Arhimedov teorem

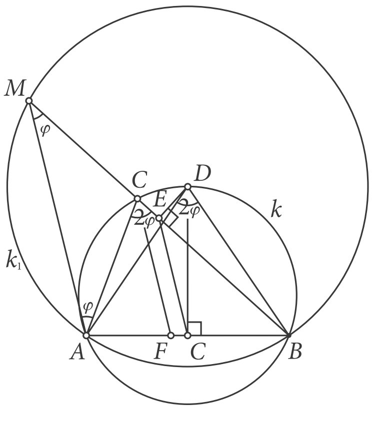
ŠEFKET ARSLANAGIĆ[1]
ALIJA MUMINAGIĆ[2]

U ovom članku dat ćemo četiri različita dokaza jednog teorema iz geometrije trokuta koja je u matematičkoj literaturi poznata kao **Arhimedov[3] teorem**. U jednom dijelu literature ovaj teorem možemo naći formuliran kao zadatak (bez navođenja da je to Arhimedov teorem). Nakon dokaza dajemo i primjenu ovog teorema kroz tri zadatka.

Teorem (Arhimedov): Oko trokuta ΔABC opisana je kružnica k. Neka je točka D središte onog luka $\widehat{AB}$ kružnice k koji sadrži vrh C trokuta i neka je pri tome $|AC| < |BC|$. Neka je točka E nožište okomice iz točke D na stranicu $\overline{BC}$ trokuta. Treba dokazati da je

$$|AC| + |CE| = |BE|.$$

Dokaz 1. Produljimo stranicu $\overline{BC}$ preko točke C do točke M tako da bude $|CM| = |CA|$ (sl. 1). Trokut ΔCAM je jednakokračni i zato je $|\angle CAM| = |\angle CMA| = \varphi$, a odavde je $|\angle ACB| = 2\varphi$ (kao vanjski kut trokuta ΔAMC). Dalje je $|\angle ACB| = |\angle ADB| = 2\varphi$ (kao obodni kutovi nad istim lukom $\widehat{AB}$ kružnice k).



Slika 1.

[1]Šefket Arslanagić, Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, B i H
[2]Alija Muminagić, Nykøbing, Danska
[3]Arhimed iz Sirakuze, oko 287.-212. prije Krista, starogrčki matematičar

Kružnica k_1, koja je opisana trokutu ΔABM, ima središte na simetrali stranice $\overline{BM}$. Kut $|\angle AMB| = \varphi$ je obodni kut u kružnici k_1 pa središte kružnice k_1 mora biti u točki iz koje se stranica $\overline{AB}$ trokuta ΔABC vidi pod kutom 2φ (obodni kut kružnice jednak je polovini središnjeg kuta nad istim lukom $\widehat{AB}$), pa slijedi da točka D pripada simetrali stranice $\overline{AB}$ (točka D je središte luka $\widehat{AB}$). Točka D je, dakle, sjecište simetrala stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BM}$ i središte kružnice k_1. Zbog $\overline{DE} \perp \overline{BM}$ i točka D pripada simetrali stranice $\overline{BM}$ trokuta ΔABM, pa slijedi da je točka E polovište dužine $\overline{BM}$.

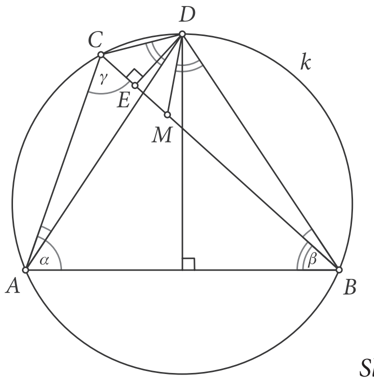
Zato imamo

$$|BE| = |ME| = |MC| + |CE|,$$

a odavde zbog $|MC| = |AC|$ slijedi:

$$|BE| = |AC| + |CE|, \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

Dokaz 2. Neka je točka M na stranici $\overline{BC}$ trokuta ΔABC između točaka B i E takva da je $|CE| = |EM|$. Tako je $|BM| = |BE| - |EM| = |BE| - |CE|$. Iz $|BM| = |BE| - |CE|$ slijedi da je $|BM| + |CE| = |BE|$ pa zaključujemo da moramo dokazati da je $|BM| = |AC|$ (sl. 2).



Slika 2.

Promatrajmo trokute ΔBDM i ΔADC. Vrijedi da je $|AD| = |BD|$ (jer je točka D središte luka $\widehat{AB}$) te $|\angle DBM| = |\angle DAC|$ (kao obodni kutovi kružnice k nad lukom $\widehat{CD}$). Dalje je $|\angle CDA| = |\angle ABC| = \beta$ (obodni kutovi nad lukom $\widehat{AC}$ kružnice k). Preostaje nam da dokažemo da je i $|\angle MDB| = \beta$.

Četverokut $ABDC$ je tetivni pa je zato $|\angle CDB| = 180° - \alpha$. Lako se dokaže da je $\Delta CDE \cong \Delta MDE$ pa je $|\angle CDM| = 2|\angle CDE| = 2(90° - |\angle DCE|) = 2(90° - |\angle BAD|)$ (jer je $|\angle DCE| = |\angle DCB| = |\angle BAD|$ kao obodni kutovi kružnice k nad lukom $\widehat{BD}$). Kako je trokut ΔADB jednakokračan (točka D središte je luka $\widehat{AB}$), a $|\angle ADB| = |\angle ACB| = \gamma$ (obodni kutovi kružnice k nad lukom $\overset{\frown}{AB}$), iz trokuta ΔABD imamo:

$$2|\angle BAD| = 180° - |\angle ADB| = 180° - \gamma \text{, tj.}$$

$$|\angle BAD| = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Dalje je

$$|\angle CDM| = 2\left(90° - |\angle BAD|\right) = 2\left[90° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right)\right] = \gamma.$$

Sa sl. 2 vidimo da je

$$|\angle MDB| = |\angle CDB| - |\angle CDM| = 180° - \alpha - \gamma = \beta.$$

Prema tome (prema teoremu K-S-K) slijedi da je

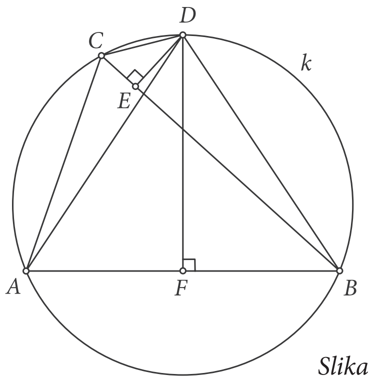
$$\Delta BDM \cong \Delta ADC,$$

a iz ove sukladnosti trokuta dobivamo

$$|AC| = |BM| - |EM| = |BE| - |CE|\text{, tj.}$$

$$|AC| + |CE| = |BE|\text{, što je i trebalo dokazati.}$$

Dokaz 3. Kako je točka D središte luka $\overset{\frown}{AB}$, vrijedi da je $|BD| = |AD|$ (sl. 3).



Slika 3.

Četverokut $ABDC$ je tetivni pa za njega vrijedi **Ptolomejev[4] teorem**:

$$|AC| \cdot |BD| + |AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|,$$

a odavde zbog $|BD| = |AD|$ slijedi:

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot (|BC| - |AC|). \qquad (1)$$

Neka je točka F nožište visine iz vrha D jednakokračnog trokuta ΔABD na osnovicu $\overline{AB}$. Tako je $|AF| = |FB|$ i $\Delta CED \sim \Delta DFB$ ($|\angle CED| = |\angle DFB| = 90°$) i $|\angle DCE| = \left(|\angle DCB|\right) = |\angle DAB| = |\angle DBA|$ (obodni kutovi nad lukom $\overset{\frown}{BD} (= \overset{\frown}{DA})$ kružnice k). Iz sličnosti ovih trokuta slijedi da je

$$\frac{|CD|}{|EC|} = \frac{|BD|}{|BF|} = \frac{|BD|}{\frac{1}{2}|AB|} \Leftrightarrow |AB| \cdot |CD| = 2|EC| \cdot |BD|. \qquad (2)$$

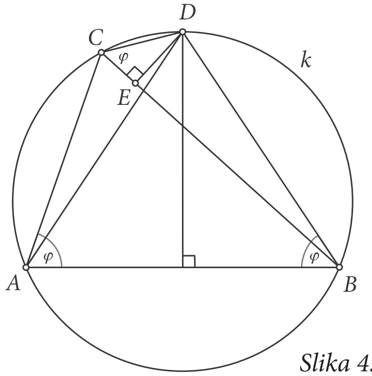
[4]Ptolomej, Klaudije (oko 100. – oko 178.), starogrčki matematičar iz Aleksandrije, autor velikog djela *Almagest* koje je izvršilo veliki utjecaj na matematiku

Sada iz (1) i (2) dobivamo da je

$$2|EC| \cdot |BD| = |BD| \cdot (|BC| - |AC|) \Leftrightarrow |BC| - |AC| = 2|EC|$$

$|BE| + |EC| - |AC| = 2|EC| \Leftrightarrow |BE| = |AC| + |EC|$, što je i trebalo dokazati.

Dokaz 4. Neka je $\varphi = |\angle BAD|$. Sa sl. 4. vidimo da je $|\angle BCD| = \varphi$ (obodni kutovi kružnice k nad kružnim lukom $\overset{\frown}{BD}$).



Slika 4.

U pravokutnom trokutu ΔCED vrijedi:

$$\cos\varphi = \frac{|CE|}{|CD|}, \text{ tj. } |CE| = |CD|\cos\varphi . \quad (3)$$

Primjenom teorema o sinusima na trokut ΔADC, dobivamo da je

$$\frac{|CD|}{\sin\measuredangle CAD} = 2R .$$

(R je radijus kružnice opisane trokutu ΔABC, kao i trokutu ΔACD):

$$\Leftrightarrow |CD| = 2R \cdot \sin\measuredangle CAD$$

$$\Leftrightarrow |CD| = 2R \cdot \sin\measuredangle CBD$$

(jer je $\Leftrightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle CBD$, kao obodni kutovi kružnice k nad lukom $\overset{\frown}{CD}$).

Sada dobivamo iz (3):

$$\Leftrightarrow |CE| = 2R \cdot \sin\measuredangle CBD \cdot \cos\varphi . \quad (4)$$

Analogno iz pravokutnog trokuta ΔBDE dobivamo da je

$$\Leftrightarrow |BE| = |BD| \cdot \cos\measuredangle EBD = |BD| \cdot \cos\measuredangle CBD , \quad (5)$$

a primjenom teorema o sinusima na trokut ΔBDC, slijedi da je

$$\frac{|BD|}{\sin\measuredangle BCD} = \frac{|BD|}{\sin\varphi} = 2R \Leftrightarrow |BD| = 2R \cdot \sin\varphi ,$$

pa je zbog (5):

$$|BE| = 2R \cdot \sin\varphi \cdot \cos\measuredangle CBD. \quad (6)$$

Oduzimanjem (4) od (6) dobivamo:

$$\begin{aligned}|BE|-|CE| &= 2R\cdot\sin\varphi\cdot\cos\measuredangle CBD-2R\cdot\sin\measuredangle CBD\cdot\cos\varphi\\ &= 2R\cdot(\sin\varphi\cdot\cos\measuredangle CBD-\cos\varphi\cdot\sin\measuredangle CBD)\\ &= 2R\cdot\sin(\varphi-\measuredangle CBD)=2R\cdot\sin\measuredangle CBA=|AC|\end{aligned}$$

(jer prema teoremu o sinusima u trokutu ΔABC vrijedi

$$\frac{|AC|}{\sin\measuredangle CBA}=2R \Leftrightarrow |AC|=2R\cdot\sin\measuredangle CBA\ ).$$

Dakle, imamo

$$|BE| - |CE| = |AC|,$$

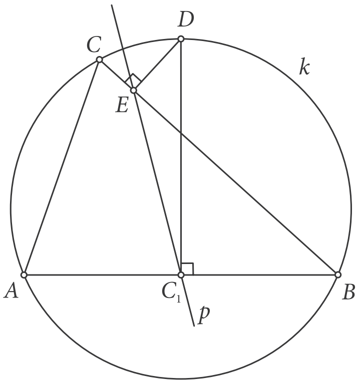
a odavde

$$|AC| + |CE| = |BE|,\text{ što je i trebalo dokazati.}$$

Sada ćemo primjenom Arhimedova teorema riješiti sljedeće zadatke:

Zadatak 1. Neka je u trokutu ΔABC točka C_1 središte stranice $\overline{AB}$. Treba konstruirati pravac p koji prolazi kroz točku C_1 i raspolavlja opseg trokuta.

Rješenje: Konstruirajmo kružnicu k opisanu oko trokuta ΔABC, a na luku $\widehat{AB}$ koji sadrži točku C konstruirajmo točku D koja je središte luka $\widehat{AB}$. (Ne umanjujući općenitost, uzeli smo da je $|AC| < |BC|$). Iz točke D konstruirajmo normalu na stranicu $\overline{BC}$ trokuta ΔABC, a nožište te normale označimo s E (sl. 5).



Slika 5.

Dokazat ćemo da pravac p koji prolazi kroz točke C_1 i E raspolavlja opseg trokuta ΔABC.

Dokaz: Prema Arhimedovom je teoremu $|BE| = |AC| + |CE|$, a odavde je zbog $|C_1A|=|C_1B|=\frac{1}{2}|AB|$:

$$|C_1A|+|BE|=|AC|+|CE|+|BC_1|,$$

odnosno zbog $|AC| + |CE| + |BE| = |AC| + |BC|$, tj.

$$|AC|+|CE|=|BE|=\frac{1}{2}\left(|AC|+|BC|\right) \text{ i } |C_1A|=|BC_1|=\frac{1}{2}|AB|,$$

slijedi da pravac $p(EC_1)$ zadovoljava uvjet zadatka, tj. raspolavlja opseg trokuta ΔABC.

Zadatak 2. Treba dokazati da je pravac C_1E (C_1 je polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ΔABC), a točka E je nožište normale iz točke D (središte luka $\widehat{AB}$ kojemu pripada vrh C) paralelno sa simetralom kuta $\measuredangle ACB=\gamma$ trokuta ΔABC.

Rješenje: Koristit ćemo sl. 1 i, ne umanjujući općenitost, uzeti da je $|AC| < |BC|$. Budući da je točka C_1 polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ΔABC, a točka E polovište stranice $\overline{BM}$ trokuta ΔABM (vidi dokaz 1.), to je dužina $\overline{EC_1}$ srednjica trokuta ΔABM, pa je $EC_1 \parallel AM$, odnosno slijedi da je $\measuredangle C_1EB=\measuredangle AMB=\varphi$. Neka je pravac CF, ($F\in\overline{AB}$) simetrala kuta $\measuredangle ACB=2\varphi$; tada je $\measuredangle FCB=\varphi$. Iz dvije posljednje jednakosti slijedi da je

$CF \parallel C_1E$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3. Neka su točke C_1, B_1 i A_1 polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ΔABC, a neka je točka $E\in\overline{BC}$ (kao i analogno $D\in\widehat{AB}$ i $F\in\overline{AB}$) točka iz Arhimedova teorema (i zadataka 1. i 2.). Treba dokazati (ne umanjujući općenitost, uzeti da je $|BC| < |AC|$):

a) da se pravci C_1E, A_1D i B_1F sijeku u jednoj točki;

b) ako je točka X sjecište pravaca C_1E, A_1D i B_1F, tada je točka X središte kružnice upisane u trokut $\Delta A_1B_1C_1$.

Preporučujemo čitateljima ovoga članka da pokušaju samostalno riješiti ovaj zadatak.

Literatura

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
2. Carstensen, J., Muminagić, A., *Matematiske perler*, Frederiksberg (Danska), 2004.
3. Carstensen, J., Muminagić, A., *Arhimedov poučak*, Časopis Matka (Zagreb), br. 60, lipanj 2007.