut biti jednakokraničan, jednakokračan, pravokutan? Može li presječni četverokut biti romb koji nije kvadrat? Itd.*

Na sljedećim su slikama prikazani neki od tih presjeka nacrtani pomoću programskog paketa *Mathematica 8*. Možemo uočiti da *Mathematica* koristi perspektivnu sliku tijela (kocke) i da nevidljivi bridovi u gotovom modelu kocke nisu označeni iscrtkanom linijom. Program ima mogućnost dinamičke vizualizacije nacrtanih objekata, tako da je tijelo moguće dovesti u položaj u kojemu se presječna ravnina, a time i presječni lik, „vidi” kao pravac odnosno dužina.

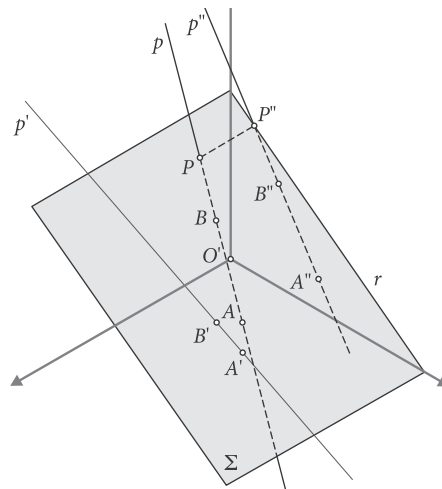


Slika 7. Presjeci kocke ravninom



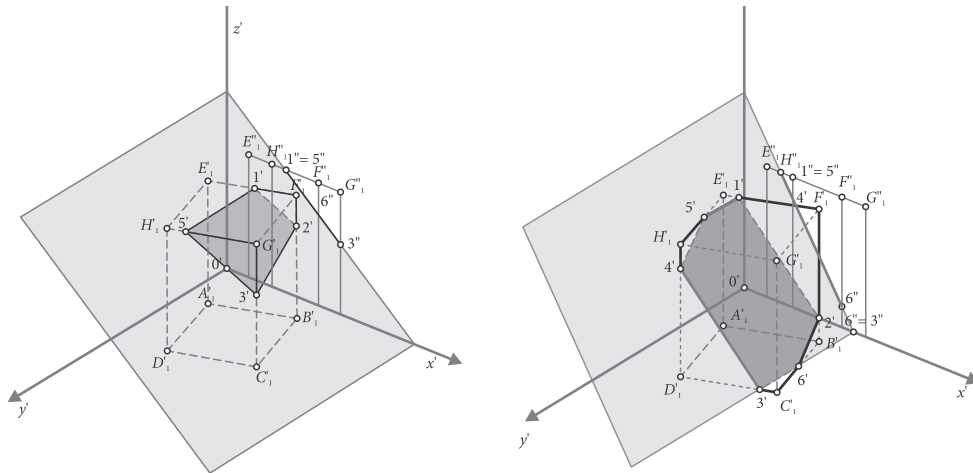
Slika 8. Presjek kocke ravninom po šesterokutu i „bočni” pogled na presjek kocke u kojem se presječni lik „vidi” kao dužina

Problem određivanja presjeka tijela ravninom moguće je riješiti konstruktivnim metodama nacrtne geometrije koristeći Mongeovu projekciju. Tijelo prikazujemo u kosoj aksonometriji (vidi sliku 10.) koja nudi „prostorni” prikaz tijela i povezuje ga s njegovim tlocrtom i nacrtom. Osnovna ideja određivanja presjeka sastoji se u pogodnom odabiru ravnine na koju se projiciraju zadani objekti, a u kojoj će se presječni lik projicirati u dužinu, upravo kao na slici 8. Na slici 9. prikazana je metoda određivanja presjeka pravca i drugoprojicirajuće ravnine, tj. ravnine okomite na ravninu nacрта u kosoj aksonometriji. Ravnina nacrtana na ovoj slici je desna bočna ravnina. Projekcija probodišta P'' može se jednostavno odrediti u ravnini nacрта u kojoj se cijela zadana ravnina projicira u pravac r ; tada je projekcija probodišta P'' presjek pravca r i projekcije p'' zadanog pravca p . Potom se traženo probodište P određuje na pravcu p .



Slika 9. Presjek pravca i ravnine koja je okomita na nacrtanu ravninu

Na slici 10. prikazan je presjek kvadra drugoprojicirajućom ravninom u kosoj aksonometriji. Opet je prisutna ideja pogodnog odabira ravnine projekcije u kojoj je projekcija objekata što jednostavnija. Kako je presječna ravnina okomita na ravninu nacрта, ona se u nacrtu cijela projicira u pravac (u svoj drugi trag), te se presječni lik projicira u dužinu ($1''3''$) na tom pravcu. Tu je dužinu potom jednostavno „vratiti” u aksonometrijsku sliku tijela. Općenito, ukoliko presječna ravnina nije prvo- ili drugoprojicirajuća, tada se postavlja nova ravnina projiciranja, tzv. stranocrtna ravnina, koja je okomita na presječnu ravninu. Cijela se presječna ravnina u stranocrtnoj projekciji projicira u svoj trag, a lik dobiven presjekom u dužinu na tom tragu. Za potrebe dinamičke vizualizacije presjeka kocke i kvadra ravninom, u okviru diplomskog rada druge autorice, izrađeni su alati u programu dinamičke geometrije, u kojima su dobivene sljedeće slike:

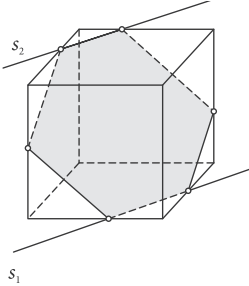


Slika 10. Presjek kvadra drugoprojicirajućom ravninom po četverokutu i šesterokutu

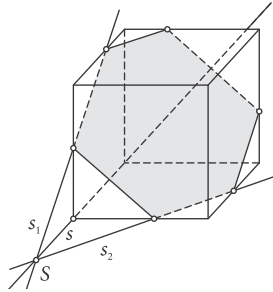
U srednjoškolskoj nastavi matematike, međutim, problemu određivanja presjeka tijela ravninom ne pristupamo na taj način. Prethodni pristup zapravo omogućuje proceduralno rješavanje problema presjeka. U srednjoškolskoj nastavi matematike problem rješavamo koristeći elementarno-geometrijske metode, koje od učenika iziskuju snalaženje u prostornim odnosima. Tijelo prikazujemo koristeći kosu aksonometriju ili, specijalno, kosu projekciju. Presjek uglatog tijela ravninom je rub mnogokuta čiji su vrhovi na bridovima, a stranice su njihove spojnice po susjednim stranama tijela. Kod određivanja presjeka tijela ravninom koristimo sljedeća svojstva:

1. Siječe li ravnina π dvije paralelne ravnine Σ_1 i Σ_2 , tada su presječni pravci $s_1 = \pi \cap \Sigma_1$ i $s_2 = \pi \cap \Sigma_2$ usporedni.
2. Siječe li ravnina π dvije ravnine Σ_1 i Σ_2 koje se sijeku (po pravcu $s = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$), tada se presječni pravci $s_1 = \pi \cap \Sigma_1$ i $s_2 = \pi \cap \Sigma_2$ sijeku u točki S koja leži na presječnom pravcu s tj. presjek pravaca s_1 , s_2 , s je točka S .

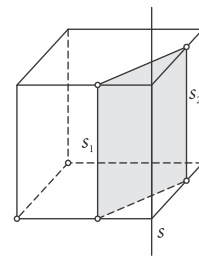
3. Siječe li ravnina π dvije ravnine Σ_1 i Σ_2 koje se sijeku (po pravcu $s = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$) i ako je s usporedan s π , tada su presječni pravci $s_1 = \pi \cap \Sigma_1$ i $s_2 = \pi \cap \Sigma_2$ usporedni sa s .



Slika 11.a



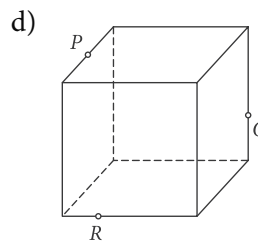
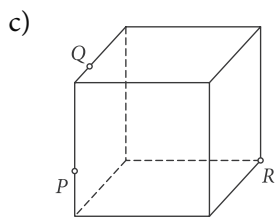
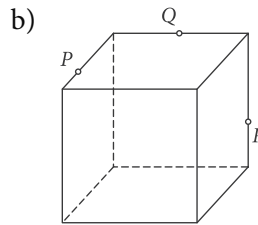
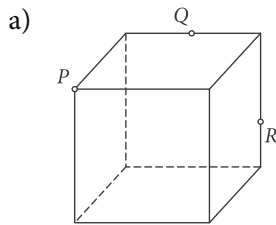
Slika 11.b



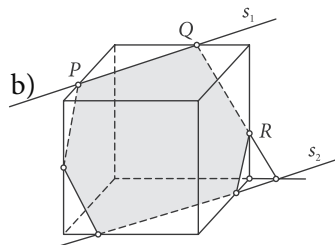
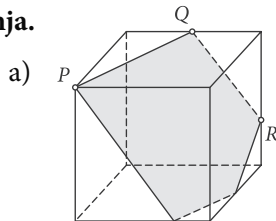
Slika 11.c

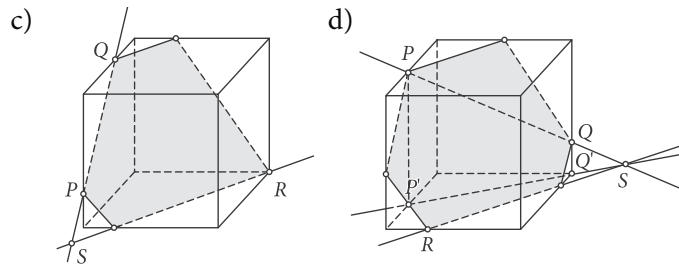
Promotrimo presjeka kocke ravninom. Svojstvo 1. primjenjujemo kad promatramo presjek zadane ravnine s ravninama koje sadrže prednju i stražnju stranu kocke ili gornju i donju stranu, odnosno lijevu i desnu bočnu stranu (slika 11.a). Svojstvo 2. primjenjujemo npr. na gornju i desnu stranu, prednju i desnu stranu, lijevu i donju stranu kocke, itd. (slika 11.b), dok svojstvo 3. primjenjujemo u situaciji kao na slici 11.c.

Zadatak. Odredite presjek kocke i ravnine zadane točkama P, Q, R .



Rješenja.





Literatura:

1. Ž. Milin Šipuš, A. Čižmešija, *Spatial Ability of Students of Mathematics Education in Croatia Evaluated by the Mental Cutting Test*, Ann. Math. Inform. 40 (2012.), 203-216.
2. H. Kaufmann, K. Steinbügl, A. Dünser, J. Glück, *General Training of Spatial Abilities by Geometry Education in Augmented Reality*; in: „Annual Review of CyberTherapy and Telemedicine: A Decade of VR, Vol. 3”, Interactive Media Institute, Annual Review of CyberTherapy and Telemedicine (2005.), 65 - 76.
3. M. C. Linn, A. C. Petersen, *Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability: A Meta-analysis*, Child Development, 56(6) (1985.), 1479 - 1498.
4. S. S. Metz, S. Donohue, C. Moore, *Spatial Skills: A Focus on Gender and Engineering*, In B. Bogue & E. Cady (Eds.), Apply Research to Practice (ARP) Resources, (2012.).
5. S. Sorby, *Developing 3-D Spatial Visualization Skills for Non-Engineering Students*, Proceedings of the 2005 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition.
6. S. Sorby, *Educational Research in Developing 3-D Spatial Skills for Engineering Students*, International Journal of Science Education, Vol. 31, No. 3 (2009.), 459 - 480.
7. H. Stachel, *What is Descriptive Geometry for?* Dresden (2010.), 327 - 336.
8. H. Stachel, *Descriptive geometry in today's engineering curriculum*, Transactions of FAMENA 29/2 (2005.), 35 - 44.
9. Yuji Sugai, Kenjiro Suzuki, *Change over Time in Spatial Ability of Students Entering University – Impact of Revision of National Curriculum Guidelines up to High School*, Journal for Geometry and Graphics, Vol.15 (2011.), 101 - 112.
10. <http://www.engr.psu.edu/AWE/ARPResources.aspx>.