

Ovato tondo

NIKOL RADOVIĆ¹, RENATA SVEDREC², TANJA SOUCIE³, IVANA KOKIĆ⁴

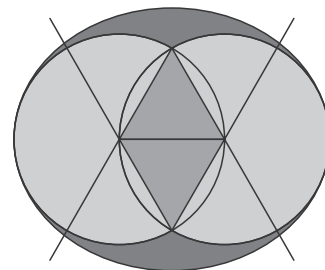
U svakodnevnim nam se situacijama, primjerice pri jelu (tanjuri, stolovi, pizze), pri izboru frizure, odabiru nakita ili okvira za slike, pogledu kroz prozor, zatvaranju vrata, razgledavanju različitih građevina i poznatih trgova, pri plaćanju računa u inozemstvu (stranom valutom) nameću geometrijski oblici - ovali. Neki primjeri ovala prikazani su na sljedećim slikama.



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.



Slika 5.

¹Nikol Radović, Geodetski fakultete Sveučilišta u Zagrebu

²Renata Svedrec, OŠ Otok, Zagreb

³Tanja Soucie, OŠ G. Krkleca, Zagreb

⁴Ivana Kokić, OŠ Trnsko, Zagreb



Slika 6.



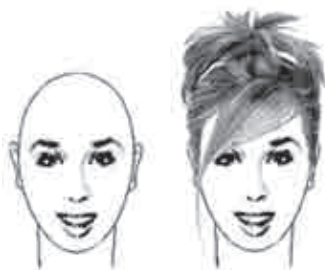
Slika 7.



Slika 8.



Slika 9.



Slika 10.

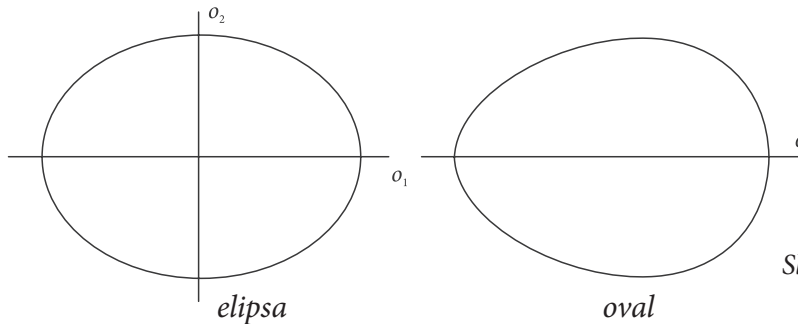


Slika 11.



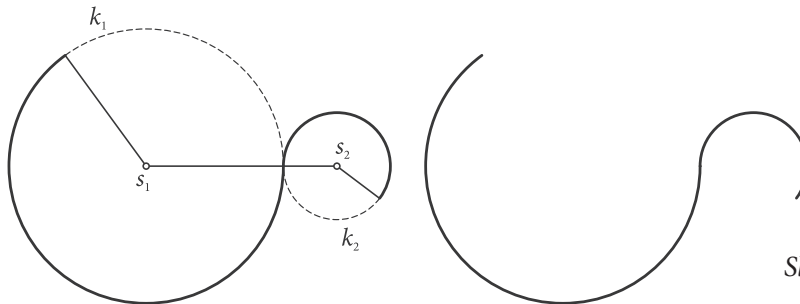
Slika 12.

Nije rijedak slučaj da u nekom razgovoru čujete: *Zar ti je to ovalno?! Kako ne znaš što je elipsa? Baš sam nabavila ovalne (elipsaste) tanjure!* Ako želite nekome najjednostavnije objasniti razliku između ovalnog i elipsastog, onda se može reći da je elipsa oblik (ne ulazeći u strogu matematičku definiciju) s dvije osi simetrije, dok je oval oblik koji ima barem jednu os simetrije, što će reći da je *svaka elipsa oval, ali obrat ne vrijedi* (slika 13.).

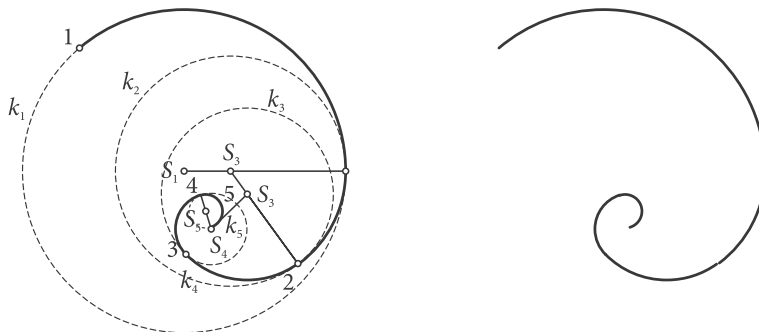


Slika 13.

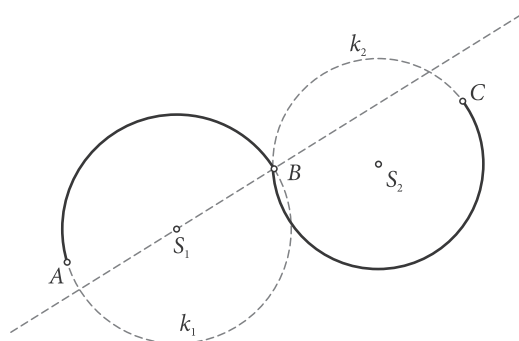
Oval (lat. *ovum* - jaje) znači *jajolik oblik* ili geometrijska figura omeđena krivuljom jajolika oblika. Postoje različite konstrukcije ovala i jajolikih krivulja koje su dostupne na internetu i u različitim knjigama. Zajedničko im je da nema opisa tijekom konstrukcije, već samo slike. Jedna od konstrukcija ovala izvediva u osnovnoj školi jest konstrukcija ovala kao niza kružnih lukova kružnica različitih duljina polumjera (slike 14. i 15.) koji se *ne lome* već *nastavljaju* jedan na drugi kružni luk kako bi se izbjegao „lom/špic” (slika 16.).



Slika 14.

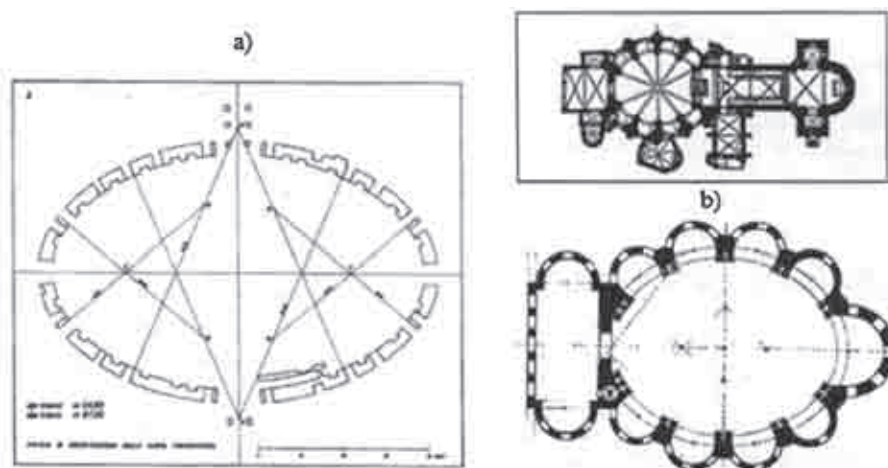


Slika 15.



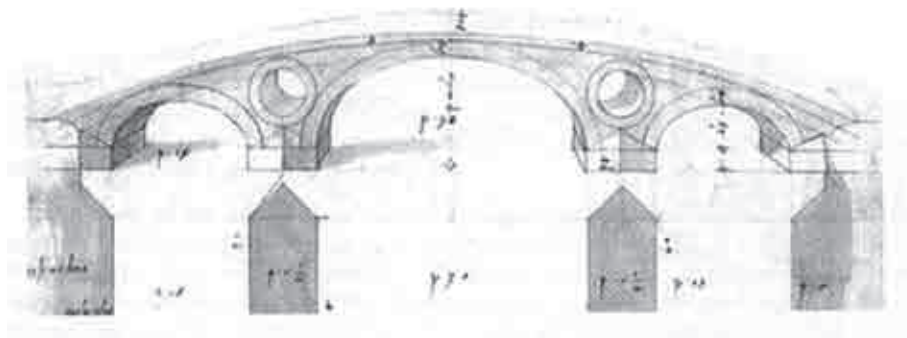
Slika 16.

Prije samog crtanja/konstruiranja ovala, pogledajmo neke povijesne činjenice koje vežu geometriju/matematiku i arhitekturu. Sve do doba renesanse temeljni priručnik za arhitekta i građevinare bilo je djelo *De architectura libri decem* (10 knjiga o arhitekturi), napisano 27. godine pr. Kr., rimskog pisca, arhitekta i vojnog inženjera **Vitruvija**. U 15. stoljeću pjesnik, slikar, kipar, glazbenik arhitekt, matematičar i kriptograf **Leon Battista Alberti** sistematizirao Vitruvijevo djelo i uveo teorije o matematičkom skladu i proporcijama u arhitekturu. U tim djelima dane su upute kako *nacrtati* plan gradnje za neku građevinu, uz preporuke oblika građevine (kvadrata, šesterokuta, osmerokuta, deseterokuta i dvanaesterokuta, oblika koje je moguće konstruirati iz kružnice), a smatralo se da je krug/kružnica najsavršeniji oblik. Elipsa i njezini dijelovi postupno su postali jedan od oblika pri građenju (slika 17. i 18.) pa ih je bilo važno nacrtati/konstruirati precizno kako bi se te građevine mogle i izgraditi (slika 19.).



Slika 17.

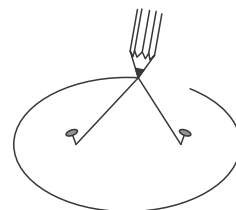
- a) Nacrt rimskog Koloseuma – oval
 b) Osmerokut crkve St. Gereon (Cologne) - ovalni oblik prema rimskom Koloseumu



Slika 18.

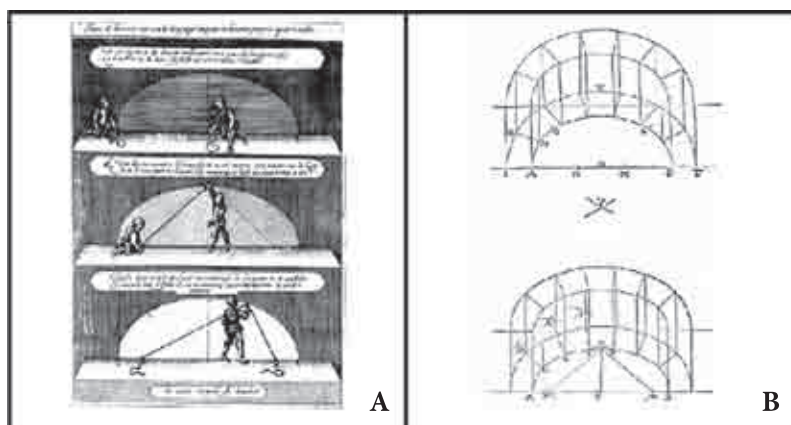
Prvi nacrt mosta s ovalnim lukovima, Vignola 1547.

Problem je bio u konstrukciji elipse. Sve do 17. stoljeća proučavanje, crtanje/konstruiranje krivulja drugog i višeg reda bila je tema tzv. *više matematike*. Grci nisu znali nacrtati/konstruirati elipsu na jednostavan način. Metodu *užeta* (slika 19.) otkrio je **Antemije** iz Trala, bizantinski arhitekt i geometričar iz 6. stoljeća. Istu su metodu krajem 16. i početkom 17. stoljeća doradili **Guidobaldo del Monte**, **Simon Stevin** i **Kepler**.



Slika 19.

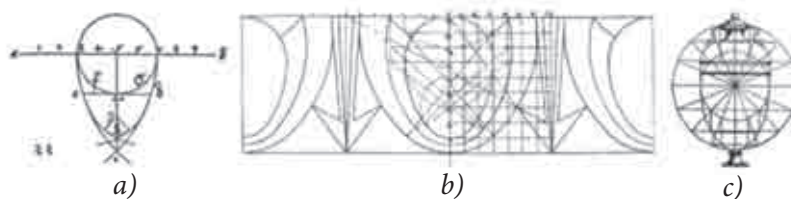
U Španjolskoj je 1639. godine **Fray Lorenzo de San Nicolás** napisao *Priručnik o građevinama* u kojemu daje detaljne upute za konstrukciju lukova, kao što su metode što jednostavnijeg građenja lukova od cigle (slika 20.). Svojim djelom proširio je i doradio konstrukcije Serlia.



Slika 20.

Crtanje lukova metodom užeta, A - Bachos 1598. , B - San Nicolás 1639.

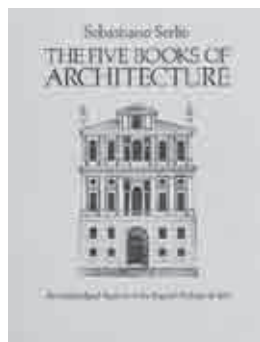
U ovom se trenutku nećemo baviti prikazima geometrijskih figura, tj. građevina i njihovih ovalnih dijelova, nego će nas zanimati konstrukcije ovala/jajolikih oblika. Na slici 21. prikazane su različite metode konstrukcija ovala u doba renesanse.



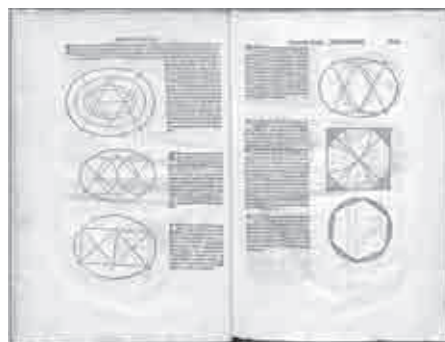
Slika 21.

Konstrukcije ovala – (a) Dürer, (b) Gibbs, (c) Serlio

Posebno ćemo proučavati i crtati/konstruirati Serliove konstrukcije ovala koje još nazivaju i *aproksimacijama elipse*. **Sebastiano Serlio** bio je talijanski arhitekt koji je uvijek naglašavao svoju očaranost geometrijom. Njegovo područje interesa je, osim arhitekture (planiranje gradnje građevina različitih oblika), bilo i izučavanje konstrukcija geometrijskih figura šestarom i ravnalom, čija je primjena važna u arhitekturi. Svoje ideje objavio je u seriji knjiga *Tutte l'Opere d'Architettura* koje su postale tzv. *Biblija za arhitekta* (slika 22. i 23.). Pisane su na talijanskom jeziku (sve knjige do tada bile su na latinskom jeziku), imale su veliki broj ilustracija/slika opisanih konstrukcija (jer ipak se radi o geometrijskim temama), i u njima su sistematizirani radovi svih do tada relevantnih arhitekata, od Vitruvija nadalje.



Slika 22.



Slika 23. Knjiga I, 4 konstrukcije ovala

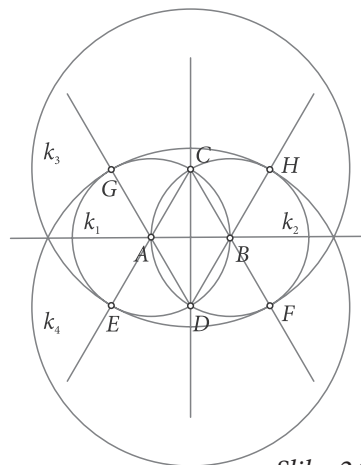
Budući da se Serliove konstrukcije ovala (slika 23.) temelje na crtanju/konstruiranju kružnica i kružnih lukova, prikladna su tema za izbornu/dodatnu nastavu matematike 7. razreda osnovne škole, kao i kasnije u 8. razredu te srednjoj školi. Naime, konstrukcije ovala/kružnih lukova mogu se nadograditi dodavanjem transformacije ravnine uočavanjem svojstva simetričnosti, ali i iracionalnih brojeva (jer su duljine nekih pomoćnih dužina iracionalni brojevi te se mogu promatrati njihovi omjeri). Primjeri koji slijede su aktivnosti osmišljene za obradu geometrijske teme - *ovala*.

Svi primjeri mogu se rješavati klasično (papir, olovka, trokuti i šestar) ili uporabom programa dinamične geometrije. Program dinamične geometrije kao alata za crtanje omogućava učenicima konstruiranje/crtanje geometrijskih figura na ekranu. Nacrtna geometrijska figura (oval) može se rotirati, zrcaliti, translirati, animirati (to su temelji računalne grafike o kojoj svi toliko pričaju) te sagledati iz sasvim nove perspektive da bi se mogla uočiti svojstva i odnosi među geometrijskim figurama koji prije nisu bili tako uočljivi. Promatranje konstruiranih figura, zajedno s istraživanjem svojstava nacrtnih/konstruiranih geometrijskih figura u raznim položajima, pomaže učenicima u razvoju osjećaja za prostor, vizualizaciju tog istog prostora prepoznavanjem tih istih geometrijskih figura u svijetu koji ih okružuje, kao i primjenu naučenog u rješavanju složenih konstruktivnih zadataka (pogotovo kada je općenito mišljenje da su konstrukcije nepotrebne). Nadalje, crtanje/konstruiranje ovala programom dinamične geometrije omogućava „brisanje” svih pomoćnih elemenata (kružnica, dužina, pravaca, polupravaca...) i rješavanje drugih zadataka.

Učenici su sve primjere rješavali na satu. Budući da se radilo s učenicima kojima nije stran rad matematike/geometrije pomoću programa dinamične geometrije, u primjerima nisu navedeni koraci konstrukcija. Svaki je učenik radio samostalno na računalu, prema pripremljenim aktivnostima, brzinom koja njemu odgovara. Prema potrebi učenik se mogao vraćati na neki već riješen primjer. Ovakav način rada za učitelja znači da treba utrošiti vrijeme za pripremu materijala/aktivnosti (ako ih nema), ali, s druge strane, uočena su bitna poboljšanja u kvaliteti same nastave. Osim što učenici posebno dobro reagiraju na nestandardne aktivnosti, moguća je komunikacija sa svakim učenikom, pa se tako mogu doznati učenikova razmišljanja u primjeni stečenih znanja. Isto tako, eventualne je pogreške (a uvijek ih ima) zbog dinamičnosti programa moguće odmah objasniti jer vrlo jednostavno možete pokazati što su posljedice „krivog” zaključivanja. Zadani su i zadaci za samostalan rad.

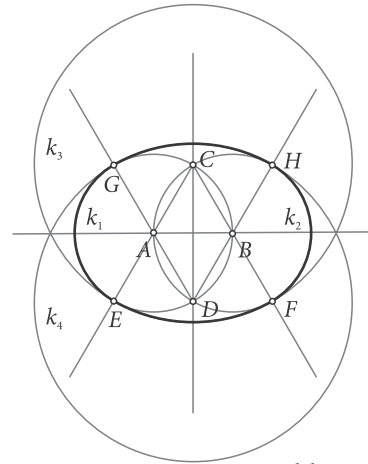
Primjer 1. Konstrukcija ovato tondo

- Nacrtajmo dužinu \overline{AB} proizvoljne duljine.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_1(A, |AB|)$ i $k_2(B, |AB|)$.
- Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama C i D .
- Nacrtajmo/konstruirajmo polupravce CA , CB , DA i DB .
- Polupravac CA siječe kružnicu k_1 u točki E , odnosno polupravac CB siječe kružnicu k_2 u točki F .



Slika 24.

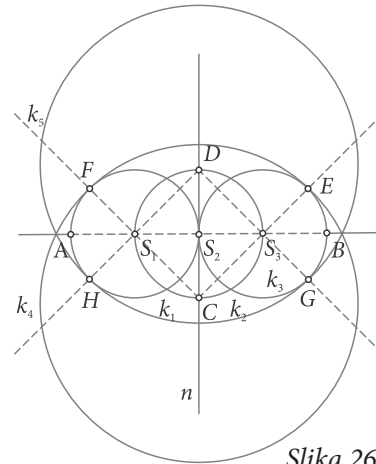
- Polupravac DA siječe kružnicu k_1 u točki G , odnosno polupravac DB siječe kružnicu k_2 u točki H .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_3(C, |CE|)$ i $k_4(D, |DG|)$, slika 24.
- Nacrtajmo kružne lukove omeđene točkama E i F na kružnici k_3 ; točkama F i H na kružnici k_2 ; točkama H i G na kružnici k_4 te točkama G i E na kružnici k_1 .
- Nacrtali smo oval konstrukcijom koja je poznata kao *konstrukcija ovato tondo*, slika 25.



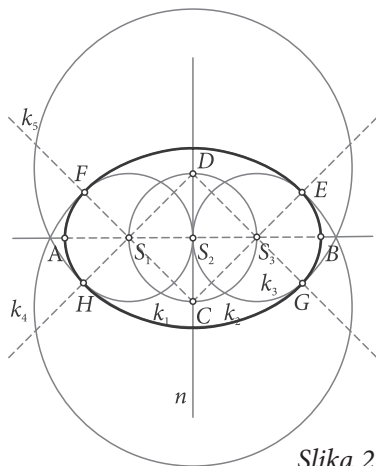
Slika 25.

Primjer 2. Konstrukcija triju kružnica ili Konstrukcija ovato longo

- Nacrtajmo dužinu \overline{AB} proizvoljne duljine.
- Dužinu \overline{AB} podijelimo na 4 sukladna dijela, a točke redom označimo S_1, S_2 i S_3 .
- Nacrtajmo kružnice $k_1(S_1, |AS_1|)$, $k_2(S_2, |AS_1|)$, $k_3(S_3, |AS_1|)$.
- Točkom S_2 nacrtamo/konstruiramo okomicu n na dužinu \overline{AB} .
- Kružnica k_2 i okomica n sijeku se u dvije točke, C i D .



Slika 26.



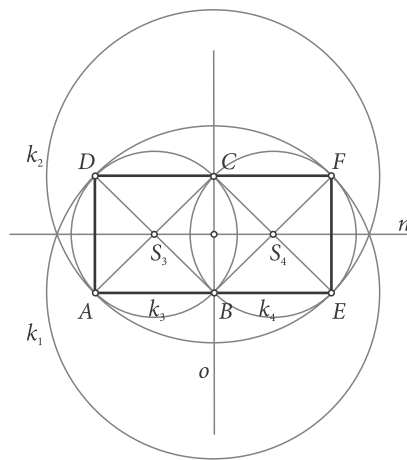
Slika 27.

- Nacrtajmo/konstruirajmo polupravce CS_1, CS_3, DS_1 i DS_3 .
- Polupravac CS_1 siječe kružnicu k_1 u točki F , odnosno polupravac CS_3 siječe kružnicu k_3 u točki E .
- Polupravac DS_1 siječe kružnicu k_1 u točki H , odnosno polupravac DS_3 siječe kružnicu k_3 u točki G .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_4(C, |CF|)$ i $k_5(D, |DG|)$, slika 26.

- Nacrtajmo kružne lukove omeđene točkama E i F na kružnici k_4 ; točkama F i H na kružnici k_1 ; točkama H i G na kružnici k_5 te točkama G i E na kružnici k_3 .
- Nacrtali smo oval konstrukcijom koja je poznata kao *konstrukcija ovato longo*, slika 27.

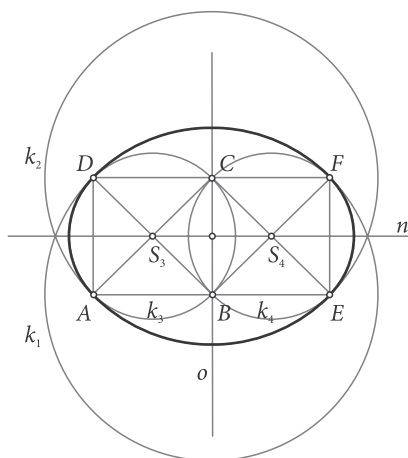
Primjer 3. Konstrukcija dvaju kvadrata ili Konstrukcija ovato.

- Nacrtajmo kvadrate $ABCD$ i $BEFC$ (imaju zajedničku stranicu \overline{BC}).
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_1(B, |BD|)$ i $k_2(C, |CA|)$.
- Dijagonale kvadrata $ABCD$ sijeku se u točki S_3 , a dijagonale kvadrata $BEFC$ sijeku se u točki S_4 .
- Nacrtajmo/konstruirajmo pravce $n = S_3S_4$ i $o = BC$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_3(S_3, |S_3D|)$ i $k_4(S_4, |S_4C|)$, slika 28.



Slika 28.

- Nacrtajmo kružne lukove omeđene točkama A i E na kružnici k_2 ; točkama E i F na kružnici k_4 ; točkama F i D na kružnici k_1 te točkama D i A na kružnici k_3 .
- Nacrtali smo oval konstrukcijom koja je poznata kao *konstrukcija ovato*, slika 29.

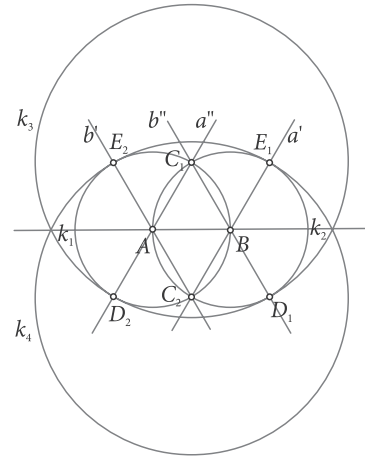


Slika 29.

Primjer 4. *Konstrukcija ovala pomoću jednakostraničnog trokuta.*

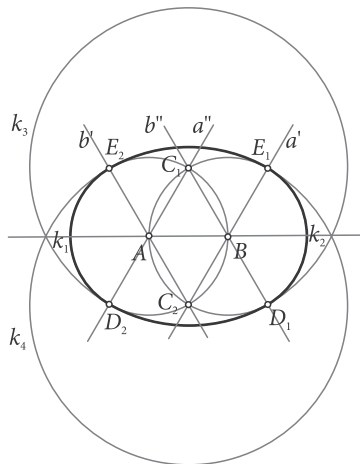
- Nacrtajmo dužinu \overline{AB} proizvoljne duljine.
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_1(A, |AB|)$ i $k_2(B, |AB|)$.
- Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama C_1 i C_2 .
- Nacrtajmo dužine $\overline{AC_1}$, $\overline{BC_1}$, $\overline{AC_2}$ i $\overline{BC_2}$.
- Jednakostranični trokuti ABC_1 i ABC_2 imaju zajedničku stranicu \overline{AB} .
- Točkom A nacrtajmo/konstruirajmo pravac b' usporedan s dužinom $\overline{BC_1}$, točkom B nacrtajmo/konstruirajmo pravac a' usporedan s dužinom $\overline{AC_1}$, odnosno nacrtajmo pravce $a'' = AC_1$ i $b'' = BC_1$.

- Pravac a' i kružnica k_2 sijeku se u točkama E_1 i C_2 .
- Pravac a'' i kružnica k_1 sijeku se u točkama C_1 i D_2 .
- Pravac b' i kružnica k_1 sijeku se u točkama E_2 i C_2 .
- Pravac b'' i kružnica k_2 sijeku se u točkama C_1 i D_1 .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_3(C_1, |C_1D_2|)$ i $k_4(C_2, |C_2E_1|)$, slika 30.



Slika 30.

- Nacrtajmo *kružne lukove* omeđene točkama E_1 i E_2 na kružnici k_4 ; točkama E_2 i D_2 na kružnici k_1 ; točkama D_2 i D_1 na kružnici k_3 te točkama D_1 i E_1 na kružnici k_2 .
- Nacrtali smo *oval*, slika 31.

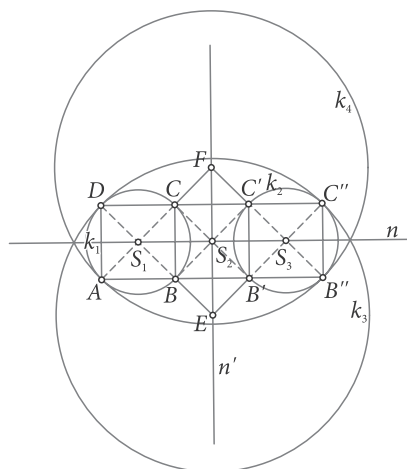


Slika 31.

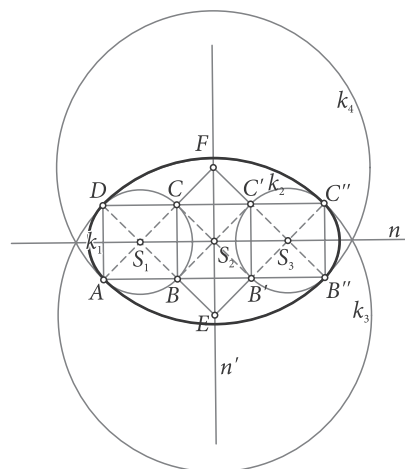
Sve konstrukcije prikazane u prethodnim primjerima, kao i one koje slijede, mogu se nadograditi primjenom transformacija ravnine u 8. razredu osnovne škole. Ako imate priliku to provesti s generacijom učenika 7. razreda na jedan od načina (konstrukcijama kružnice, kružnih lukova), pa ponovno u 8. razredu, pokazat ćete im kako se iste teme mogu rješavati primjenom različitih vještina.

Primjer 5. *Konstrukcija ovala pomoću triju kvadrata.*

- Konstrukcija je slična konstrukciji iz **Primjera 3.**, uz dodatak još jednog kvadrata.
- Nacrtajmo kvadrate $ABCD$, $BB'C'C$ i $B'B''C''C'$ (svaka dva kvadrata imaju zajedničku stranicu).
- Dijagonale kvadrata $ABCD$ sijeku se u točki S_1 , dijagonale kvadrata $BB'C'C$ sijeku se u točki S_2 , a dijagonale kvadrata $B'B''C''C'$ sijeku se u točki S_3 .
- Nacrtajmo/konstruirajmo pravac $n = S_1S_3$ te točkom S_2 okomicu n' na pravac n .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_1(S_1, |S_1D|)$ i $k_2(S_3, |S_3C''|)$.
- Polupravci DS_1 i $B''S_3$ sijeku pravac n' redom u točkama E i F .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_3(E, |ED|)$ i $k_4(F, |FA|)$, slika 32.
- Nacrtajmo *kružne lukove* omeđene točkama A i B'' na kružnici k_4 ; točkama B'' i C'' na kružnici k_2 ; točkama C'' i D na kružnici k_3 te točkama D i A na kružnici k_1 .
- Nacrtali smo *oval*, slika 33.



Slika 32.



Slika 33.

Primjer 6. *Konstrukcija ovala pomoću četiri kružnice.*

- Konstrukcija je slična konstrukciji ovala iz **Primjera 2**.

- Nacrtajmo dužinu \overline{AB} proizvoljne duljine.
- Dužinu \overline{AB} podijelimo na 5 sukladnih dijelova, a točke redom označimo S_1, S_2, S_3 i S_4 .

- Nacrtajmo kružnice $k_1(S_1, |AS_1|)$, $k_2(S_2, |AS_1|)$, $k_3(S_3, |AS_1|)$, $k_4(S_4, |AS_1|)$.

- Kružnice k_2 i k_3 sijeku se u točkama C i D .

- Nacrtajmo pravac $n = CD$.

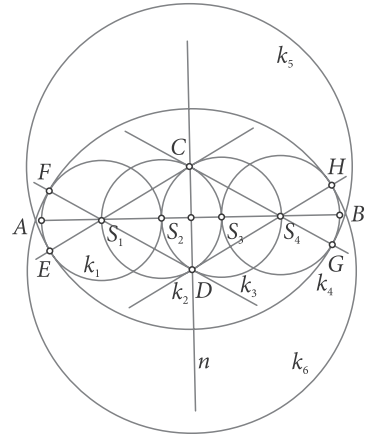
- Nacrtajmo/konstruirajmo pravce CS_1, CS_4, DS_1 i DS_4 .

- Pravac CS_1 siječe kružnicu k_1 u točki E ; pravac CS_4 siječe kružnicu k_4 u točki G , pravac DS_1 siječe kružnicu k_1 u točki F i pravac DS_4 siječe kružnicu k_4 u točki H .

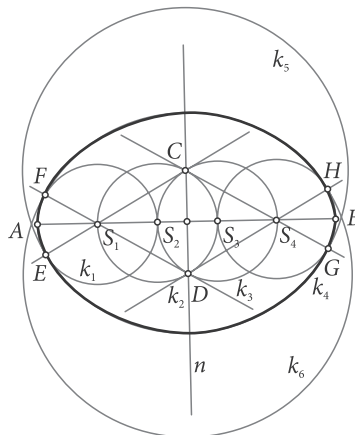
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_5(C, CE)$ i $k_6(D, DF)$, slika 34.

- Nacrtajmo *kružne lukove* omeđene točkama F i E na kružnici k_1 ; točkama E i G na kružnici k_3 ; točkama G i H na kružnici k_4 te točkama H i F na kružnici k_6 .

- Nacrtali smo *oval*, slika 35.



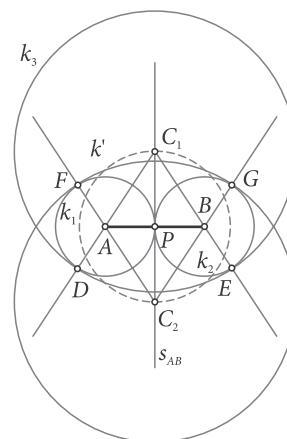
Slika 34.



Slika 35.

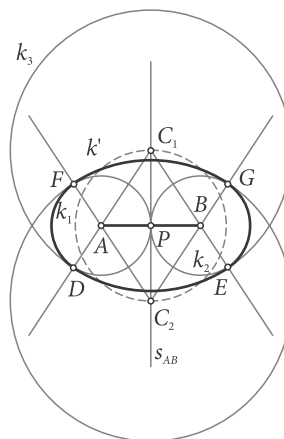
Primjer 7. Konstrukcija ovala pomoću jednakokračnog trokuta.

- Nacrtajmo dužinu \overline{AB} proizvoljne duljine.
- Dužini \overline{AB} konstruiramo simetralu s_{AB} i polovište P .
- Na simetrali odaberemo neku točku C_1 .
- Nacrtamo kružnicu $k'(P, |PC_1|)$.
- Kružnica k' i simetrala s_{AB} sijeku se u točki C_2 .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_1(A, |AP|)$ i $k_2(B, |AP|)$.
- Nacrtajmo/konstruirajmo polupravce $\overline{C_1A}$, $\overline{C_1B}$, $\overline{C_2A}$ i $\overline{C_2B}$.
- Polupravac C_1A siječe kružnicu k_1 u točki D ; polupravac C_1B siječe kružnicu k_2 u točki E ; polupravac C_2A siječe kružnicu k_1 u točki F , a polupravac C_2B siječe kružnicu k_2 u točki G .
- Nacrtajmo/konstruirajmo kružnice $k_3(C_1, |C_1D|)$ i $k_4(C_2, |C_2F|)$, slika 36.



Slika 36.

- Nacrtajmo kružne lukove omeđene točkama F i D na kružnici k_1 ; točkama D i E na kružnici k_3 ; točkama E i G na kružnici k_2 te točkama G i F na kružnici k_4 .
- Nacrtali smo oval, slika 37.



Slika 37.

Nastavak u sljedećem broju