IZ NASTAVNE PRAKSE

Sustavi jednadžbi kroz osnovnu školu

Željko Brčić[1]

SAŽETAK: *Sustavi jednadžbi u osnovnoj se školi obrađuju u sedmom razredu, no i prije toga (posebice na matematičkim natjecanjima) pojavljuje se mnogo zadataka koji su u biti dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. U ovom tekstu navedeno je deset takvih primjera. Većina zadataka riješena je na nekoliko različitih načina, no niti u jednom od njih nisu korištene uobičajene metode supstitucije ili suprotnih koeficijenata. Kod tih alternativnih načina rješavanja izbjegnuto je i samo formalno zapisivanje sustava pomoću nepoznanica x i y. Time zadaci postaju primjereni mnogo široj populaciji djece, odnosno učenici ih mogu rješavati i prije sedmog razreda, dok još nisu ni obradili uobičajene metode za rješavanje sustava jednadžbi.*

Prema aktualnom nastavnom planu i programu matematike za osnovne škole, sustavi linearnih jednadžbi obrađuju se u drugom polugodištu sedmog razreda. Prethodno su se učenici (u šestom razredu) upoznali s načinom rješavanja linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, a obradili su i pojam uređenog para, što je nužno za razumijevanje rješenja sustava jednadžbi. U redovnoj nastavi učenici obrađuju sustave koji se sastoje od dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama, a pri njihovom rješavanju koriste metodu supstitucije ili metodu suprotnih koeficijenata. Kao dodatni (izborni) sadržaj u nastavnom programu navodi se sustav s beskonačno mnogo rješenja (neodređeni sustav) i sustav bez rješenja (nemogući sustav), a u većini udžbenika spominju se još dvije metode rješavanja sustava jednadžbi: metoda komparacije i metoda uvođenja novih nepoznanica. U programu dodatne nastave, pak, pojavljuju se i zadaci s nekim oblicima linearnih sustava višega reda (s tri ili više nepoznanica).

Iako se u osnovnoj školi sustavi jednadžbi prvi put spominju tek u sedmom razredu, vidljivo je da i u prethodnim godinama školovanja postoje mnogi dijelovi gradiva koji se dotiču sustava jednadžbi. Posebice to vrijedi za dodatnu nastavu matematike, iako i u redovnoj nastavi ima dosta zadataka koji se svode na sustave jednadžbi, a mogu se raditi i prije sedmog razreda. Koliko će se često takvi primjeri

[1]Željko Brčić, OŠ Zrinskih, Nuštar

Poucak 54.indd 28 17.6.2013. 21:05:42

koristiti u nastavi ovisi o mnogo različitih čimbenika: vrsti gradiva, uzrastu učenika, sastavu razreda, motivaciji nastavnika i slično. Pri tome je važno ne iskakati iz konteksta gradiva koje se obrađuje, odnosno ne opterećivati učenike ubacivanjem zadataka koji nemaju stvarnu vezu s trenutnim ciljevima našeg poučavanja. Raditi zadatke u kojima se pojavljuju sustavi jednadžbi prije sedmog razreda ima pedagoško opravdanje jedino ako su sami zadaci i posebice način njihova rješavanja prilagođeni uzrastu učenika te samo ako pridonose boljem razumijevanju nastavnih tema koje se trenutačno obrađuju. Naravno, što je više takvih primjera, učenicima će biti lakše u sedmom razredu kada se sustavi obrađuju metodički posloženo, kada se uvodi stručno nazivlje, strogi zapis sustava i njegova rješenja te precizni algoritamski put rješavanja sustava za svaku pojedinu metodu.

U tekstu koji slijedi navedeni su primjeri zadataka koji su u biti sustavi dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, a mogu se raditi ne samo u sedmom razredu, nego tijekom cjelokupnog razdoblja osnovnoškolske naobrazbe, počevši već od prvog razreda. Većinom su to tzv. tekstualni ili problemski zadaci koji se mogu standardno rješavati zapisivanjem uvjeta zadatka u obliku sustava jednadžbi, primjenom neke od klasičnih metoda rješavanja sustava te, na kraju, interpretacijom rješenja u stvarnom kontekstu zadatka. No, ovdje je naglasak na alternativnim načinima rješavanja u kojima se ne koristi formalno zapisivanje sustava te time zadaci postaju primjereni puno široj populaciji učenika. Neki od tih zadataka riješeni su na više načina, a koji će način rješavanja u nekom trenutku biti primijenjen, u najvećoj mjeri ovisi o uzrastu učenika, odnosno količini matematičkog znanja koje su do tada usvojili. Pojedini zadaci uklopljeni su u redovni program i vjerojatno se u sličnom obliku mogu pronaći i u važećim udžbenicima, no većina ih je ipak primjerenija dodatnoj nastavi matematike ili pak individualnom radu s pojedinim učenicima na redovitoj nastavi. No, bez obzira na to kada će se i na koji način koristiti takvi primjeri, svi su oni vrlo korisni jer potiču učenike na logično razmišljanje, razvijaju njihove matematičke sposobnosti, te ih, u konačnici, pripremaju za formalno učenje sustava jednadžbi u sedmom razredu.

Većina čitatelja ovoga teksta vjerojatno smatra da sustave jednadžbi nije moguće koristiti baš od prvog razreda osnovne škole, no to nije točno. Još u prvom polugodištu prvog razreda, kada se uči samo zbrajanje i oduzimanje brojeva do 10, moguće je postaviti ovakav zadatak:

Primjer 1. *Koja dva broja zbrojena daju 10, a oduzeta 2?*

Riječ je, dakle, o tipičnom zadatku u obliku dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koji se (u sedmom razredu) može zapisati ovako:

$$x + y = 10$$
$$x - y = 2$$

i čije je rješenje $x = 6$, $y = 4$.

Naravno, u prvom se razredu ne mogu koristiti termini kao što su sustav jednadžbi, nepoznanice i slično, kao niti simbolički zapis slovima *x* i *y*. Učenici tog uzrasta zadatak mogu riješiti metodom pokušaja i pogrešaka, i to relativno brzo jer broj mogućnosti nije naročito velik. Ipak, pri tome treba očekivati da će većina učenika, kada prvi puta pokuša riješiti zadatak, vjerojatno dati pogrešan rezultat (najčešće to budu brojevi 8 i 2). Oni, naime, nikada ranije nisu imali dva uvjeta koja rješenje treba ispunjavati te čim shvate da je 8 + 2 = 10, pomisle da su to traženi brojevi. Tek nakon upute da provjere i oduzimanje, učenici će shvatiti da su pogriješili te će nastaviti tražiti nove brojeve. Metodom pokušaja i pogrešaka, uskoro će doći i do točnog rješenja, odnosno brojeva 6 i 4 koji zadovoljavaju oba uvjeta (i zbrajanje i oduzimanje).

U drugom razredu, kada učenici obrade zbrajanje i oduzimanje brojeva do 100, može se i dalje koristiti zadatak iz prethodnog primjera, naravno uz povećanje brojeva u zbroju i razlici.

Primjer 2. *Kada neka dva broja zbrojimo, dobijemo 72, a kada ih oduzmemo, dobijemo 16. Koji su to brojevi?*

Brojevi iz ovog primjera nešto su veći nego u prethodnom primjeru, pa je povećan i broj rješenja jedne, odnosno druge jednadžbe. Time je, naravno, teže doći i do zajedničkog rješenja obiju jednadžbi. Ranije korištena metoda pokušaja i promašaja sada postaje neučinkovita, odnosno zahtijeva modifikaciju. Primjer se može riješiti ovako:

Pronađemo bilo koja dva broja koja zadovoljavaju jedan od uvjeta (recimo oduzimanje). To su, primjerice, brojevi 36 i 20 jer je 36 – 20 = 16. Kako je 36 + 20 = 56 (a to je manje od 72), zaključujemo da odabrane brojeve moramo povećati. Naravno, bitno je shvatiti da se oba broja moraju povećati za isti iznos jer će se u protivnom promijeniti razlika 16. Koji ćemo broj dodati i koliko ćemo puta morati ponavljati taj postupak, ovisi o iskustvu i snalažljivosti rješavača, no svakako ćemo se nakon nekoliko pokušaja približiti, a u konačnici i dobiti brojeve 44 i 28 koji, zbrojeni, daju upravo 72. Ovakav način traženja nepoznatih brojeva zovemo *metodom uzastopnog približavanja*.

Već od trećeg razreda zadaci poput do sada iznesena dva primjera mogu se staviti u određeni realni kontekst. Do sada općeniti brojevi dobivaju svoje konkretno značenje, čime učenicima dajemo do znanja da matematika nije znanost zatvorena unutar same sebe, nego se njome služimo za rješavanje problema u stvarnom životu.

Primjer 3. *Petar i njegova sestra skupili su zajedno 176 plastičnih boca, pri čemu je Petar skupio 28 boca više od sestre. Koliko je boca skupio Petar, a koliko njegova sestra?*

Ovaj primjer razlikuje se od prethodnog u činjenici da su podaci dobili svoje realno značenje, tj. predstavljaju broj plastičnih boca. Način rješavanja ovoga primjera analogan je prethodno iznesenoj metodi, no postupak se može dodatno skratiti za-

Poucak 54.indd 30 17.6.2013. 21:05:42

hvaljujući činjenici da su u trećem razredu učenici već upoznali dijeljenje jednoznamenkastim brojevima.

Pretpostavimo da je sestra skupila 50 boca, a Petar 78 (28 boca više od nje). Zajedno to iznosi 128 boca, a to je 176 – 128 = 48 boca manje od točnog broja. Očito se oba pretpostavljena broja moraju povećati za isti iznos, a da bi ukupan broj boca bio točan, jednu polovinu toga broja treba pridodati broju Petrovih boca, a drugu broju boca njegove sestre.

Nakon što izračunaju 48 : 2 = 24, učenici zaključuju da je Petar zapravo skupio 78 + 24 = 102, a njegova sestra 50 + 24 = 74 boce.

Ovakvim načinom rada, metoda uzastopnog približavanja koja je korištena pri traženju rješenja sustava skraćena je na samo dva koraka.

U nastavku teksta izloženo je još nekoliko tipičnih zadataka koji se mogu svesti na sustave jednadžbi. Takvi se primjeri često pojavljuju na učeničkim natjecanjima i predviđeni su za rad s darovitim učenicima na dodatnoj nastavi, no neki od njih mogu se uraditi i na redovnoj nastavi matematike.

Primjer 4. *U Markovoj kasici-prasici bilo je 56 kovanica od dvije i od pet kuna, ukupne vrijednosti 208 kuna. Koliko je u kasici bilo kovanica od 2 kn, a koliko od 5 kn?*

Ako broj kovanica od 2 kn označimo sa x, a broj kovanica od 5 kn sa y, mogu se postaviti dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Prva je $x + y = 56$, a druga $2x + 5y = 208$. Kada, bilo kojom od uobičajenih metoda, riješimo sustav, dobit ćemo rješenje $x = 24$ i $y = 32$, što znači da su u kasici bile 24 kovanice od dvije kune i 32 kovanice od 5 kuna.

Ovakav zadatak, bez uporabe sustava jednadžbi, može se rješavati već od trećeg razreda osnovne škole metodom uzastopnog približavanja. Od matematičkih postupaka učenik treba poznavati samo zbrajanje brojeva te množenje brojeva brojevima 2 i 5.

Za početak, može se pretpostaviti da su sve kovanice od, primjerice, 2 kune. U tom bi slučaju njihova vrijednost bila $56 \cdot 2 = 112$ kuna, što nam govori da početna pretpostavka nije točna.

Sljedeća pretpostavka mogla bi biti 55 kovanica od 2 kn i jedna od 5 kn, a njihova je vrijednost $55 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 115$ kn. Kako ni taj iznos nije točan, postupak treba nastaviti i dalje, smanjujući u svakom koraku broj kovanica od 2 kn za jedan, uz istodobno povećavanje broja kovanica od 5 kn za jedan. Time ukupan broj kovanica uvijek ostaje 56, a njihova vrijednost cijelo se vrijeme povećava te će u jednom trenutku, kada budemo imali 24 kovanice od 2 kn i 32 kovanice od 5 kn, biti upravo $24 \cdot 2 + 32 \cdot 5 = 208$ kn.

Nedostatak ove metode leži u relativno velikom broju mogućnosti, što dovodi do mnogo zapravo nepotrebnog računanja. Postupak možemo skratiti „preskakanjem"

Poucak 54.indd 31 17.6.2013. 21:05:42

pojedinih koraka. Kada smo, naime, u prvom koraku dobili vrijednost 112 kn (a to je dosta daleko od stvarne vrijednosti 208 kn), broj kovanica od 2 kn ne moramo smanjiti samo za jedan, nego za neki veći broj – primjerice 10. To bi značilo da pretpostavljamo kako u kasici ima 46 kovanica od 2 kn i 10 kovanica od 5 kn, ukupne vrijednosti $46 \cdot 2 + 10 \cdot 5 = 142$ kn. Kako ni to nije blizu 208 kn, sljedeća pretpostavka može biti, primjerice, 36 kovanica od 2 kn i 20 kovanica od 5 kn, i tako dalje. Na promjenu od jedne kovanice možemo se vratiti kada se izračunati iznos približi broju 208, a nije problem ni ako – zbog prevelikog skoka – i prijeđemo taj broj. Tada se jednostavno vratimo unazad povećavanjem broja kovanica od 2 kn i istodobnim smanjenjem broja kovanica od 5 kn.

Nakon što učenici nauče dijeljenje jednoznamenkastim brojevima, zadatak se može riješiti još učinkovitije. Treba samo primijetiti da svako smanjenje broja kovanica od 2 kn za jedan, uz istodobno povećanje broja kovanica od 5 kn za jedan, u konačnici povećava ukupan iznos za točno 3 kune. Uz tu činjenicu, naš se zadatak može riješiti u samo dva koraka na sljedeći način:

Na početku izaberemo bilo koju kombinaciju kovanica. Neka ih je, primjerice, jednako: 28 kovanica od 2 kn i također 28 kovanica od 5 kn. Njihova je vrijednost $28 \cdot 2 + 28 \cdot 5 = 28 \cdot (2 + 5) = 28 \cdot 7 = 196$ kn. Kako je ta vrijednost manja od 208 kn, očito će točan broj kovanica od 2 kn biti manji, a od 5 kn veći od 28. Za koliko? Kako nam od 196 kn do 208 kn nedostaje 12 kn, a $12 : 3 = 4$, zaključujemo da broj kovanica moramo promijeniti za 4. Neće ih, dakle, biti po 28, nego će kovanica od 2 kn biti 24, a kovanica od 5 kn bit će 32.

Primjer 5. *Ako kupi 5 bilježnica, Marku će ostati 4 kune. Da bi mogao kupiti 7 bilježnica, nedostaju mu dvije kune. Koliko kuna ima Marko?*

Iako je u primjeru postavljeno samo jedno pitanje, ovo je ipak zadatak s dvije nepoznanice jer, osim tražene količine Markova novca, nije poznata niti cijena bilježnica. Dakle, ako se cijena jedne bilježnice označi sa x, a količina novca koju Marko ima sa y, mogu se postaviti sljedeće dvije jednadžbe:

$$y = 5x + 4$$

$$y = 7x - 2$$

Sustav je pripravan za primjenu metode supstitucije (ili komparacije), ali naravno, cilj je riješiti zadatak logički, bez uporabe spomenutih metoda.

Pretpostavimo da je Marko već kupio 5 bilježnica i da su mu preostale 4 kune. Kada bi mu netko posudio još dvije kune, on bi ukupno mogao kupiti 7 bilježnica. Dakle, pored već kupljenih 5 bilježnica, za 6 kuna (4 svoje i 2 posuđene) on može kupiti još dvije bilježnice. Iz ovoga se može zaključiti da dvije bilježnice stoje upravo 6 kuna, odnosno da je cijena jedne bilježnice 3 kn. Sada je lako izračunati da 5 bilježnica stoji 15 kuna, odnosno da Marko ima 19 kuna.

Poucak 54.indd 32 17.6.2013. 21:05:42

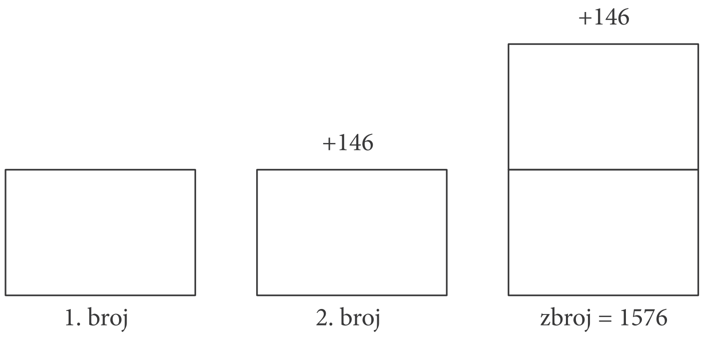
Primjer 6. *Zbroj dvaju brojeva je 1576. Ako jedan broj smanjimo za 87, a drugi povećamo za 59, dobiveni će brojevi biti jednaki. Koji su početni brojevi?*

Iz teksta zadatka jasno je da se radi o sustavu s dvije nepoznanice. Ako nepoznanice označimo s x i y, prva jednadžba je $x + y = 1576$, a druga $x - 87 = y + 59$. Drugu jednadžbu moguće je zapisati u obliku $x - y = 146$, nakon čega se metodom suprotnih koeficijenata izračuna najprije da je $x = 861$, a zatim $y = 715$.

Naravno, do istog se rješenja može doći i bez korištenja sustava jednadžbi, primjerice metodom uzastopnog približavanja. Pretpostavimo da se radi o brojevima 1000 i 576. Kad prvi smanjimo za 87, a drugi povećamo za 59, dobit ćemo brojeve 913 i 635. Budući da dobiveni brojevi nisu jednaki, početna pretpostavka očito nije bila dobra. Do ispravnog rezultata može se doći u konačnom broju koraka, smanjujući prvi broj iz naše pretpostavke i istodobno povećavajući za isti iznos drugi broj, sve dok zaista ne dobijemo jednake rezultate.

No, u ovom je zadatku najučinkovitije primijeniti metodu koju bi mogli nazvati rješavanjem unatrag i koja se inače vrlo često primjenjuje kod linearnih jednadžbi. Prvo treba primijetiti da ako je jedan broj smanjen za 87, a drugi povećan za 59, onda će se zbroj tih brojeva smanjiti za 28. To znači da njihov zbroj više neće biti 1576, nego 1548. Dijeljenjem tog broja s 2 može se zaključiti da su dva jednaka broja dobivena na kraju zadatka zapravo brojevi 774. Početne brojeve dobit ćemo vraćanjem unazad: Prvi je broj smanjen za 87, pa ćemo ga dobiti povećavanjem broja 774 za 87 – dakle, radi se o broju 861. Analogno zaključujemo da drugi broj mora biti za 59 manji od 774, odnosno 715.

Četvrti način rješavanja istoga zadatka mogla bi biti grafička metoda. Ako smo smanjenjem jednog broja za 87 i povećanjem drugog broja za 59 dobili jednake brojeve, to znači da su se početni brojevi razlikovali za 146. Manjeg od njih prikažemo jednim pravokutnikom, a onog većeg istim takvim pravokutnikom na kojem je još dodano 146. Znamo da je zbroj ta dva tražena broja 1576, a on je na slici prikazan s dva jednaka pravokutnika i brojem 146. Vrijednost pravokutnika dobit ćemo oduzimanjem $1576 - 146 = 1430$ i dijeljenjem razlike $1430 : 2 = 715$. To je ujedno jedan od traženih brojeva, a drugi je $715 + 146 = 861$.



Poucak 54.indd 33 17.6.2013. 21:05:43

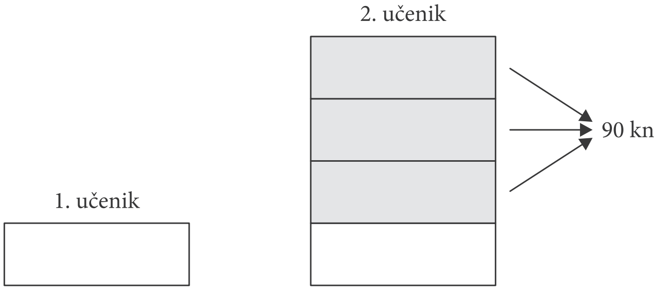
Primjer 7. *Jedan je učenik imao 90 kn manje od drugog učenika. Ako svaki od ta dva učenika potroši po 20 kn, tada će prvi učenik imati 4 puta manje kuna od drugog učenika. Koliko je kuna imao svaki od učenika?*

Iz samog postavljenog pitanja u zadatku očito je da postoje dvije nepoznanice: iznos novca jednog učenika označi se s x, a iznos novca drugog učenika s y. Postave se dvije jednadžbe: prva je $y - x = 90$, a druga $4 \cdot (x - 20) = y - 20$. U ovom slučaju najučinkovitije je primijeniti metodu supstitucije: Uvrštavanjem vrijednosti $y = x + 90$ u drugu jednadžbu dobije se $4x - 80 = x + 70$, iz čega se izračuna da je $x = 50$, a onda i $y = 140$. Prvi je učenik imao 50 kuna, a drugi 140 kuna.

Ovakav zadatak ipak se, najčešće, ne rješava na ovaj način. Umjesto uporabe sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice (što se u osnovnoj školi uči tek krajem sedmog razreda), učenici mogu riješiti zadatak koristeći samo jednu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Time se krug učenika koji mogu riješiti ovakav zadataka proširuje i na učenike šestog razreda. Naime, ako se iznos novca jednog učenika označi s x, onda nije potrebno uvoditi drugu nepoznanicu nego se iznos novca drugog učenika prikaže izrazom $x + 90$ (on ima 90 kn više). Nakon što su potrošili po 20 kn, prvi učenik ima $x - 20$ kn, a drugi $x + 70$ kn. Postavi se jednadžba $4 \cdot (x - 20) = x + 70$, te se dobije rješenje $x = 50$. To znači da prvi učenik ima 50 kuna, a iz početnih postavki lako se zaključi da onda drugi učenik ima 140 kn.

No, postoji način rješavanja ovog zadatka u kojem se ne koriste niti linearne jednadžbe, čime on postaje primjeren za još širi krug učenika. Na samom početku bitno je primijetiti da ako je jedan učenik imao 90 kn manje od drugoga, ta će razlika ostati ista i nakon što su obojica potrošila bilo koji jednaki iznos, pa i navedenih 20 kn. Ako u tom trenutku (nakon što su potrošili po 20 kn) prvi učenik ima x kuna, onda drugi ima $4x$ kuna, a razlika od $3x$ kuna jednaka je iznosu od 90 kuna. Očito je, dakle, $x = 30$ kn, što znači da je prvi učenik imao 30 kn, a drugi 120 kn. Naravno, prije no što su obojica potrošili po 20 kn, učenici su imali 50 kn, odnosno 140 kn.

Treba napomenuti da se pri rješavanju zadataka može izbjeći i uporaba nepoznanice x, tako da se uvjeti zadatka prikažu grafički. Ako iznos novca prvog učenika prikažemo, primjerice, pravokutnikom, onda se iznos novca drugog učenika (četiri puta veći!) može prikazati s četiri takva pravokutnika. Iz tog grafičkog prikaza vidljivo je da drugi učenik ima tri pravokutnika više od prvog učenika (na slici obojeno tamnije), a da bi to bilo upravo 90 kn, koliko je u zadatku navedeno, svaki pravokutnik očito mora imati vrijednost $90 : 3 = 30$ kn. Daljnje zaključivanje identično je prethodno iznesenom.



Poucak 54.indd 34 17.6.2013. 21:05:43

Primjer 8. *Za četiri dana posla u jednom sportskom parku Jurica je mogao zaraditi 760 kuna i loptu. Odradio je samo jedan dan, za što je dobio 40 kuna i loptu. Kolika je vrijednost lopte?*

U zadatku se pojavljuju dvije nepoznanice: jedna je tražena vrijednost lopte (x), a druga je vrijednost naknade za obavljeni posao u jednom danu (y). Jedna je jednadžba $4y = 760 + x$, a druga $y = 40 + x$. Primjenom neke od uobičajenih metoda rješavanja sustava jednadžbi može se izračunati da je $x = 200$ i $y = 240$. Vrijednost lopte je, dakle, 200 kuna.

Učenici koji još nisu naučili rješavati sustave jednadžbi, zadatak mogu riješiti na sljedeći način: Naknada za četiri dana rada iznosi 760 kn i vrijednost lopte. Kako je naknada za jedan dan 40 kuna i vrijednost lopte, razlika od 720 kuna je naknada za posao odrađen tijekom tri dana. Onda je naknada za jedan dan 720 : 3 = 240 kn, a vrijednost lopte 240 – 40 = 200 kuna.

Drugi način zaključivanja može biti ovakav: Ako Jurica za jedan dan dobije 40 kn i loptu, za četiri dana rada dobio bi 160 kn i 4 lopte. No, u zadatku se navodi da za četiri dana posla Jurica dobije 760 kn i loptu. Da bi to bilo jednako, tri lopte moraju vrijediti 600 kn, a onda jedna lopta vrijedi 200 kn.

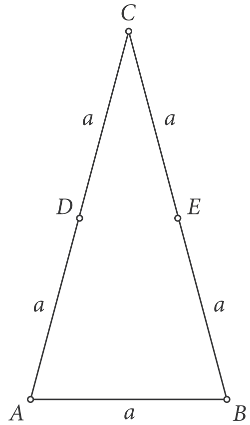
Primjer 9. *Zadan je jednakokračan trokut čija je duljina kraka dva puta veća od duljine osnovice. Izračunaj duljine osnovice i kraka trokuta ako je opseg trokuta 325 mm.*

Na matematičkim natjecanjima često se pojavljuju geometrijski zadaci poput ovoga, koji u svojoj biti sadržavaju sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Ako umjesto x i y, nepoznate duljine stranica trokuta označimo uobičajenim oznakama a (osnovica) i b (krak), sustav jednadžbi glasi:

$$b = 2a$$
$$a + 2b = 325$$

Sustav se lako rješava supstitucijom nepoznanice b u drugoj jednadžbi i njegova su rješenja $a = 65$ mm i $b = 130$ mm.

Naravno, učenici četvrtog ili petog razreda taj sustav jednadžbi neće ni primijetiti, niti im je to u ovom zadatku važno. Njima najprimjereniji način rješavanja jest grafička metoda u kojoj skiciraju sliku vodeći računa o odnosu osnovice i kraka. Ako je u tekstu zadatka naznačeno da je krak dva puta dulji od osnovice, onda se to uočljivo prikaže i na slici. Time postaje jasno da se opseg trokuta (zbroj duljine osnovice i duljina dvaju krakova) zapravo sastoji od duljine pet osnovica. Duljina osnovice dobije se dijeljenjem opsega (325 mm) brojem 5, a krak množenjem dobivenog količnika brojem 2.



Poucak 54.indd 35 17.6.2013. 21:05:43

U sljedećem zadatku također se može koristiti grafička metoda iako sam zadatak nema geometrijski karakter, odnosno smješten je u sasvim drukčiji kontekst.

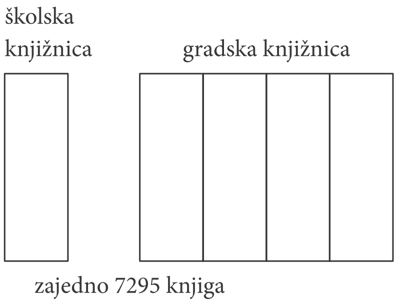
Primjer 10. *U gradskoj je knjižnici četiri puta više knjiga nego u školskoj knjižnici. Koliko knjiga ima u gradskoj, a koliko u školskoj knjižnici ako je ukupan broj knjiga u obje knjižnice 7295 knjiga?*

Opet se radi o sustavu dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Ako se broj knjiga u školskoj knjižnici označi s x, a broj knjiga u gradskoj knjižnici s y, sustav glasi:

$$y = 4x$$
$$x + y = 7295$$

Metodom supstitucije dobiju se rješenja $x = 1459$ i $y = 5836$.

Učenici koji još nisu naučili rješavati sustave jednadžbe, ponovo mogu primijeniti grafičku metodu rješavanja. Broj knjiga u školskoj knjižnici prikaže se pravokutnikom (možemo zamisliti da on predstavlja jednu policu u koju smo smjestili sve knjige). Onda se (četiri puta veći) broj knjiga u gradskoj knjižnici može prikazati s četiri takva ista pravokutnika (police). Dakle, sve knjige (i iz školske i iz gradske knjižnice) smještene su u ukupno pet pravokutnika (polica). Kako je u svakoj polici jednak broj knjiga, a ukupno ih ima 7295, dijeljenjem tog broja s 5 dobijemo da u školskoj knjižnici ima 1459 knjiga, a množenjem dobivenog količnika s 4 izračunamo da je u gradskoj knjižnici 5836 knjiga.



Sve u ovom tekstu navedene primjere linearnih sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice učenici sedmog razreda mogu riješiti na njima uobičajen način – uporabom metode supstitucije ili metode suprotnih koeficijenata. Učenici prethodnih razreda za rješavanje takvih zadataka trebaju primijeniti neki od alternativnih načina rada. Nekoliko takvih postupaka navedeno je u ovom tekstu: metoda uzastopnog približavanja, grafička metoda, rješavanje sustava unazad, pretvaranje problema u linearnu jednadžbu ili pak logičko zaključivanje koje vodi do eliminacije jedne i računanja druge nepoznanice. Dobro ih je poznavati sve, a koju metodu u nekom konkretnom slučaju primijeniti, ponajprije ovisi o vrsti postavljenog zadatka i uzrastu učenika koji zadatak rješava.

Poucak 54.indd 36 17.6.2013. 21:05:43