IZ NASTAVNE PRAKSE

Eksponencijalna funkcija i njezine primjene u realnom životu

Nada Roguljić[1], Arijana Burazin Mišura[2] i Ivo Baras[3]

***Sažetak**:* Eksponencijalna funkcija dio je obveznog kurikuluma u gimnazijskim i strukovnim srednjim školama, a zasigurno spada među „omraženija" nastavna poglavlja.

Učenicima obično nije jasna svrha njenog uvođenja i primjenjivost na probleme iz realnog života.

Potaknuti tom činjenicom, u ovom radu nastojimo približiti eksponencijalnu funkciju kroz njezine brojne primjene u drugim odgojno-obrazovnim područjima i sferama ljudskog života.

Kao uvod u temu koristimo povijesnu crticu o *Problemu zrna pšenice na šahovskoj ploči*. Potom se upoznajemo s eksponencijalnom ovisnošću i njenom primjenom u:

- BIOLOGIJI (rast neke populacije, npr. bakterija, virusa; demografska kretanja, cijeljenje rana kao funkcija vremena)
- EKONOMIJI (složeno ukamaćivanje)
- FIZICI (Newtonov zakon hlađenja; promjena atmosferskog tlaka s visinom,...)
- FORENZICI (određivanje vremena smrti)

Posebno je zanimljiv primjer u kojem se mogu iščitati demografska kretanja u pojedinim gradovima/selima Hrvatske jer su podaci raspoloživi na mrežnim stranicama Državnog Zavoda za statistiku (DZS). Pojedini krajevi pokazuju značajan eksponencijalni trend prirasta ili opadanja broja stanovnika.

[1]Nada Roguljić, prof. matematike i fizike, predavač, Sveučilišni Odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu
[2]Arijana Burazin Mišura, dipl.ing.mat, asistent, Sveučilišni Odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu
[3]Ivo Baras, dipl. ing. matematike, predavač, Sveučilišni Odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu

U radu je opisan način kako sami učenici/studenti mogu samostalno doći do podataka, obraditi ih uz pomoć MS Excela i izvući iz njih zanimljive zaključke.

Smatramo da se povezivanjem matematičkih sadržaja i svakodnevnog života obrazovni ciljevi lakše postižu. Ove primjene mogu biti i zgodan materijal za timski rad u učionici.

Uvod

Kao predavači na Odjelu stručnih studija Sveučilišta u Splitu motivaciju za ovaj rad pronašli smo u svakodnevnom radu sa studentima, kao i u razgovoru s kolegama profesorima, i svi zajedno uočili smo isti problem vezan uz matematička znanja i njihovu primjenu šire od matematičkih kolegija koje pohađaju. Nužno je znati da naša ustanova, kao što joj i sam naziv kaže, ima za cilj obrazovati buduće stručnjake za pojedine sfere ljudskog rada (poduzetnike, specijaliste struke u području informacijskih tehnologija, elektronike, energetike, konstrukcijskog strojarstva).

Naglasak je na riječi *stručnjak*, a ne *znanstvenik*! Samim time i svoj smo rad, predavajući bazične kolegije, usmjerili na razumijevanje materije i njezinu primjenjivost u njihovim daljnjim stručnim kolegijima, nastojeći pritom zadržati potrebnu minimalnu teoretsku razinu znanja.

Tu smo naišli na razne poteškoće, korijen kojih seže dijelom i u prethodna obrazovna razdoblja.

Nismo proveli sustavno istraživanje, ali je posve evidentno da matematička znanja i vještine s kojima naši studenti dolaze na studij često nisu dovoljni za uspješno praćenje nastave. Kao primjer možemo navesti da pojedinci imaju problema rješavajući već i jednostavne linearne jednadžbe u kojima koeficijenti nisu cijeli brojevi, a nepoznanice nisu izražene standardnim veličinama x i y.

Siguran rad i razumijevanje rada s potencijama (redovi veličina), kao i rješavanje eksponencijalnih i logaritamskih jednadžbi, više je rijetkost nego pravilo.

Ekstremne su, na sreću, pojave da im se „pobrka" redoslijed računskih operacija kada *barataju* decimalnim brojevima s više od dvije decimale. Kako bismo pokušali riješiti taj problem, potrebna nam je suradnja svih razina školovanja, posebice srednjih strukovnih škola, odakle nam često pristižu studenti. Stoga nam je cilj ovoga rada proširiti obradu jedne od tema koja u pravilu nije omiljena - *eksponencijalne funkcije* - te je, skupa s logaritamskom funkcijom, oživjeti povezivanjem sa sadržajima iz života, što nastavne sadržaje matematike dovodi u korelaciju sa sadržajima ostalih predmeta (fizike, biologije).

Najbolja stvar vezana uz eksponencijalne funkcije je upravo ta da su vrlo prisutne u realnim situacijama. Koriste se za populacijske modele, datiranje uz pomoć ugljikovih spojeva, pomažu mrtvozornicima u određivanju vremena smrti, ekonomistima kod određivanja konačne vrijednosti ulaganja, a mnoge su fizikalne veličine opisane eksponencijalnom zavisnošću... Kako su profesori uvijek ograničeni satnicom i u stalnoj utrci s opsežnim programima, dovoljno je izdvojiti svega jedan sat na kojemu će sami učenici, formirani u grupe, izložiti neke od primjena koje ćemo spomenuti u ovome radu.

U ovom ćemo radu koristiti program za tablične proračune MS Excel koji je danas neizostavni dio osnovne informatičke pismenosti. On nam omogućava jednostavnu vizualizaciju odabranih modela i provođenje računa koji prelaze mogućnosti džepnih kalkulatora.

Ima onih (...) koji misle da je broj zrnaca pijeska beskonačan (...) Ima i onih koji ne misle da je beskonačan, ali da ne postoji dovoljno velik broj (...) Ali pokušat ću vam pokazati brojeve koji ne samo da premašuju količinu pijeska jednaku onoj ispunjene Zemlje (...), već i količinu veličinom jednaku svemiru.

ARHIMED (oko 287. - 212.g. pr. Krista)

Brojač pijeska

Ovim citatom Carl Sagan počinje svoju priču o *Moći i ljepoti kvantifikacije* u svom djelu *Koliko sunaca, koliko svjetova*. U uvodu piše o eksponencijalnom zapisu brojeva čija upotreba seže još u davna vremena. Indijska je aritmetika dugo koristila velike brojeve i imala posebno nazivlje za pojedine veličine, dok su Maje iz starog Meksika stvorili vremensku ljestvicu kojom su procjenjivali starost svemira na 10^{29} godina. Hindusi su procijenili starost svemira na $8.6 \cdot 10^9$ godina, što je posve u skladu s današnjim spoznajama. Već citirani Arhimed procjenjuje da je potrebno 10^{63} zrnaca pijeska kako bi se ispunio svemir. No, najpoznatija priča koja se vezuje uz našu temu je legenda o porijeklu šaha.

Šah je jedna od najstarijih igara i varijante joj se igraju već tisućljećima. O njegovom nastanku postoje mnoga predanja i legende. Evo jedne. Kada je car Šeram upoznao i naučio igrati šah, bio je zadivljen ljepotom te igre. Cilj igre bilo je hvatanje neprijateljskog kralja, pa se igra na perzijskom zvala šahmat (smrt kralju). Saznavši da je tu igru izmislio jedan od njegovih podanika, vezir imenom Sesa, naredio je da ga dovedu kako bi ga osobno nagradio. Mudri vezir došao je pred cara.

Želeći ga dostojno nagraditi, car mu obeća ispuniti bilo koju želju.

Sesa je rekao: *Želim da mi za prvo polje na ploči date 1 zrno pšenice, za drugo polje 2 zrna, za treće 4, za četvrto 8, i tako za svako sljedeće dva puta više zrna nego za prethodno polje.*

Car se iznenadio rekavši: *Zar samo to? Nema problema, dobit ćeš svoju vreću pšenice poslije ručka.*

No, posve neočekivano, zrna na šahovskoj ploči bilo bi čak ovoliko:

2^{0}	2^{1}	2^{2}	2^{3}	2^{4}	2^{5}	2^{6}	2^{7}
2^{8}	2^{9}	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Broj svih zrna pšenice jednak je $\mathbf{S} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$.

Množenjem izraza $\mathbf{S} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$ brojem 2 dobivamo $2\mathbf{S} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{64}$. Oduzimanje $2\mathbf{S} - \mathbf{S}$ nas vodi k rješenju: $\mathbf{S} = 2^{64} - 2^0 = 2^{64} - 1$

Carevi matematičari računali su dva dana da bi izračunali koliko zrna treba predati veziru. Izračunali su da taj broj iznosi: **18 446 744 073 709 551 615.** Nama je, uz pomoć MS Excela, trebalo nepunih 5 minuta da dobijemo lijep grafički prikaz ☺ (na sljedećoj stranici).

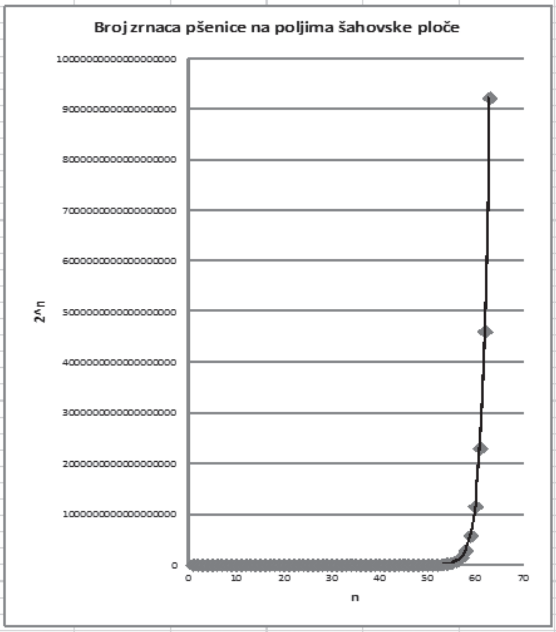
Car se zamislio jer su mu matematičari rekli da njegove robne zalihe ne bi bile dovoljne ni kada bi bile i sto puta veće. (Radi se zapravo otprilike o 150 – godišnjem današnjem urodu pšenice u cijelom svijetu!) Na kraju je smislio rješenje, pozvao vezira i rekao mu: *Dragi čovječe, ja te ne želim prevariti niti za jedno zrno, pa ćeš ti svoju nagradu brojiti zajedno s mojim slugama.*

Kada bi vezir pristao da sam prebrojava zrno po zrno neprekidno dan i noć, prebrojavajući po zrno u sekundi, on bi prvog dana prebrojio ukupno 86 400 zrna. Da bi prebrojio milijun zrna, trebalo bi mu oko 10 dana neprekidnog brojenja. Jedan kubni metar pšenice prebrojavao bi pola godine. Za 10 godina neprekidnog brojenja izbrojio bi 20 kubnih metara. Ako bi tako prebrojavao i dalje, Sesa bi za vrijeme života izbrojio tek neznatni dio nagrade koja mu pripada.

Čuvši to, veziru je postalo neugodno i počeo se ispričavati da ima hitnoga posla, na što se car nasmijao i dao mu bogatu popudbinu kako bi svijetom širio glas o milostivosti cara Šerama. Priča o perzijskoj šahovskoj ploči možda je samo bajka. Međutim, stari su Perzijanci i Indijci bili briljantni utirači matematičkih putova pa su razumjeli goleme brojeve koji nastaju ponavljanim udvostručivanjem. Da je šahovska ploča izmišljena sa 100 kvadrata (10 × 10) umjesto sa 64 (8 × 8), dug u zrnju pšenice težio bi poput Zemlje.

Niz brojeva poput ovih, kod kojeg je svaki broj točan višekratnik prethodnog, zove se geometrijski niz, a on opisuje eksponencijalni rast. Matematička funkcija koju je vezir očito poznavao je **EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA**.

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
23	8388608
24	16777216
25	33554432
26	67108864
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824
31	2147483648
32	4294967296
33	8589934592
34	17179869184
35	34359738368
36	68719476736
37	137438953472
38	274877906944
39	549755813888
40	1099511627776
41	2199023255552
42	4398046511104
43	8796093022208
44	17592186044416
45	35184372088832
46	70368744177664
47	140737488355328
48	281474976710656
49	562949953421312
50	1125899906842620
51	2251799813685250
52	4503599627370500
53	9007199254740990
54	18014398509482000
55	36028797018964000
56	72057594037927900
57	144115188075856000
58	288230376151712000
59	576460752303423000
60	1152921504606850000
61	2305843009213690000
62	4611686018427390000
63	9223372036854780000



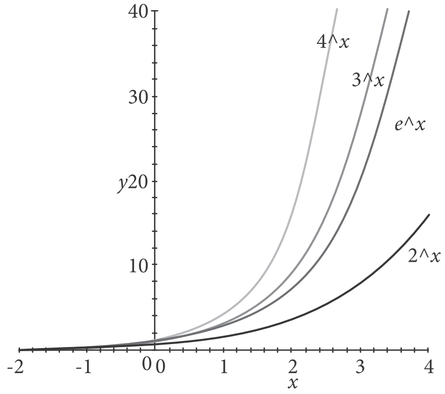
Eksponencijalna funkcija definira se kao:

$$f(x) = a^x \text{, pri čemu je baza } a > 0 \text{ i } a \neq 1$$

Eksponencijalna je funkcija definirana za svaki $x \in \boldsymbol{R}$ (domena je cijeli skup $\boldsymbol{R}$).

1. Skup vrijednosti funkcije su pozitivni realni brojevi (kodomena je $\boldsymbol{R}^+$).
2. Graf funkcije $f(x) = a^x$ siječe os y u točki (0,1).
3. Graf funkcije $f(x) = a^x$ asimptotski se približava osi x.
4. Funkcija $f(x) = a^x$ je injektivna, tj. iz $a^{x_1} = a^{x_2}$ slijedi $x_1 = x_2$.
5. Razlikujemo dva slučaja:

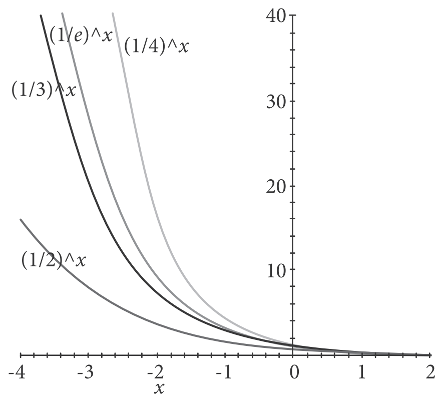
1. Kada je baza $a > 1$, eksponencijalna funkcija je rastuća:



Rast je brži što je baza a veća

Za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$.

2. Kada je baza $0 < a < 1$, eksponencijalna funkcija pada



Pad je brži (strmiji) što je baza a bliža nuli.

Za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$

Eksponencijalni rast i pad imaju nekoliko ekvivalentnih prikaza:

FUNKCIJA	RAST	PAD
$f(x) = f_0 \cdot a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
$f(x) = f_0 \cdot (1+p)^x$	$p > 0$	$p < 0$
$f(x) = f_0 \cdot e^{kx}$	$k > 0$	$k < 0$

pri čemu je f_0 početno stanje kada je $x = 0$.

Eksponencijalne funkcije iznimno su zanimljive kao matematički modeli za opis mnogih prirodnih procesa, fizikalnih veličina, kao i ekonomskih i društvenih pojava u realnom životu.

Budući da su procesi u prirodi često vremenski promjenljivi, upravo je nezavisna varijabla x u biti vremenska varijabla t *(time)*.

Rast populacije

U biologiji je dobro poznato da mnoge populacije u početku svog razvoja pokazuju svojstva eksponencijalnog rasta.

Ograničit ćemo se na model neograničenog rasta populacije koji podrazumijeva rast populacije koji nije ograničen hranom, prostorom, niti bilo kojim drugim životnim resursom; dakle, rast koji nije ovisan o gustoći populacije. No, budući da realno postoje mnogi ograničavajući faktori za njen rast vezani uz gustoću (predatori, ograničenja resursa, ...), taj isti trend ne slijedi i poslije.

Dakle, u aproksimaciji neograničenog rasta populacije vrijedi vremenski kontinuirani eksponencijalni rast:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$$

gdje je $N(t)$ broj jedinki u populaciji nakon vremena t, N_0 početna veličina populacije, t vrijeme,

r individualna eksponencijalna stopa rasta, $\begin{cases} r > 0 & \text{populacija raste eksponencijalno} \\ r < 0 & \text{populacija se smanjuje i približava nuli} \\ r = 0 & \text{populacija je konstantna} \end{cases}$

Primjer: Koliko treba vremena da se populacija udvostruči?

Rješenje: Za rješavanje nam je potrebna logaritamska funkcija.

$N(t) = 2 \cdot N_0$

$t = ?$

$$2N_0 = N_0 \cdot e^{rt}$$

$$2 = e^{rt}$$

$$\ln 2 = rt$$

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Prognoze koje ovaj model daje mogu biti upotrebljive samo kroz vrlo kratko razdoblje.

Postoje situacije u prirodi kada se eksponencijalni rast može događati kroz relativno duže razdoblje, a to su kada populacije prirodno ili uz pomoć čovjeka koloniziraju novo i za njih povoljno područje, kada su populacije bile snažno ograničavane u rastu uslijed ljudskih aktivnosti, a onda te aktivnosti prestanu, kada su populacije prirodno podložne velikim fluktuacijama i nalaze se u onoj fazi kada od niske gustoće rastu prema maksimalno mogućoj gustoći.

Eksponencijalni rast svoju primjenu nalazi u:

- mikrobiologiji (rast bakterija)
- konzervacijskoj biologiji (upravljanje ugroženim populacijama)
- uzgoju organizama (prognoza priroda/prinosa)
- karanteni biljaka i kukaca (rast unešenih vrsta)
- ribarstvu (prognoza dinamike ribljih populacija)

Većina populacija u prirodi ne raste eksponencijalno ili se taj rast događa vrlo kratkotrajno. Kada bi populacije u prirodi rasle eksponencijalno, čak bi i populacije vrsta koje se razmnožavaju vrlo sporo dostigle enormno velike brojke i u relativno kratkom vremenu doslovno prekrile Zemlju.

Thomas Malthus je 1798. u svom djelu *Esej o principima stanovništvima* ukazao na problematiku eksponencijalnog rasta ljudske populacije u odnosu na linearni rast resursa za preživljavanje.

Smatrao je da su zato ljudi osuđeni na bijedu i siromaštvo ukoliko se ne poduzmu mjere ograničenja porasta stanovništva. Bez tih mjera prirodne nedaće - glad, bolesti, ratovi itd. - prirodnim će putem regulirati odnos između rasta populacije i proizvodnje hrane. No, njegove je ideje korigirao belgijski matematičar **Pierre-François Verhulst** 1838. kada je izveo svoju logističku jednadžbu da bi opisao samoograničavajući rast bioloških populacija.

$$N(t) = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-r_0 t}}$$

pri čemu je $\boldsymbol{K}$ nosivi kapacitet sustava, a parametar $\dfrac{K \quad N}{}$ se računa pomoću maksimalnog kapaciteta $\boldsymbol{K}$ i početne populacije $\boldsymbol{N_0}$

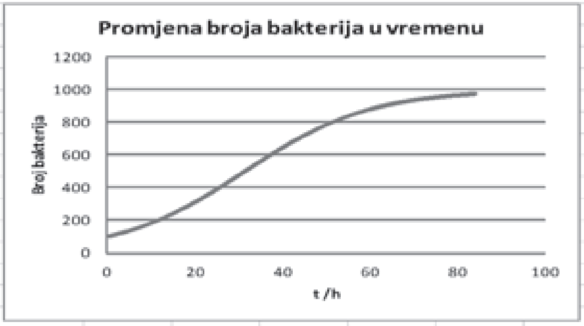
Primjer: Kultura bakterija ima stopu rasta $k = 0.07$ na sat, a maksimalni kapacitet podloge je 1000 bakterija. Ako na početku imamo 100 bakterija, napišite jednadžbu modela.

Rješenje: $$A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$$

$$N(t) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0.07t}}$$

Poslužit ćemo se MS Excelom kako bismo prikazali ovaj logistički model rasta populacije bakterija.

t/h	N(t)
0,5	103
1	106
6	145
12	205
18	281
24	374
30	476
36	580
42	678
48	762
54	830
60	881
66	919
72	945
78	963
84	975



Primjer: Širenje AIDS-a (i ostalih epidemija) također se može modelirati *logističkom funkcijom*.

AIDS se širi gradom čija rizična populacija broji oko 50 000 osoba. U početnoj fazi u gradu je 100 inficiranih osoba, a nakon 10 tjedana broj inficiranih popeo se na 1000. Nakon koliko će vremena biti inficirana polovica rizične populacije?

Rješenje:

K = 50 000; N_0 = 100; $N(t_1)$ = 1000; t_1 = 10

A = (50 000 - 100)/100 = 499

Treba prvo riješiti jednadžbu $1000 = \frac{50000}{1 + 499 \cdot e^{-10k}}$, odakle se dobiva $1 + 499 \cdot e^{-10k} =$ $= 50$, tj. $499 \cdot e^{-10k} = 49$. Odatle je $e^{-10k} = 0.0982$, $-10k = \ln 0.0982$ i konačno $k = 0.23208$

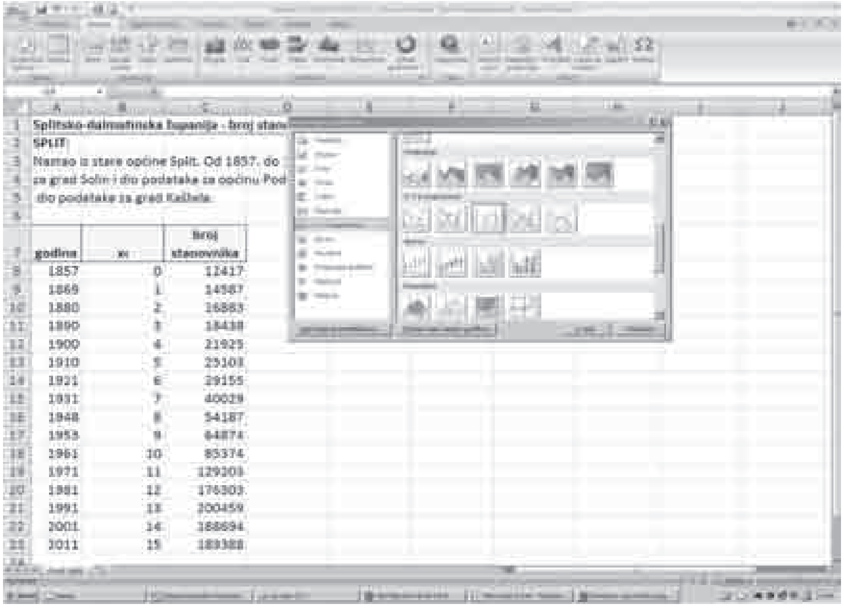
Model širenja AIDS-a u ovoj populaciji glasi $N(t) = \frac{50\,000}{1 + 499 \cdot e^{-0.23208t}}$. Vrijeme potrebno da se inficira pola rizične populacije dobit ćemo rješavanjem jednadžbe: $25000 = \frac{50\,000}{1 + 499 \cdot e^{-0.23208t}}$, što nas vodi na $t = 26.8$ tjedana.

Primjer: Na sljedećem ćemo primjeru pokazati kako je eksponencijalni model primjenjiv i u proučavanju migracija ljudi. Podaci za ovaj primjer preuzeti su s mrežnim stranica Državnog zavoda za statistiku. Na mrežnim stranicama Državnog zavoda za statistiku http://www.dzs.hr/ među bazama podataka nalaze se i podaci o **Naseljima i stanovništvu RH od 1857. do 2001.** gdje odabirom županije pa pojedinog grada/naselja i vremenskog intervala za koji želimo podatke dobivamo Excelov dokument s podacima o broju stanovnika. Ako želimo podatke s posljednjeg popisa stanovništva 2011. godine, potrebno je na istoimenom linku pronaći i taj podatak.

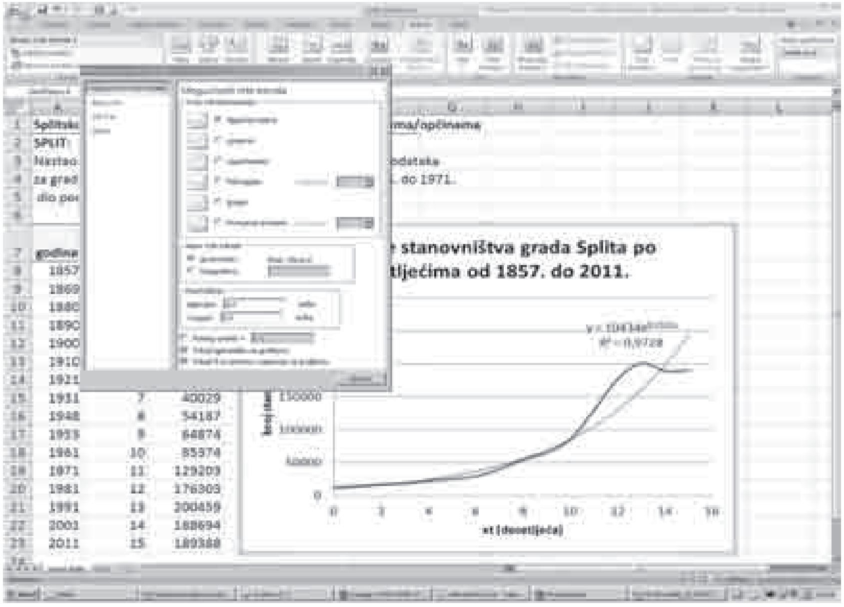
U ovom smo radu radi ilustracije izabrali dva naselja: grad Split koji je tijekom svog razvoja bilježio stalni prirast broja stanovnika, i selo Smiljan za koje očekujemo trend opadanja broja stanovnika.

Pogledajmo prvo kretanje stanovništva u gradu Splitu tijekom proteklih 150 godina. Podaci su dobiveni putem popisa stanovništva koji su se obavljali otprilike svakog desetljeća (s iznimkom 2. svjetskog rata).

Dobivene podatke organiziramo u tablicu s 3 stupca, pri čemu, radi dobivanja jednostavnijeg modela, umjesto stvarnih godina kreiramo vremensku varijablu t kojoj je ishodište u početku prvog razdoblja, dakle 1857. godine ($t = 0$). Kasnija razdoblja numeriramo dalje 1, 2, 3, ... Pri ovom postupku aproksimiramo jedno desetljeće jediničnom vrijednošću varijable x.



Nakon uređenja grafa, MS Excel pruža nam mogućnost izrade željenog trend modela.



Osim jednadžbe modela dobivamo i vrijednost R^2, koeficijent determinacije koji je pokazatelj reprezentativnosti modela i kazuje u kojem se postotku promjena zavisne varijable (u našem slučaju broja stanovnika) s vremenom može objasniti s vrijednostima koje daje izabrani model. U ovom slučaju on iznosi 0.9728, što znači da se

97.28% periodičnih promjena broja stanovnika u gradu Splitu (u razdoblju od 1857. do 2011.) objašnjava eksponencijalnim trend modelom.

Model možemo transformirati u oblik $y = a \cdot b^x$, odnosno $y = a \cdot (1 + s)^x$, pri čemu s predstavlja stopu promjene, pa uz pomoć Excela dobijemo još informacija.

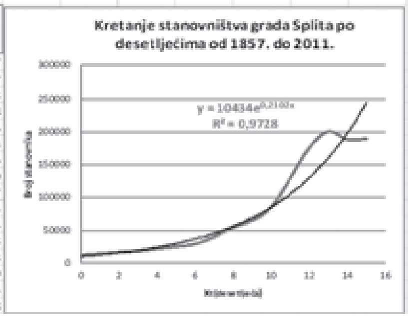
	Y=10434*1,23392^x	
a	10434	predstavlja broj stanovnika u ishodišnom razdoblju (1857.g)
b	1,2339 =	EXP(0,2102)
s	23,39%	očekuje se prosječni desetljetni rast broja stanovnika od 23,39%

Splitsko-dalmatinska županija - broj stanovnika po gradovima/općinama

SPLIT:

Nastao iz stare općine Split. Od 1857. do 1971. sadrži dio podataka za grad Solin i dio podataka za općinu Podstrana, a od 1948. do 1971. dio podataka za grad Kaštela.

godina	x_t	broj stanovnika
1857	0	12417
1869	1	14587
1880	2	16883
1890	3	18438
1900	4	21925
1910	5	25103
1921	6	29155
1931	7	40029
1948	8	54187
1953	9	64874
1961	10	85374
1971	11	129203
1981	12	176303
1991	13	200459
2001	14	188694
2011	15	189388



Očigledno je da stanovništvo grada Splita ima tendenciju eksponencijalnog rasta tijekom vremena. Naravno, ni taj rast neće biti beskonačan zbog ograničenih resursa pa je vjerojatno da će i ovaj model nakon nekog vremena ući u fazu stagnacije i pratiti logistički model razvoja.

Suprotan primjer je selo Smiljan, rodno mjesto velikana hrvatske i svjetske znanosti, Nikole Tesle. Izabrali smo ga jer je, kao i mnoga sela Dalmatinske zagore i Like, pretrpjelo depopulaciju tijekom posljednjih 100 godina.

Ličko-senjska županija - broj stanovnika po naseljima

Za 1869. i 1880. sadrži podatke za naselja Rastoka i Smiljansko Polje, a u 1857. dio podataka za naselje Smiljansko Polje.

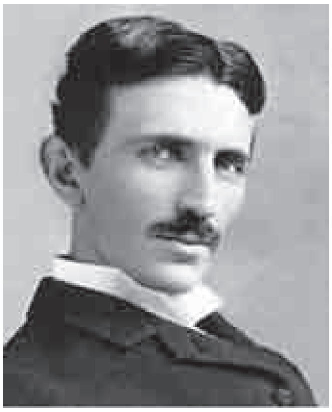
godina	x_t	Broj stanovnika
1857	0	2090
1869	1	2365
1880	2	1973
1890	3	1222
1900	4	1283
1910	5	1162
1921	6	1127
1931	7	1068
1948	8	747
1953	9	818
1961	10	835
1971	11	761
1981	12	605
1991	13	555
2001	14	446

Odmah je vidljivo da se opadanje broja stanovništva u Smiljanu dobro može modelirati eksponencijalnim modelom. Eksponent je negativan pa vidimo da je riječ o padu, ali ćemo izračunati točnu stopu promjene.

	y=2132,8*0,8994^x	
a	2133	očekivani broj stanovnika u ishodišnom razdoblju
b	0,8994 =	EXP(-0,106)
s	-10,06%	očekuje se prosječno desetljetno opadanje broja stanovnika od 10,06%

Odmah je vidljivo da se opadanje broja stanovništva u Smiljanu dobro može modelirati eksponencijalnim modelom. Eksponent je negativan pa vidimo da je riječ o padu, ali ćemo izračunati točnu stopu promjene.

Dovoljno znatiželjni i istraživački orijentirani učenici mogu potražiti podatke o populaciji u njihovim selima/gradovima i vidjeti kakav oni trend pokazuju!



Cijeljenje rana

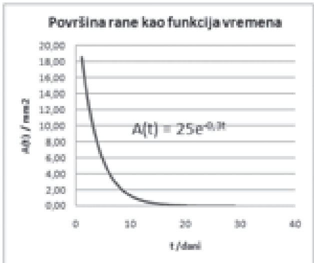
Normalno cijeljenje rana moguće je modelirati eksponencijalnom funkcijom. Naglasimo da je ovo gruba aproksimacija budući da postoje brojni matematički zahtjevniji i precizniji modeli. Ako sa A_0 označimo inicijalnu površinu rane, tada se površina rane nakon ***t*** dana ***A*(*t*)** može opisati funkcijom:

$A(t) = A_0 \cdot e^{-0.3t}$. Pretpostavimo da je početna rana imala površinu od 25 mm².

Dakle, naša jednadžba glasi $A(t) = 25 \cdot e^{-0.3t}$.

Prateći taj model možemo predvidjeti kolika će rana biti tijekom sljedećih dana i, naravno, kada će u potpunosti zacijeliti:

t	*A(t)*	*t*	*A(t)*
1	18,52	16	0,21
2	13,72	17	0,15
3	10,16	18	0,11
4	7,53	19	0,08
5	5,58	20	0,06
6	4,13	21	0,05
7	3,06	22	0,03
8	2,27	23	0,03
9	1,68	24	0,02
10	1,24	25	0,01
11	0,92	26	0,01
12	0,68	27	0,01
13	0,51	28	0,01
14	0,37	29	0,00
15	0,28		



Ako računamo s točnošću od 2 decimale, očigledno je da će rana u potpunosti zacijeliti 29. dana. Uz pomoć MS Excela možemo dobiti lijep grafički prikaz (sl. gore).

Složeno ukamaćivanje

Još u doba babilonske algebre pojavili su se izrazi za računanje složenih kamata u obliku eksponencijalne funkcije. U današnje vrijeme, kada nam banke i njihove kamate u velikoj mjeri određuju svakodnevni život, dobro je biti upoznat s elementima financijske matematike.

Složeni kamatni račun jedan je od njezinih temelja. Naravno, u tom odnosu uvijek je povoljnije biti u ulozi ulagača a ne dužnika, pa ćemo u razmatranju radije biti u povoljnijoj poziciji.

Zamislimo da u banku uložimo određeni iznos, glavnicu $\mathbf{C_0}$. Banka primjenjuje kamatnu stopu $\boldsymbol{p}$ na godišnjoj razini. Ovisno o danim uvjetima, banka kamate može pripisivati $\boldsymbol{n}$ puta u godini. Iznos kojim ulagač raspolaže nakon vremena $\boldsymbol{t}$ dan je izrazom: $C(t) = C_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^{nt}$.

Pogledajmo na jednom primjeru kako se mijenja konačni iznos kojim ulagač raspolaže u slučaju da se razdoblje pripisivanja kamata (razdoblje kapitalizacije) mijenja:

Neka je početni ulog 100 000 kn, a razdoblje kapitalizacije **godišnje, polugodišnje, kvartalno, mjesečno, dnevno, svakog sata, svake minute.** Banka primjenjuje godišnju kamatnu stopu od 4%. Štediša podiže novce nakon godine dana. C_0 = 100 000 kn.

Za izračun ćemo opet koristiti MS Excel:

Co =	100000			
t =	1			
ukamaćivanje	*n*	*C*		
godišnje	1	104000,00		
polugodišnje	2	104040,00		
kvartalno	4	104060,40		
mjesečno	12	104074,15		
dnevno	365	104080,85		
svakog sata	8760	104081,07		
svake minute	525600	104081,08		104081,0773

Po dobivenim rezultatima vidljivo je da je za ulagača povoljnija češća kapitalizacija.

Zamislimo da se vrijeme između dva obračuna sve više smanjuje, a pribrajanje kamata nema vremenskog prekida. Tada govorimo o neprekidnoj (kontinuiranoj) kapitalizaciji.

U tom slučaju broj n postaje sve veći i veći, a konačna vrijednost uloga nakon $\boldsymbol{t}$ godina postaje: $C(t) \quad C\,e^{pt}$

Pogledajmo sada na koju bi vrijednost narastao naš ulog od 100 000 kn u slučaju neprekinute kapitalizacije u istom vremenu od 1 godine s istom kamatnom stopom od 4% godišnje.

Co =	100000		
t =	1		
p =	4		
C =	104081,08		
	104081,0774	neprekinuta kapitalizacija	
	104081,0773	kapit. svake minute	

Konačni iznos dobiven neprekidnom kapitalizacijom s točnošću od dvije decimale jednak je onom računatom s kapitalizacijom svake minute. Vidljivo je međutim da se iznosi ipak razlikuju kada računamo s točnošću od barem 4 decimalna mjesta.

Ovdje se mogu postaviti brojni zanimljivi zadaci.

Nakon koliko će vremena ulagač udvostručiti ulog u slučaju da uloži u banku iznos C_0 ako se kamata pripisuje neprekinuto. Banka daje godišnju kamatu od 3%.

Uvrštavanjem poznatih veličina dolazimo do jednostavne eksponencijalne jednadžbe

$$2C_0 = C_0 e^{0.03t}$$

$$2 = e^{0.03t}$$

$$\ln 2 = 0.03t$$

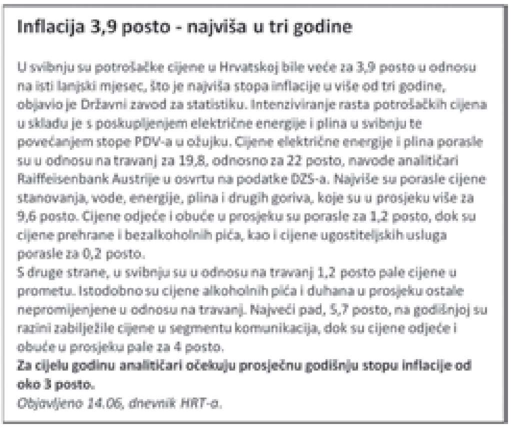
$$t = \frac{\ln 2}{0.03}$$

$$t = 23.1 \text{ godina}$$

Nažalost, ekonomska kretanja posljednjih godina ne pokazuju ekonomski rast nego pad, pa je vjerojatnije da ćemo trpjeti posljedice **inflacije.** Inflacija je prekomjerno povećanje novčane mase u optjecaju, što dovodi do smanjenja vrijednosti novca. Posljedica inflacije je smanjivanje vrijednosti novca za određeni postotak svake godine, te rast cijena. Neka je A_0 početna cijena nekog proizvoda (usluge), a $\boldsymbol{p}$ godišnja stopa inflacije. Tada je cijena tog istog proizvoda nakon t godina dana izrazom $A(t) = A_0(1+p)^t$.

Ukoliko je inflacija, kao u dolje navedenom primjeru, 3,9% , to znači da će cijena proizvoda koja je danas 1 kn (npr. papirnate maramice) za godinu dana biti 1.039 kn. Kada bi se zadržala ista stopa inflacije tijekom 5 godina, cijena istih maramica bi tada bila $1.039^5 = 1.21$ kn.

Što još to znači? Ako neka osoba u strahu od kolapsa bankarskog sustava svoju ušteđevinu od 10 000 € drži kod kuće, svake godine gubi na vrijednosti. Trebalo bi je ukamatiti na banci tijekom te godine s kamatom od barem 3.9% kako ne bi izgubila na vrijednosti (ili oploditi nekim poslom sa stopom prinosa većom od 3.9%).



Inflacija 3,9 posto - najviša u tri godine

U svibnju su potrošačke cijene u Hrvatskoj bile veće za 3,9 posto u odnosu na isti lanjski mjesec, što je najviša stopa inflacije u više od tri godine, objavio je Državni zavod za statistiku. Intenziviranje rasta potrošačkih cijena u skladu je s poskupljenjem električne energije i plina u svibnju te povećanjem stope PDV-a u ožujku. Cijene električne energije i plina porasle su u odnosu na travanj za 19,8, odnosno za 22 posto, navode analitičari Raiffeisenbank Austrije u osvrtu na podatke DZS-a. Najviše su porasle cijene stanovanja, vode, energije, plina i drugih goriva, koje su u prosjeku više za 9,6 posto. Cijene odjeće i obuće u prosjeku su porasle za 1,2 posto, dok su cijene prehrane i bezalkoholnih pića, kao i cijene ugostiteljskih usluga porasle za 0,2 posto.

S druge strane, u svibnju su u odnosu na travanj 1,2 posto pale cijene u prometu. Istodobno su cijene alkoholnih pića i duhana u prosjeku ostale nepromijenjene u odnosu na travanj. Najveći pad, 5,7 posto, na godišnjoj su razini zabilježile cijene u segmentu komunikacija, dok su cijene odjeće i obuće u prosjeku pale za 4 posto.

Za cijelu godinu analitičari očekuju prosječnu godišnju stopu inflacije od oko 3 posto.

Objavljeno 14.06, dnevnik HRT-a.

Kao pokazatelj inflacije često se prati vrijeme potrebno da se cijene udvostruče ($A(t) = 2A_0$).

Rješavanje eksponencijalne jednadžbe vodi nas na rezultat

$$2A_0 = A_0(1+p)^t$$

$$2 = (1+p)^t$$

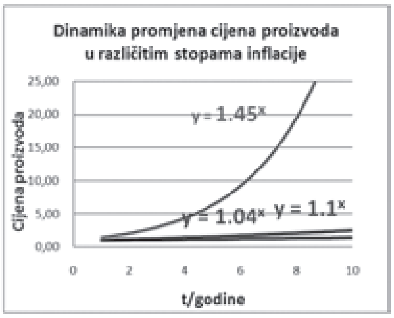
$$t = \frac{\ln 2}{\ln(1+p)}$$

Na sreću, tu je riječ o relativno blagoj inflaciji (udvostručivanje svakih 18 godina). Povijest pamti i znatno veće stope inflacije. Svi mi koji imamo barem 40-ak godina sjećamo se velike inflacije koju je trpjelo tadašnje jugoslavensko gospodarstvo. Ekstremna inflacija naziva se **hiperinflacija**, a karakterizira je mjesečni rast cijena od barem 50%. Povijesni rekord drže redom:

1. Mađarska (1946.) s mjesečnom stopom od $4.19 \cdot 10^{16}$ % mjesečno, pri čemu su se cijene udvostručivale svakih 15 sati
2. SR Jugoslavija (1993.-1994.) s mjesečnom stopom $5 \cdot 10^{15}$ % mjesečno (cijene su se udvostručivale svakih 16 sati)
3. Grčka (1941.-1944.) s mjesečnom stopom $8.55 \cdot 10^{9}$ % (udvostručivanje svakih 28 h)
4. Njemačka (1923.) s mjesečnom stopom $3.26 \cdot 10^{6}$ % (udvostručivanje svakih 49 h)

Pomoću MS Excela pokazat ćemo dinamiku rasta cijena (proizvoda početne cijene 1 kn) u slučaju 3 različite godišnje stope inflacije.

t/ godina	p1=4%	p2=10%	p3=45%
1	1,04	1,10	1,45
2	1,08	1,21	2,10
3	1,12	1,33	3,05
4	1,17	1,46	4,42
5	1,22	1,61	6,41
6	1,27	1,77	9,29
7	1,32	1,95	13,48
8	1,37	2,14	19,54
9	1,42	2,36	28,33
10	1,48	2,59	41,08



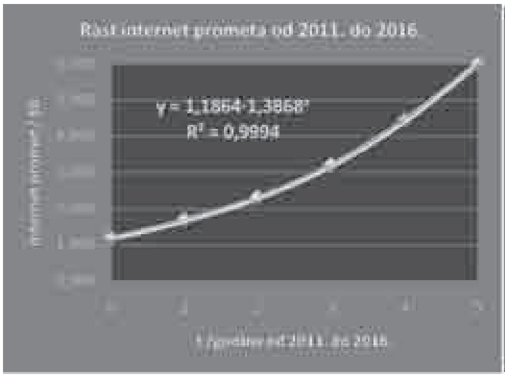
A(t)=(1+p)^t

Izračunat ćemo i vrijeme udvostručivanja cijena:

stopa inflacije %	Vrijeme udvostručavanja
4	17,7
10	7,3
45	1,9

Rast internetskog prometa

Rast internetskog prometa također je dobar primjer eksponencijalnog rasta. Graf predstavlja očekivani rast internetskog prometa u Središnjoj Europi od 2011. do 2016. godine, a rađen je prema predviđanjima *Ciscovih* analitičara.



Na osi ordinata nalaze se mjerne jedinice količine informacija

1 EB (exabyte) = 10^{18} B

No po analitičarima od 2016. ući ćemo u zettabytes eru

1 ZB (zettabyte) = 10^{21} B

Iz modela možemo očitati sljedeće informacije:

1.1864 EB predstavlja očekivani internetski promet u početnoj 2011. godini

(1.3868 – 1) · 100 = 38.68, što znači da se očekuje prosječni godišnji rast internetskog prometa od 38.68%.

Dramatični rast internetskog prometa rezultat je četiriju ključnih faktora: većeg broja uređaja, većeg broja korisnika, većih brzina i većeg broja video sadržaja.

Promjena atmosferskog tlaka s visinom

Svima je i iz iskustva poznato da se atmosferski tlak s visinom smanjuje, ali ne znaju svi da pritom slijedi eksponencijalnu ovisnost o visini. Dakle, statički atmosferski tlak na nekoj visini ***h*** određen je relacijom $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} \cdot h}$.

Gdje su h – nadmorska visina

p_0 – tlak na referentnom nivou ($h = 0$)

g – akceleracija zemljine sile teže ($g = 9.81\ m/s^2$)

ρ_0 – gustoća zraka na referentnom nivou ($h = 0$)

Primjer: Izračunajte tlak na vrhu Marjana (h = 178 m) ako znamo da je u njegovom podnožju, na obali mora p_0=101 400 Pa, a ρ_0= 1.16 kg/m³

$$p = 101400 \cdot e^{-\frac{1.16 \cdot 9.81}{101400} \cdot 178}$$

h =	178	m
p0 =	101400	Pa
ρ0 =	1,16	kg/m3
p(178m) =	99394,53	Pa

Newtonov zakon hlađenja

Newtonov zakon hlađenja glasi: $T(t) = T_{okoline} + (T_{poč} - T_{okoline}) \cdot e^{-kt}$.

Primjer: Kako bismo ohladili tvrdo kuhano jaje temperature 98 °C, ostavimo ga u tanjuru na sobnoj temperaturi (18 °C). Nakon 5 minuta temperatura jaja iznosi 38 °C. Kada će jaje doseći temperaturu 25 °C?

$T_{poč}$ = 98 °C
$T_{okoline}$ = 18 °C
t = 5 min
$\underline{T = 38\ °C}$

Prvo ćemo iskoristiti poznate veličine kako bismo odredili konstantu *k:*

$$38 = 18 + (98 - 18) \cdot e^{-5k}$$

$$20 = 80 \cdot e^{-5k}$$

$$0.25 = e^{-5k}$$

$$\ln 0.25 = -5k$$

$$k = -\frac{\ln 0.25}{5}$$

$$k = 0.2773$$

Sada možemo odrediti i vrijeme potrebno da nam se jaje ohladi na temperaturu 25°C:

$$25 = 18 + (98 - 18) \cdot e^{-0.2773t}$$

$$7 = 80 \cdot e^{-0.2773t}$$

$$0.0875 = e^{-0.2773t}$$

$$\ln 0.0875 = -0.2773t$$

$$t = -\frac{\ln 0.0875}{0.2773}$$

$$t = 8.79 \text{ min}$$

Poigrajmo se sada malo detektiva i pomozimo agentu Gilu Grissomu. Ovaj zakon svoju primjenu nalazi u forenzici za

Određivanje vremena smrti

Primjer: Dogodilo se ubojstvo i na teren je izašla policijska ekipa za očevid. Temperatura tijela ubijenog tada je iznosila 26.5 °C. Dva sata poslije temperatura tijela žrtve iznosila je 24.5 °C. U sobi je temperatura konstantna i iznosi 20 °C. Uz pretpostavku da je temperatura tijela prije smrti bila prosječnih 36.5 °C, odredite vrijeme smrti.

$T_{poč} = 26.5$ °C

$T(2) = 24.5$ °C

$T_{okoline} = 20$ °C

$$24.5 = 20 + (26.5 - 20) \cdot e^{-k \cdot 2}$$

$$4.5 = 6.5 \cdot e^{-2k}$$

$$0.6923 = e^{-2k}$$

$$\ln 0.6923 = -2k$$

$$k = -\frac{\ln 0.6923}{2}$$

$$k = 0.18387$$

Dakle, hlađenje tijela pri tim uvjetima slijedi zakonitost:

$$T(t) = 20 + (36.5 - 20) \cdot e^{-0.18387t}$$

$$T(t) = 20 + 16.5 \cdot e^{-0.18387t}$$

Znajući dakle konačnu temperaturu trupla, možemo odrediti vrijeme smrti:

$$24.5 = 20 + 16.5 \cdot e^{-0.18387t}$$

$$4.5 = 16.5 \cdot e^{-0.18387t}$$

$$0.2727 = e^{-0.18387t}$$

$$\ln 0.2727 = -0.18387t$$

$$t = 7.07 \text{ h}$$

Dakle, ubojstvo se dogodilo oko 7 sati prije pronalaska tijela.

Literatura:

1. *Koliko sunaca, koliko svjetova (original „Billions and Billions: Thoughts on Life and Death at the Brink of the Millennium"),* Carl Sagan i Ann Druyan, *Izvori*, Zagreb 1999.
2. http://www.intmath.com
3. http://www.cisco.com
4. http://www.algebralab.org
5. http://www.dzs.hr/ mrežne stranice Državnog zavoda za statistiku
6. http://en.wikipedia.org/wiki/
7. http://www.worldofteaching.com/
8. *Matematika 2,* Ljiljana Kelava-Račić, Zvonimir Šikić, udžbenik za 2. razred četverogodišnje strukovne škole, ŠK, Zagreb 2008.