Putovanje Londonom kroz četiri zadatka

Branka Gotovac[1]

Znati ne znači biti. Naučeno morate pokušati prenijeti u svakodnevni život.
Blaise Pascal

Mašta nas često vodi u nepostojeći svijet, ali bez nje ne idemo nikamo.
Carl Sagan

Uvod

U radu su izložena četiri zadatka napisana za nedavnog boravka autorice u Londonu. Premda su zadaci nastali spontano, ne može se zanemariti postojanje pozitivnih iskustava u radu sa studentima prve godine, vezanih za suradničko učenje (zadaci su pogodni za rad u paru ili grupni rad) i rad na zadacima u realnom kontekstu, praktičnim primjerima [1]. Sami studenti kažu da radeći u grupi bolje uče jer diskutiraju, jedni drugima pomažu, korigiraju se i usmjeravaju, uče jedni od drugih, bolje uočavaju pogreške, bolje pamte, aktivniji su i zabavnije im je. Učenje na praktičnim primjerima jako im je zanimljivo, a gradivo je pristupačnije i razumljivije. Važno je, dakle, da nastavni sat bude zanimljiv. To je, kako smatraju, njegovo bitno obilježje, s čim bi se vjerojatno složili i mlađi učenici. Odmakom od uobičajenog načina rada ili zanimljivim zadacima, sat se može učiniti zabavnim.

Zadaci su inspirirani londonskom podzemnom željeznicom, poznatom kao *Tube*, slikama izloženim u Nacionalnoj galeriji, panoramskim kotačem, popularno nazvanim *London Eye*, i predstavom u jednom od brojnih londonskih kazališta.

S obzirom na sadržaje na koje se odnose - koordinatni sustav u ravnini i geometrija prostora (prvi zadatak), funkcije (drugi zadatak), grafovi trigonometrijskih funkcija, trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe (treći zadatak) i kombinatorika (četvrti zadatak) - zadaci bi mogli biti interesantni nastavnicima i učenicima srednjih škola.

[1]Branka Gotovac, predavačica na Katedri za matematiku Sveučilišta u Splitu

Motivacijski aspekt zadataka

Zadaće su nastavnika višestruke. Jedna od njih je zainteresirati učenika za predmet koji predaje. Zainteresirani učenici bit će motivirani za rad.

Izazov je to svakom nastavniku, važna i zahtjevna zadaća koju stavlja pred sebe.[2] Nastavnik treba voditi računa o svakom učeniku, uzimajući u obzir spektar različitih interesa i vještina učenika u razredu. Treba nastojati omogućiti svakom od njih da u sadržajima koji se uče otkriju nešto za sebe. Treba im pomoći da pronađu smisao u onom što rade i osjete zadovoljstvo. Za početak, ako je matematika u pitanju, čak i nekim sadržajima koji nisu matematički, a involvirani su u zadatak, moguće je postići motivacijski efekt.

Ovdje treba napomenuti da je i samo nastojanje da se svaki učenik afirmira od velike važnosti i da će s vremenom dati ploda. Neki će od učenika prepoznati trud i istinsku želju svoga nastavnika da mu pomogne i omogući što bolji napredak. Čvrste spone stvorene među njima na temelju međusobnog uvažavanja i poštovanja, utjecat će i na porast zanimanja učenika za predmet.

U knjizi *Matematičko otkriće* [2] napisanoj 60-ih godina prošlog stoljeća, i danas problemski vrlo bliskoj čitatelju, poučnoj knjizi punoj „otkrića", poznati matematičar, učitelj s iznimnim senzibilitetom za nastavu (matematike)[3], George Polya, sugerira učiteljima[4] da osobitu pažnju posvete upravo zadacima, u svrhu motivacije učenika za matematiku.

Kakav bi trebao biti zadatak?

„Poželjno je da bude povezan sa svakodnevnim životom i iskustvom učenika, s nekom šalom ili malim paradoksom. Zadatak također možemo početi nekom učenicima dobro poznatom činjenicom. Dobro je ako pri tome sadrži nešto što je od općeg interesa ili pak mogućnosti primjene. Želimo li stimulirati stvaralačke aktivnosti učenika, moramo mu dati neke osnove da može pretpostaviti da ti napori neće propasti. Upravo je interes učenika najbolja motivacija za njegov rad" [2, str. 278].

Kako se može naslutiti, četiri zadatka koja slijede povezuju stvarni svijet i matematiku.

U prvom zadatku „putujemo" londonskom podzemnom željeznicom. To je iznimno složen prometni sustav, prostorno i brojem linija, a realni je kontekst modificiran. Promatrane su dvije prometne linije, Central i Piccadilly, u nekom zamišljenom odnosu. Također je pretpostavljeno i da su sve stanice jedne linije na istom nivou, odnosno u istoj ravnini.

[2]Uzmemo li u obzir faktor društvene uvjetovanosti odgoja i obrazovanja danas, taj je izazov još veći
[3]Neka su njegova razmišljanja primjenjiva na nastavu u širem smislu
[4]U osnovnoj i srednjoj školi, i onima koji će to tek postati (op. a.)

U drugom se zadatku na zabavan način ispituje razumijevanje definicije funkcije i uči, preko dijagrama, kroz razne situacije nastale poigravajući se slikarima i njihovim slikama. Rješavačima-učenicima u zadatku se sugerira da istraže povezanost slikarstva i matematike.

U trećem se istražuje vrtnja panoramskog kotača, a četvrti zadatak opisuje pripreme jednog razreda maturanata za posjet kazalištu.

Zadaci - apstrakcija i realnost

Kakvi su zadaci koje koristimo u našem radu, koje zadajemo našim učenicima? Jesu li to uobičajeni zadaci, uglavnom apstraktni, izvan konteksta, naizgled nepovezani sa stvarnošću, bez primjene u praksi?

Možemo li računati da će ih učenici „prepoznati u realnom kontekstu"? Hoće li za to biti sposobni? Hoće li učenici na taj način moći uspješno prenijeti usvojeno znanje na realne probleme?

Promotrimo zadatak koji je, u okviru jednog malog istraživanja, Kowleslar proveo nad 40 učenika 11. razreda, a zatim navedimo rezultate [3].

Izlet na obalu Durbana iskazan je sljedećom formulom:

Taxi A: C = 80 + 25t

Taxi B: C = 100 + 20t

a) *Nacrtajte graf kojim ćete prikazati kako se trošak C (izražen u centima) mijenja s vremenom t za Taxi A i Taxi B (na istom grafu).*
b) *Koji je taksi jeftiniji?* [3, str. 608-609]

Nitko od učenika nije ispravno nacrtao graf niti odredio kada je vožnja jednim od taksija jeftinija, iako su svi učenici 11. razreda s kojima se razgovaralo znali nacrtati pravce

$$y = 80 + 25x \text{ i } y = 100 + 20x.$$

Posve je očito da jedna važna zadaća nastave matematike nije ispunjena budući da stečena znanja učenici nisu mogli primijeniti u praksi.

Osim ovog, Michael de Villiers navodi i primjer na nižoj razini obrazovanja sa sličnim iskustvima. Oba primjera „*... jasno ukazuju na to da poznavanje i služenje određenim matematičkim algoritmima i postupcima NE JAMČI da će učenici znati smisleno protumačiti i riješiti zadatke iz stvarnog života*" [3, str. 609]. To i ne čudi, kako kaže, „*...kad se matematika uglavnom poučava IZVAN KONTEKSTA; odnosno, u svojevrsnom vakuumu koji nije ni na koji način povezan sa stvarnim svijetom*" [3, str. 610].

Izolirano učenje često se ne može primijeniti u kontekstu stvarnog svijeta. Većina učenika ne može sama premostiti taj jaz i prepoznati matematiku u kontekstu i primijeniti je na realne situacije.

„Nemojte učenicima pružati samo informaciju, pomozite im razviti sposobnost korištenja prikupljenih znanja i naviku sustavnog rada[5]*"* [2, str. 289], naučite ih kako da to znanje primijene. Na takvim bi, konkretnim zadacima iz života, s učenicima trebalo raditi. Treba ih poučavati na realnim problemima i poticati da ih sami stvaraju[6], kako su, uostalom, nastali i zadaci u ovom radu. Na temelju slika, doživljaja i raznih podataka napisane su matematičke priče.

U zadacima u radu apstrakcija i stvarnost se prožimaju na način da treba prepoznati matematiku u realnom kontekstu i primijeniti je. Vrijedi i obrnuto, matematiku treba povezati s danim realnim kontekstom. Navedimo neke primjere.

U prvom zadatku pod 4, odgovor na pitanje *Postoji li stanica na liniji Central jednako udaljena od stanica Oxford Circus i Lancaster Gate?* (realni kontekst) svodi se na određivanje polovišta odgovarajuće dužine. Obratno, u istom zadatku pod 3, interpretirajući značenje dobivenog rješenja nejednadžbe u promatranom kontekstu (*...navedi o kojim je postajama riječ.*), povezujemo čistu matematiku s danim realnim kontekstom.

Da bismo promatranu pojavu u zadatku 3. (vrtnja panoramskog kotača) opisali matematički, treba znati koje funkcije opisuju takve[7] pojave, a zatim i odrediti taj izraz, formulu (prvi dio[8] zadatka 3.). U drugom je dijelu funkcijska veza poznata, dana je ovisnost visine h kabine kotača o vremenu t; $h(t)$, pa neka od pratećih pitanja mogu biti (interpretacija u promatranom kontekstu): *Opisuje li dobro dani izraz promatranu pojavu*? *Kako bi glasio taj izraz u slučaju da se uzme u obzir visina najniže točke kotača u odnosu na zemlju*?...

Također bi valjalo imati na umu da naši učenici uče i posredno, opažajući nas, pa zašto onda ne bismo očekivali da će zadaci u kontekstu koji ćemo ilustrirati, potaknuti učenike za traženje „vlastitih" stvarnih situacija koje uključuju određeni matematički aspekt.

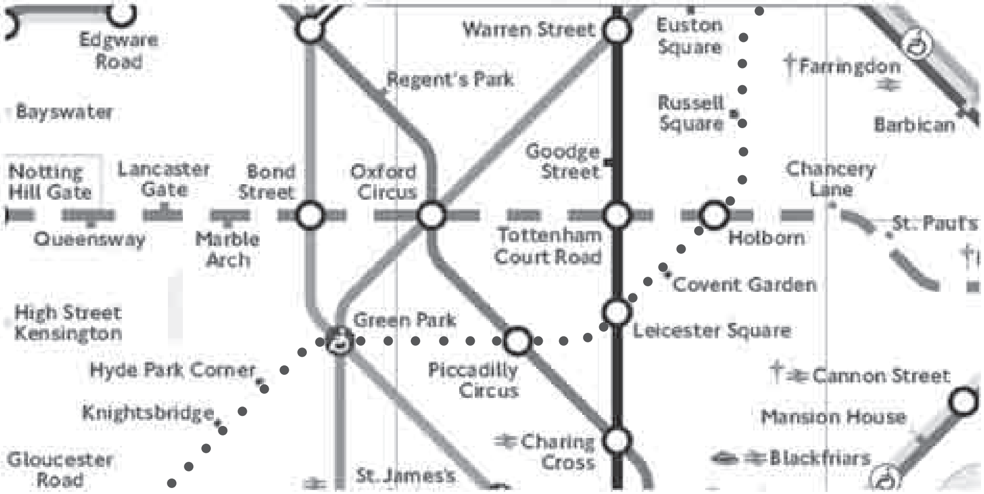
[5]Peta je od deset zapovijedi za učitelje
[6]Važno je osvijestiti pitanje je li u zadatku realan kontekst vjerno opisan
[7]Periodične
[8]Preuzet je iz [4]

Jedan dan u Londonu

Zadatak 1.

Londonska podzemna željeznica najstarija[9] je podzemna željeznica na svijetu. To je vrlo složen prometni sustav. Svakodnevno se bilježi oko tri i po milijuna putovanja na 11 linija koje opslužuju 270 stanica[10].

Na slici 1.1 prikazan je dio[11] mape londonske podzemne željeznice (Tube map). Svaka je prometna linija imenovana i na mapi označena pripadajućom bojom.



Slika 1.1.[12]

Promatrajmo liniju Central[13] koja povezuje stanice (redom s lijeva na desno): Queensway, Lancaster Gate, Marble Arch, Bond Street, Oxford Circus, Tottenham Court Road, Holborn, Chancery Lane i St. Paul´s.

Pretpostavimo da su sve stanice linije Central na istom nivou, odnosno u istoj ravnini. Neka mrežu na danoj slici tvore ortogonalne projekcije linija podzemne željeznice na ravninu određenu linijom Central.

Neka je π_C ravnina Central određena linijom Central. Svakoj stanici linije Central prikazanoj na slici pridružimo točku (redom s lijeva na desno): Q, L_G, M, B, O_C, O, H_C, C_L i S.

[9]Prvi je dio (prva linija) otvoren 1863. godine (istraži o kojem se dijelu radi) Londonski Muzej transporta (London Transport Museum) svjedoči o povijesti gradskog javnog prijevoza.
[10]Prema podacima sa: http://www.tfl.gov.uk/corporate/modesoftransport/1574.aspx (mnoštvo podataka o londonskoj podzemnoj željeznici može se naći na: http://www.tfl.gov.uk/corporate/modesoftransport/londonunderground/1608.aspx)
[11]Iz 1. zone koja obuhvaća središnji London
[12]Dio mape londonske podzemne željeznice, preuzeto sa: http://www.tfl.gov.uk/assets/downloads/standard-tube-map.pdf
[13]Na mapi je označena isprekidanom linijom

Neka je pravac kroz točke Q i M brojevni pravac x s ishodištem u točki O. Okomito na njega postavimo brojevni pravac y tako da imaju zajedničko ishodište O (pravac kroz točke O i G_S', gdje smo sa G_S' označili projekciju točke - pridružene stanici Goodge Street, na ravninu π_C.) Dakle, ishodište O(0, 0) ovog pravokutnog koordinatnog sustava je u točki pridruženoj stanici Tottenham Court Road. Na brojevnom pravcu x pozitivni su brojevi zdesna ishodištu, a na brojevnom pravcu y pozitivni su brojevi iznad ishodišta. Neka su koordinate navedenih točaka u ovom koordinatnom sustavu: Q(−20/3, 0); L_G(−17/3, 0); M(−14/3, 0); B(−11/3, 0); O_C(−5/2, 0); H_C(5/4, 0); C_L(3, 0) i S(15/4, −5/16).

1. Odredi udaljenost stanica Queensway i Marble Arch.
2. Odredi skup svih navedenih točaka ravnine π_C kojima koordinate x i y zadovoljavaju uvjet:

   a) $x + y > 0$; b) $-3x - 5 \geq 0$.

   Za svaki zadatak navedi o kojim je postajama riječ.
3. Odredi skup svih navedenih točaka ravnine π_C za koje je:

   a) $|x| < 1$; b) $|x + 1| \geq 2$.

   Za svaki zadatak navedi o kojim je postajama riječ.
4. Postoji li stanica na liniji Central jednako udaljena od stanica Oxford Circus i Lancaster Gate?
5. Produži po volji liniju Central s obje strane (od stanica Queensway i St. Paul’ s) i odaberi po dvije točke sa svake strane koje su pridružene novim, zamišljenim stanicama linije Central.

   Zadovoljava li neka od tih točaka uvjet a) iz 2. zadatka?

Promatrajmo sada liniju Piccadilly[14] koja povezuje stanice (redom odozdo prema gore): Knigtsbridge, Hyde Park Corner, Green Park, Piccadilly Circus, Leicester Square, Covent Garden, Holborn i Russell Square (vidi sliku 1.1).

Pretpostavimo da su i sve stanice linije Piccadilly u jednoj ravnini, paralelnoj s ravninom Central. Vertikalne poveznice omogućavaju prijelaz s jedne na drugu liniju (Holborn).

Neka je π_P ravnina Piccadilly određena linijom Piccadilly. Svakoj stanici linije Piccadilly pridružimo točku (redom odozdo prema gore): K, H, G, P, L_S, C_G, H_P i R (istaknimo da je stanici Holborn na liniji Central pridružena točka H_C, a na liniji Piccadilly točka H_P).

[14]Na mapi je označena točkastom linijom

Neka je ortogonalna projekcija koordinatnog sustava u ravnini Central, na ravninu Piccadilly, odabrani koordinatni sustav u ravnini π_P. Koordinate navedenih točaka u ovom koordinatnom sustavu u ravnini π_P su: K(–29/6, –7/3); H(–27/6, –2); G(–15/4, –5/3); P(–5/4, –5/3); L_S(0, –5/4); C_G(5/8, –5/8); H_P(5/4, 0) i R(7/4, 5/4) (uočiti da su to koordinate njihovih projekcija na ravninu Central).

6. Odredi udaljenost stanica Knigtsbridge i Hyde Park Corner.

7. Odredi skup svih navedenih točaka ravnine π_P kojima koordinate x i y zadovoljavaju uvjet $x - y \leq 0$.

   O kojim je postajama riječ?

8. Odredi skup svih navedenih točaka ravnine π_P za koje je:

   a) $|y| > 2$;   b) $\left|y - \frac{1}{2}\right| \leq 1$.

   Za svaki zadatak navedi o kojim je postajama riječ.

9. Je li dio linije Piccadilly između stanica Knigtsbridge i Hyde Park Corner paralelan dijelu između stanica Leicester Square i Holborn?

10. Dokaži da točke L_S, C_G i H_P pripadaju jednom pravcu.

11. Provjeri točnost sljedećih tvrdnji. Ravnina π_C je određena:

    a) točkama Q, L_G i O_C; T N

    b) pravcem kroz točke M i B i točkom C_L; T N

    c) pravcem kroz točke Q i L_G i pravcem kroz točke C_L i S. T N

12. Provjeri točnost sljedećih tvrdnji. Ravnina π_P je određena:

    a) točkama K, P i R; T N

    b) pravcem kroz točke P i R i točkom G; T N

    c) pravcem kroz točke K i H i pravcem kroz točke L_S i C_G. T N

13. Odredi položaj dvaju pravaca. Pravcima danim u lijevom stupcu pridruži odgovarajući položaj (stupac desno):

a) pravci QL_G i MB	a´) se ne sijeku
b) pravci MB i C_LS	b´) su paralelni
c) pravci KH i L_SH_P	c´) su mimoilazni
d) pravci QL_G i KH	d´) se podudaraju
	e´) se sijeku, ali nisu istovjetni

(Napomena: Odgovori nisu jednoznačni.)

Zadatak 2.

Nacionalna galerija baštini oko 2300 slika nastalih u razdoblju od 13. stoljeća do ranih godina 20. stoljeća.[15] Ulaz u Galeriju je slobodan (tipično britansko pravilo) i svatko može uživati u raskoši jedne od najvećih svjetskih zbirki. *U kazalištu* (Renoir), *Žitno polje s čempresima* (Van Gogh), *Večera u Emausu* (Caravaggio), *Kupačica* (Rembrant), *Plaža u Trouvilleu* (Monet), *Kišobrani* (Renoir), *Djevojka stoji pokraj virginala* (Vermeer), *Venera u ogledalu* (Velazquez), *Suncokreti* (Van Gogh), *Autoportret u dobi od 34 godine* (Rembrant) - samo su neka od remek-djela ove londonske riznice.

U obližnjoj Nacionalnoj galeriji portreta izloženi su portreti poznatih Britanaca. Čak je 45 portreta[16] velikana znanosti Isaaca Newtona[17].

Ovdje će biti riječi o pojmu funkcije čijem su razvoju svoj doprinos, kroz diferencijalni račun, dali Newton i Leibniz[18]; Newton baveći se problemom određivanja brzine tijela u danom trenutku, a Leibniz rješavajući problem određivanja tangente zadane krivulje u nekoj točki. Leibniz 1673. godine prvi koristi riječ *funkcija* kako bi opisao ovisnost veličine y o promjenjivoj veličini x. S vremenom se definicija pojma funkcije dalje razvijala prema definiciji koju danas koristimo[19].

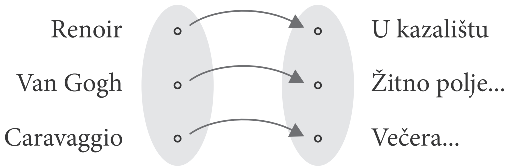
Stavimo sada slavne slikare i njihove slike u službu njezina Veličanstva[20]- funkcije[21].

(Istraži povezanost slikarstva i matematike i otkrij „matematiku u slici”: zlatni rez[22], popločavanje ravnine[23] naprimjer.)

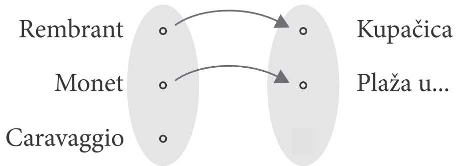
Promotri slike 2.1-2.7 i odgovori.

1. Zašto dijagrami na slikama 2.2 i 2.3 ne predstavljaju funkcije?

Za dijagrame funkcija (slike 2.1 i 2.4) odredi domenu, kodomenu i sliku tih funkcija.

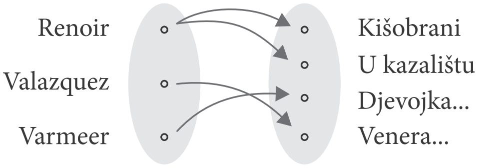


Slika 2.1.

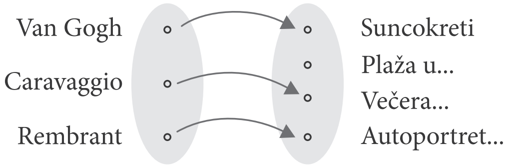


Slika 2.2.

[15]Prema podacima sa: http://www.nationalgallery.org.uk/paintings/collection-overview/
[16]Prema podacima sa: http://www.npg.org.uk/collections/search/sitA-Z/sitn.php
[17]Isaac Newton (1642.-1727.), fizičar, matematičar i astronom
[18]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.), njemački matematičar, fizičar, filozof i diplomat
[19]Dirichlet-Bourbakijeva definicija
[20]*U službi njezina Veličanstva* istoimeni je film o Jamesu Bondu (1969.)
[21]Funkcija je temeljni matematički pojam, vrlo važan u matematici i primjenama
[22]Istraži je li neka od slika gore navedenih primjer zlatnog reza u likovnoj umjetnosti
[23]Vidi Esherove slike



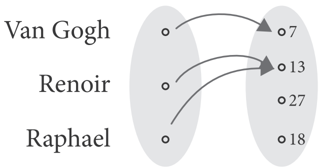
Slika 2.3.



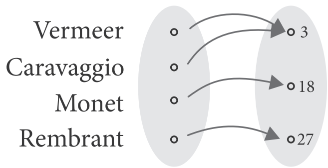
Slika 2.4.

2. Dijagrami dani na slikama 2.5, 2.6 i 2.7 su dijagrami funkcija. Provjeri. Koji predstavlja surjekciju, injekciju, a koji bijekciju?

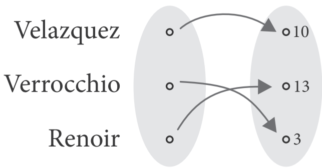
   Slikarima koji su ovdje navedeni pridružili smo broj njihovih slika izloženih u londonskoj Nacionalnoj galeriji[24].



Slika 2.5.



Slika 2.6.



Slika 2.7.

3. Provjeri surjektivnost, injektivnost i bijektivnost na prethodno danim dijagramima funkcija (vidi slike 2.1 i 2.4).
4. Pretpostavimo da je Renoirova slika *U kazalištu* otuđena iz Nacionalne galerije (i izostavljena iz naših zadataka). Ispitaj koje bi bile „posljedice" krađe Renoirove slike na naše zadatke.

Zadatak 3.

Prigodom obilježavanja prijelaza u novi milenij londonski su se gradski oci potrudili izgraditi nekoliko atrakcija od kojih je najzanimljiviji ogromni kotač, nazvan London Eye, sagrađen uz samu desnu obalu rijeke Temze, nasuprot čuvenom Big Benu. Kotač se uzdiže do visine 135 metara, teži 1900 tona, a u 32 klimatizirane kabine već u prvoj godini prevezeno je 3.5 milijuna ljudi. Kabina se vrti brzinom od 0.3 m/s.

1. *Koliko vremena traje obilazak punog kruga jedne kabine?*
2. *Prikaži visinu kabine kao funkciju vremena tijekom tri puna kruga.*
3. *Nacrtaj graf te funkcije. Je li ta funkcija periodična?* [4, str. 81]

[24]Prema podacima sa: http://www.nationalgallery.org.uk/artists/

Slika 3.1.[25]

Danas je najveći panoramski kotač na svijetu onaj u Singapuru. U promet je pušten 2008. godine. Saznaj više o njemu[26] i usporedi ga s londonskim.

Promatrajmo sada gibanje kabine panoramskog kotača radijusa r tijekom dva puna kruga.

Vrijeme obilaska punog kruga kabine označimo sa T.

Neka je ovisnost visine kabine h o vremenu t tijekom dva puna kruga dana sa

$$h(t) = -r\cos\frac{2\pi}{T}t + r, \qquad t \in [0, 2T].$$

Uoči da je h visina kabine u odnosu na najnižu točku kotača, tj. mjesto ulaza u kabinu kotača, odnosno izlaza.

4. U sustavu h-t nacrtaj graf ove funkcije.
5. Pretpostavimo da se isti panoramski kotač vrti dva puta brže (dva puta sporije) nego prije.
   a) Ispitaj što se događa u oba slučaja tijekom vremena $2T$.
   b) Napiši ovisnost visine kabine o vremenu u oba slučaja.
      Označi sa h_1 visinu kabine kod brže vrtnje, a sa h_2 kod sporije.
   c) Nacrtaj grafove tih funkcija koristeći postojeći koordinatni sustav (zadatak 4).
6. Koristeći se prethodno nacrtanim grafovima funkcija odredi koliko rješenja u intervalu $[0, 2T]$ imaju jednadžbe:
   a) $h(t) = h_1(t)$ b) $h(t) = h_2(t)$ c) Riješi te jednadžbe.

[25]Pogled na Temzu, London Eye iz obiteljskog albuma

[26]http://www.singaporeflyer.com/

7. Riješi grafički nad intervalom $[0, 2T]$ sljedeće nejednadžbe:

   a) $h(t) > h_1(t)$, b) $h(t) \leq h_2(t)$.

Zadatak 4.

26 maturanata (15 učenica i 11 učenika) jedne gimnazije, zajedno sa svojim razrednikom, planiraju izlet u London početkom listopada 2013. godine. U planu je i odlazak u kazalište na West Endu[27]. Prema dostupnim informacijama, u to će vrijeme u kazalištima na West Endu na repertoaru biti 32 predstave: 22 mjuzikla, 6 drama i 4 komedije.

1. Na koliko se načina može odabrati po jedna kazališna predstava iz svakog žanra?

   Budući da se cijene karata kreću od 20-ak do 60-ak funti (za grupe su cijene pristupačnije), a još je puno toga što bi htjeli vidjeti u Londonu, odlučili su se za jednu predstavu. Odabrali su uspješan mjuzikl *Fantom u operi*[28]. Netko je primijetio da se broj godina izvedbe tog mjuzikla podudara s brojem učenika zajedno s razrednikom.

2. Nađi koja je po redu u leksikografskom poretku skupa {A, F, M, N, O, T} riječ FANTOM?

3. a) Koliko se različitih riječi može napisati od slova riječi WEBBER[29]?

   b) Nađi koja je po redu u leksikografskom poretku skupa {B, B, E, E, R, W} riječ WEBBER?

4. Trebalo je prikupiti novac (kupnja karata bila je razrednikov zadatak) i prije predstave se detaljnije informirati o sadržaju djela, a nakon odgledane predstave, za školske novine napisati osvrt na izvedbu.

   a) Na koliko se načina ta zaduženja mogu podijeliti među učenicima tako da pojedini učenik ima najviše jednu od tih dužnosti?

   b) Na koliko je načina moguće izvršiti taj izbor, s tim da pojedini učenik može imati i više dužnosti?

5. Na koliko se načina njih 27 može rasporediti na 27 sjedala?

6. Unatoč tome što su karte kupljene ranije, među kupljenim kartama bilo je 6 karata za mjesta jedno do drugog, s boljim pogledom na pozornicu u odnosu na ostala mjesta.

   a) Na koliko se različitih načina može formirati ta šesteročlana skupina učenika tako da u njoj budu barem 4 učenice?

   b) Učenici su se dogovorili da na tim mjestima budu 3 učenice i 3 učenika. Na koliko se različitih načina može formirati ta skupina učenika?

[27] Čuvena londonska četvrt

[28] Prema istoimenom romanu Gastona Lerouxa

[29] Andrew Lloyd Webber autor je glazbe

c) Neka su izabrane 3 učenice i 3 učenika. Na koliko različitih načina oni mogu sjesti na tih 6 mjesta tako da nikoje dvije osobe istog spola ne sjede jedna do druge?

7. U toj će se gimnaziji 27. ožujka prigodnim programom obilježiti Svjetski dan kazališta. U organizaciji će sudjelovati i šesteročlani tim učenika koji treba oformiti tako da budu zastupljene sve četiri generacije gimnazijalaca, od prvog do četvrtog razreda.

   Na koliko se to načina može izvesti?

Završne napomene

Nada je autorice da će zadaci pomoći učenicima da bolje povežu matematiku i stvarni svijet i da će imati pozitivan učinak na zanimanje učenika za predmet.

Rješavanjem prvog zadatka stimuliraju se vizualizacija i prostorni zor. Kroz drugi zadatak može se provjeriti razumijevanje pojma funkcije i bijektivnosti funkcije, a rješavanjem trećeg poboljšati razumijevanje uzajamne povezanosti realnih pojava i funkcija koje ih opisuju (periodične pojave i trigonometrijske funkcije). Zadnji zadatak obuhvaća permutacije, varijacije i kombinacije, a pogodan je za ponavljanje kombinatorike.

Raznovrsnim i zanimljivim matematičkim zadacima zabavnog sadržaja, maštovitim zadacima u kojima otkrivamo svijet oko nas, nastava matematike može se učiniti zanimljivijom.

Stvaranje takvih zadataka radost je nastavniku i osvježenje za nastavnički entuzijazam.

Učenici će radije rješavati zanimljive zadatke i možda stoga nestrpljivo iščekivati nove satove matematike.

Kakva ćemo razmišljanja i koje učeničke ideje tako pokrenuti, valja svakako ispitati.

Literatura

1. Gotovac, B.: *Analiza grafa funkcije bez uporabe matematičkog nazivlja - Lice i naličje nastavnog sata*, Zbornik radova 5. kongresa nastavnika matematike RH, Zagreb, 3. - 5. srpnja 2012., HMD i Profil, Zagreb, 2012., 203-220.

2. Polya, G.: *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb, 2003.

3. De Villiers, M.: *Matematičke primjene, modeliranje i tehnologija*, Zbornik radova 5. kongresa nastavnika matematike RH, Zagreb, 3. - 5.srpnja 2012., HMD i Profil, Zagreb, 2012., 607-628.

4. Dakić, B.; Elezović, N.: *MATEMATIKA 3*, *udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije*, *1. dio*, 4. izdanje, Element, Zagreb, 2008., str. 81.