Izvorni članak UDK 510.643.3
Primljeno 15. 1. 2013.

Lovre Grisogono
Hrvatsko logičko udruženje, Ivana Lučića 3, HR–10000 Zagreb
grisogono@phy.hr

Razredi modela vremenske logike

Sažetak

Vrijeme je pojam koji otvara široku paletu pitanja. Vremenu se može pristupiti filozofski, logički, matematički, fizikalno i tako dalje. Ovaj rad prezentira skup novih dekompozicijskih pravila za logičku metodu semantičkog stabla. Na osnovu se različitih aksioma vremena grade modeli modalne vremenske logike s pripadajućim karakterističnim i valjanim formulama. Na kraju se rada provjerava potpunost takvog sustava.

Ključne riječi

vrijeme, temporalna logika, modalna logika, aksiomi, semantičko stablo, dekompozicijska pravila

1. Uvod

Ideja vremena, njegova svojstva te općenito problematika shvaćanja i opisivanja tog fenomena oduvijek su intrigirali. Pitanja povezana uz vrijeme su se postavljala tokom cijele ljudske povijesti. Vrijeme je bilo pitanje osjećaja te se kroz povijest doživljaj vremena mijenjao i razvijao. Neke su kulture imale ciklički kalendar, dok su neke imale točno određen trenutak kraja svijeta, poput Maja.
Danas postoje vremenski pojmovi koji su znanstvene prirode. Planckovo vrijeme predstavlja jedan takav pojam [7]. To je najmanja moguća mjerljiva vremenska jedinica u kojoj se može detektirati promjena te iznosi okvirno 10^{-44} sekundi.
Pojam vremena otvara mogućnost kako filozofskih tako i fizikalnih rasprava. Pitanja o vremenu i logici postavljana su od Aristotela do današnjih dana diljem Planeta. Tako u Hrvatskoj Srećko Kovač obrađuje pitanje logike vremena u metafizičkom kontekstu Ciprinog djela. Kovač to radi gradeći dva modela, prvi kroz propozicijsku logiku, a drugi kroz predikatnu [6].
Ovaj rad koristi neke od aksioma vremena kojima se koristi Kovač, no u čisto mehaničkom smislu izrade dekompozicijskih pravila za semantičko stablo. Tako će se analizirati gustoća vremena, njegove granice i još neki zajednički aksiomi. Svi aksiomi vremena koji se obrađuju u radu su preuzeti iz Burgessova rada 'Basic tense logic' [1].

2. Vremenska logika

Vremenska je logika vrsta modalne logike i razlikujemo propozicijsku i predikatnu vremensku logiku. Propozicijska vremenska logika bila bi ona koja kao svoju osnovu uzima propozicijsku logiku te je nadograđuje sustavom za potrebe analize vremena. Slično vrijedi i za predikatnu vremensku logiku kojoj je osnova logika predikata.

Svrha je vremenske logike izgradnja modela i deduktivnih sustava za upotrebu i razumijevanje različitih mogućih aksiomatizacija vremena. Današnja znanost iziskuje adekvatne sustave, dakle sustave koji su provjerljivi i upotrebljivi, s kojima će raditi. Zadatak izgradnje takvih sustava je na logici.

Osim ove čisto znanstvene svrhe, tu je i potreba za formalizacijom različitih doživljaja vremena. Različita intuitivna vremena mogu se formalizirati pomoću vremenske logike. Formalizacijom intuitivnog vremena pokušava se doći do mogućeg oblika ‘objektivnog vremena’.

Objektivno vrijeme ne predstavlja jedino ispravno i univerzalno vrijeme ili nešto poput toga. Radi se o objektivizaciji osjećaja vremena u formalni sustav kako bi se moglo egzaktno operirati s tim vremenom.

Smisao je ovog rada obraditi aksiome vremena kroz semantičko stablo vremenske propozicijske logike. Izborom različitih aksioma vremena gradit će se razredi modela s posebnim dekompozicijskim pravilima za semantičko stablo te će biti predstavljene pripadajuće karakteristične i valjane formule.

3. Formalizacija vremena

Vrijeme se može formalno opisati aksiomima koji govore o njegovim svojstvima. Vremenski aksiomi su, na primjer, aksiomi asimetrije, irefleksivnosti, tranzitivnosti i tako dalje. Kombiniranjem aksioma se opisuju različita shvaćanja vremena.

Osim samih aksioma potrebna je neka metoda kojom će se rješavati određena vrsta problema. Izabrana metoda jest semantičko stablo koje se koristi i u propozicijskoj logici. Semantičko stablo posjeduje pravila za dekompoziciju koja kazuju kako se stablo rješava. Kroz rad će se semantičkom stablu dodavati nova pravila u skladu s razredom modela o kojem je riječ.

3.1. Intuitivno vrijeme

U različitim prilikama osjećaji drugačije opisuju vrijeme. Osobe u određenim situacijama različito doživljavaju protok vremena. Religije spominju početak vremena, a katkad i njegov kraj.

Vrijeme ne mora uvijek biti shvaćeno linearno, već može biti i cirkularno ili razgranato bilo u prošlost ili budućnost. Pod tim se ne predmnijeva kruženje samog vremena, nego ponavljanje određenih događaja u točnim vremenskim intervalima. Takvo je intuitivno vrijeme karakteristično, na primjer, za hinduiste, a takav je bio i majanski kalendar koji je sadržavao i cikličke krajeve svijeta. Taj je fenomen pogotovo zanimljiv s obzirom na majansko predviđanje kraja svijeta 21. 12. 2012. godine.

Vjerojatno najvažnije intuitivno vrijeme bilo bi ono koje je zasnovano, transkulturalno i transhistorijski, na razumijevanju mogućnosti izbora i djelovanja. Takvo vrijeme bilo bi razgranato, otvoreno u budućnost sa svim mogućnostima djelovanja te zatvoreno u prošlost jer je ona nepromjenjiva. Odabirom djelovanja, staze vremena koje ostaju iza zatvaraju se dok će buduća djelovanja biti raspoređena u mnoštvu grana koje se nalaze ispred.
Kada se kreće od različitih neformaliziranih poimanja intuitivnog vremena ka znanostima, u kojima vrijeme igra važnu ulogu, ne smije se zanemariti povezanost vremena s, na primjer prostorom i masom. Vremenska se logika, kada gradi modele, može konzultirati s onim disciplinama koje će te modele i koristiti ili čiji pojam vremena želi objasniti. Kako su to filozofi, informatičari, fizičari i tako dalje tako se u obzir moraju uzeti razna svojstva vremena. To naravno ne znači izrada po "narudžbi" nego pokušaj formalizacije svakog opisa vremena.

3.2. Logički jezik i modalni operatori $L_{\mathcal{M}}$

U aletičnoj se modalnoj logici oznake $L_{\mathcal{M}}$, koja se smatra osnovom ostalih modalnih logika, polazi od standardnog jezika propozicijske logike $L_{\mathcal{S}}$ kojemu se alfabet nadograđuje modalnim operatorima:

- $\Box$ nužnost
- $\Diamond$ mogućnost

te se tako dobiva $L_{\mathcal{M}}$.
Formule $L_{\mathcal{M}}$ se definiraju na sljedeći način:

Definicija 3.1 (Formula $L_{\mathcal{M}}$) *Formula $L_{\mathcal{M}}$ se definira jednako kao formula $L_{\mathcal{S}}$ uz nadopunu:*

- *Ako je ϕ formula, onda su $\Box\phi$ i $\Diamond\phi$ formule $L_{\mathcal{M}}$,*
- *te je sve formula $L_{\mathcal{M}}$ ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka gore navedenih uvjeta.*

Vremenska propozicijska logika nadograđuje $L_{\mathcal{M}}$ novim modalnim operatorima te se dobiva $L_{\mathcal{T}}$.

3.3. Logički jezik i modalni operatori $L_{\mathcal{T}}$

U aletičnoj se logici susrećemo s dva operatora, nužnost '$\Box$' i mogućnost '$\Diamond$'. Vremenska logika traži četiri modalna operatora [3]:

- jaka budućnost (G) – uvijek će biti $[f]$
- jaka prošlost (H) – uvijek je bilo $[p]$
- slaba budućnost (F) – barem jednom će biti $\langle f\rangle$
- slaba prošlost (P) – barem jednom je bilo $\langle p\rangle$

Od dvaju se aletičnih operatora dobiva četiri vremenska, dva za budućnost i dva za prošlost. Ukoliko se radi o modalnom operatoru budućnosti, definicija kaže da se odnosi na trenutke koji su poslije onog u kojem se operator nalazi. Za modalnu oznaku prošlosti vrijedi obratno – ona je definirana za ranije trenutke. Nadalje, potrebna je definicija formula $L_{\mathcal{M}}$.

Definicija 3.2 (Formula $L_{\mathcal{T}}$) *Formula $L_{\mathcal{T}}$ se definira jednako kao formula $L_{\mathcal{M}}$ uz nadopunu:*

- *Ako je ϕ formula, onda su*
  - $[f]\phi$,
  - $[p]\phi$,
  - $\langle f\rangle\phi$,
  - $\langle p\rangle\phi$,

  formule $L_{\mathcal{T}}$,
- *te je sve formula $L_{\mathcal{T}}$ ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka gore navedenih uvjeta.*

Nužnost i mogućnost $L_{\mathcal{M}}$ se mogu shvatiti unutar $L_{\mathcal{T}}$ kao [3]:

- $\Box\phi \equiv [f]\,\phi \wedge \phi \wedge [p]\,\phi$
- $\Diamond\phi \equiv \langle f\rangle\,\phi \vee \phi \vee \langle p\rangle\,\phi$

Kada bi trebalo reći za formulu ϕ da vrijedi vremenski univerzalno nužno, tada bi to značilo da je bila, bit će i sada jest istinita te bi se napisalo $\Box\phi$. Za vremenski univerzalno moguću formulu ϕ pišemo $\Diamond\phi$ ukoliko je bila, ili će biti, ili jest sada istinita.

3.4. Model $\mathfrak{M}$ vremenske logike $L_{\mathcal{T}}$

Modele se može razlikovati prema svojstvima relacija dostupnosti, na primjer, asimetriji ili irefleksivnosti. Kratica za razred modela jest oznaka svojstva relacije. Modeli, na primjer, za asimetriju i irefleksivnost bi nosili oznake $\mathfrak{M}^A$ i $\mathfrak{M}^I$.

Razred modela može se definirati kao skup svih onih i samo onih modela s istim svojstvom relacije. Model $\mathfrak{M}$ za vremensku logiku je neprazna uređena trojka te ga se formalno definira na sljedeći način:

Definicija 3.3 (Model $\mathfrak{M}$ za $L_{\mathcal{T}}$) *Model $\mathfrak{M}$ za $L_{\mathcal{T}}$ neprazna je uređena trojka takva da $\mathfrak{M} = \langle S, \prec, I\rangle$ tako da je S skup svih trenutaka (svjetova), $\prec$ je relacija dostupnosti među trenucima i I funkcija interpetacije propozicijskih varijabli po trenucima. Za navedene elemente modela vrijedi:*

- $S \neq \emptyset$,
- $\prec \subseteq S \times S$,
- $I : \{P_i | i \in \mathbb{N}\} \times S \longrightarrow \{0, 1\}$

Definicija 3.4 (Modalni operatori vremenske logike)

$t \models [f]\phi$ *akko* $\forall x(t \prec x \rightarrow x \models \phi)$

$t \models [p]\phi$ *akko* $\forall x(x \prec t \rightarrow x \models \phi)$

$t \models \langle f\rangle\phi$ *akko* $\exists x(t \prec x \wedge x \models \phi)$

$t \models \langle p\rangle\phi$ *akko* $\exists x(x \prec t \wedge x \models \phi)$

Oznaka '$t \models [p]\phi$' te slično i za ostale formule, znači da je formula $[p]\phi$ istinita u trenutku t ako i samo ako za svaki trenutak x kojemu je t prethodnik ('$t \prec x$' se čita kao 't je prije od x') u x je istinita formula ϕ.
Važno je napomenuti da bez obzira što se načelno u radu govori o modelima, stanja stvari u pojedinim vremenskim trenutcima su bez ikakvog utjecaja na cjelokupnu strukturu, odnosno interpretacija propozicijskih varijabli ne igra nikakvu ulogu s obzirom na prezentirane formule i semantička stabla.

3.5. Modalno stablo i oznake

Semantičko je stablo jedna od metoda provjere semantičkih karakteristika formula poput valjanosti i zadovoljivosti. S obzirom na to da se ovaj rad bavi tipom modalne logike, klasično stablo neće biti dovoljno. Nadograđeno semantičko stablo za potrebe vremenske logike nazivat će se modalno stablo i razlikovat će se od semantičkog stabla po posjedovanju jednog stupca više [4].
Izvorno semantičko stablo sadrži stupac za označavanje rednog broja redaka, stupac za formule i njihovu dekompoziciju te stupac u kojemu se evidentira, to jest opravdava, porijeklo formule na kojoj se radi. U stupcu za opravdanje se navodi redni broj retka formule iz kojeg je nastala nova formula i oznaka dekompozicijskog pravila kojim je dobivena. Grafički to izgleda ovako:

redni broj retka	formula	opravdanje
i	ϕ	r/d
j	ϕ'	r'/d'
k	ϕ''	r''/d''
l	ϕ'''	r'''/d'''

Prva formula se unosi u prvi redak, a ako ima još inicijalnih formuli one se nanižu te označe rednim brojem retka u kojem se nalaze. Nakon toga se primjenjuju dekompozicijska pravila i svaka se nova formula upisuje u svoj redak s pripadajućim rednim brojem i opravdanjem.
Modalna stabla, osim stupaca za redak, formulu i opravdanje dekompozicije, imaju stupac s oznakom. Sve formule u modalnom stablu imaju pripadajuću oznaku, te takve formule nazivamo 'označene formule'. Iz oznake se iščitava put kroz sve trenutke koji su se koristili u stablu do trenutka u kojem se sada formula nalazi i relaciju kojom se došlo u taj trenutak. Oznake se bilježe malim grčkim slovima, na primjer σ i τ.

Napomena 3.1 (Upotreba znaka u stablu) *U stablu će se koristiti mala latinična slova za označavanje trenutaka koji sačinjavaju oznake.*

redni broj retka	**oznaka**	formula	opravdanje
i	$\sigma_i = \langle x \rangle$	ϕ	r/d
j	$\sigma_j = \langle x.y \rangle$	ϕ'	r'/d'
k	$\sigma_k = \langle x.y.w \rangle$	ϕ''	r''/d''
l	$\tau = \langle x.y.w.z \rangle$	ϕ'''	r'''/d'''

Definicija 3.5 (Oznaka) *Oznaka σ formule ϕ je uređena n-torka svih trenutaka $n, \ldots, n_n$ tako da je formula ϕ istinita u σ.*

Jako je važno naglasiti da je σ uređena n-torka s obzirom na mogućnost da će se neki trenuci ponavljati unutar oznake kako se bude kretalo kroz vrijeme.
U gornjoj se tablici nalaze četiri formule te svaka ima svoju oznaku. Redom su to $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$ i τ. Uvođenjem novog trenutka nastaje nova oznaka pa, na primjer, uvođenjem trenutka 'w' oznaka 'σ_j' je u idućem retku proširena u oznaku 'σ_k'. Alternativni način zapisa, na primjer, oznake τ, bio bi $\tau = \sigma_k.z$. Točka u ovoj notaciji predstavlja proširenje n-torke na $n+1$-torku čime nastaje nova oznaka. Uvođenje nove oznake znači upravo ovaj proces proširenja postojeće oznake idućim trenutkom. Ovakva će se notacija koristiti u radu pri rješavanju stabala.
Ako za oznaku τ vrijedi $\tau = \sigma.n$, što bi značilo da je nadograđena samo s jednim novim trenutkom, onda se kaže da je τ jednostavna ekstenzija σ, no ako vrijedi $\tau = \sigma.n.n_1.n_2...n_i$ onda se za τ kaže da je ekstenzija σ. Duljina σ, to jest njena n-tornost, jest ukupan zbroj točaka '.' povećan za jedan i bilježi se $|\sigma|$. Skup svih oznaka se bilježi Γ^σ.
Na dalje, '$\sigma :: \phi$', dakle sve zajedno '*oznaka::formula*', jest označena formula u kojoj je 'σ' oznaka i 'ϕ' formula. Kontradikciju se u modalnom stablu dobiva između označene formule i negacije označene formule, dakle $\sigma :: \phi$ i $\sigma :: \neg\phi$ jest kontradikcija. Skup označenih formula se bilježi Γ^Σ. Ako se želi izdvojiti oznake nekog skupa označenih formula izgradit će se skup $l(\Gamma^\Sigma) = \{\sigma | \sigma :: \phi \in \Gamma^\Sigma\}$.

3.6. Dekompozicijska pravila

Uz standardna α i β dekompozicijska pravila stabla za propozicijsku logiku, u modalnoj se logici radi s $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$ pravilima [2]. Oznake ν i π predstavljaju tipove modalnih formula s obzirom na glavni modalni operator i negaciju operatora ukoliko je ima. Formule tipa:

- $\Box\phi$,
- $\neg\Diamond\phi \equiv \Box\neg\phi$

nazivaju se 'ν', a

- $\Diamond\phi$,
- $\neg\Box\phi \equiv \Diamond\neg\phi$

nazivaju se 'π' formulama. Upravo u odnosu na tip formule, nazivaju se dekompozicijska pravila, kada se radi o formuli tipa ν pravilo $\boldsymbol{\nu}$ će biti primijenjeno te će se za formule tipa π dekompozicija vršiti $\boldsymbol{\pi}$ pravilom.

Pravilo $\boldsymbol{\nu}$:

$$\frac{\sigma :: \Box\phi}{\sigma.\tau :: \phi}$$

gdje je τ bilo koji trenutak.

Pravilo $\boldsymbol{\pi}$:

$$\frac{\sigma :: \Diamond\phi}{\sigma.\tau :: \phi}$$

gdje je τ novi trenutak.

Napomena 3.2 (Dekompozirane formule) *Formule dobivene nakon dekompozicije će se u poglavlju 5 o potpunosti označavati, ukoliko su nastale primjenom pravila $\boldsymbol{\nu}$, s oznakom 'ν_0' te ukoliko su nastale primjenom pravila $\boldsymbol{\pi}$ s oznakom 'π_0'.*

Smisao je uvjeta uz pravilo $\boldsymbol{\nu}$ da se ν može zapisati za svaki već uvedeni trentak i za svaki trenutak koji se može izvesti iz postojećih. Naspram toga, pravilo $\boldsymbol{\pi}$ iziskuje uvođenje novog trenutka da bi se u tom novom trenutku zabilježio π. Povodom toga se $\boldsymbol{\pi}$ pravilo naziva i '*successor creator*' [4].

Napomena 3.3 (Primjena $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$ pravila u vremenskoj logici) *Pri primjeni $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$ pravila treba se obratiti pozornost na to radi li se o modalnim operatorima prošlosti ili budućnosti. Ako je u pitanju operator budućnosti, formula ν će se razgraditi u svim postojećim oznakama koje su sljedbenici inicijalne oznake te obratno za operator prošlosti. Ukoliko se radi o formuli π, otvorit će se nova oznaka sljedbenik inicijalne oznake za budućnost, odnosno oznaka prethodnik za prošlost.*

Ova dva pravila podsjećaju na pravila za dekompoziciju kvantifikatora. Univerzalni kvantifikator uzima sve postojeće konstante, dok egzistencijalni iziskuje uvođenje nove.
Odnos se oznaka σ i τ bilježi $\sigma \triangleright \tau$ što znači da je τ dostupan iz σ prema pravilima i nadopunama dostupnosti za oznake u različitim razredima modela.
Ako se radi na modelu bez posebno naznačenog svojstva relacije, smiju se otvarati dostupnosti samo prema pravilima $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$. Dekompozicijska se pravila stabla prilagođavaju svojstvima razreda modela koja se ispituju.

3.7. Proširenje oznaka

Kao što je ranije rečeno, oznake sadrži znak točke. Zbog preglednosti, u primjeni oznaka uvode se dotatni znakovi '$\overset{+}{.}$' i '$\overset{-}{.}$', koji predstavljaju proširenje već postojećeg znaka. Svrha novouvedenih znakova jest izravan uvid u smjer kretanja, to jest odnos prije/poslije trenutaka.
U tom se svjetlu, dekompozicijska pravila $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$ mogu iskazati na sljedeći način s obzirom na relaciju prije/poslije:

$$\frac{\sigma :: [f]\phi}{\sigma\overset{+}{.}\tau :: \phi}, \frac{\sigma :: [p]\phi}{\sigma\overset{-}{.}\tau :: \phi},$$

$$\frac{\sigma :: \langle f \rangle \phi}{\sigma \dot{+} \tau :: \phi}, \frac{\sigma :: \langle p \rangle \phi}{\sigma . \tau :: \phi},$$

naravno, uz napomenu da za π formule, gore zapisane kao '$\langle f \rangle \phi$' i '$\langle p \rangle \phi$', oznaka τ mora biti nova.

4. Svojstva relacija, formule i stabla

Kroz ovaj se rad analizira određeni broj razreda modela karakterističnih za vremensku logiku, poput asimetrije, tranzitivnosti, refleksivnosti, irefleksivnosti i tako dalje. Uz njih se prikazuju pripadajuća svojstva relacija, karakteristične i valjane formule. Valjane su formule modela $\mathfrak{M}$ formule istinite u svakom trenutku odabranog modela $\mathfrak{M}$. Karakteristične (valjane) formule modela $\mathfrak{M}$ su formule valjane u svim i jedino u takvim strukturama koje su opisane modelom $\mathfrak{M}$.

Veća se pažnja posvećuje razredima modela koji se ne obrađuju u aletičnoj logici. Dokazivanjem valjanosti karakterističnih i valjanih formula i komentarima o specifičnostima razreda modela zaokružuje se jedna cjelina kao osnova vremenske logike. Karakteristične i valjane formule za modele $\mathfrak{M}$ dokazuju se primjenom $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$ pravila dekompozicije te onog što dopuštaju svojstva tog modela te ništa više.

Napomena 4.1 *Simboli 'x', 'y' i 'w' koji se javljaju u svojstvima razreda modela predstavljaju varijable za oznake.*

4.1. Najmanja vremenska logika

Najmanja je vremenska logika bez specifičnih svojstava relacija, to jest $\prec$ sadrži samo one uređene parove koji zadovoljavaju $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$ pravila. Pravila dekompozicije su osnovna $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$ te su izložena u poglavlju 3.6. Valjane formule **K** vrijede na svim razredima modela pa tako i za najmanju vremensku logiku te su prikazane u propoziciji 4.1 u odjeljku o asimetriji.

4.2. Asimetrija

Asimetrija onemogućuje bilo kakve povratne relacije poput situacije da ako smo iz trenutka x došli u trenutak y da se možemo iz trenutka y vratiti u trenutak x [1]. Asimetrija ne posjeduje neku sebi karakterističnu formulu tako da se tu iznose univerzalno valjane **K** formule i zrcalne slike. Oznaka je vremenske logike sa svojstvom asimetrije '$L_{\mathcal{TA}}$', a razreda modela '$\mathfrak{M}^A$'.

Propozicija 4.1 ($L_{\mathcal{TA}}$)
Svojstva razreda modela:

1. $\forall x \forall y \neg (x \prec y \land y \prec x)$

*Univerzalno valjane **K** formule:*

1. $\models [f]\,(\phi \to \psi) \to ([f]\,\phi \to [f]\,\psi)$
2. $\models [p]\,(\phi \to \psi) \to ([p]\,\phi \to [p]\,\psi)$

3. $\models \phi \to [f] \langle p \rangle \phi$

4. $\models \phi \to [p] \langle f \rangle \phi$

Nadopuna pravila za oznake:
Dekompozicija se vrši po nepromijenjenim pravilima $\boldsymbol{\nu}$ *i* $\boldsymbol{\pi}$.

3. $\phi \to [f] \langle p \rangle \phi$			
1	t	$\neg(\phi \to [f] \langle p \rangle \phi)\checkmark$	
2	t	ϕ	$1\neg \to$
3	t	$\neg [f] \langle p \rangle \phi\checkmark$	$1\neg \to$
4	$t\overset{+}{.}u$	$\neg \langle p \rangle \phi^{t\checkmark}$	$3\neg [f]$
5	$t\overset{+}{.}u\overset{-}{.}t$	$\neg\phi$	$4\neg \langle p \rangle$
		$\times$	

4. $\phi \to [p] \langle f \rangle \phi$			
1	t	$\neg(\phi \to [p] \langle f \rangle \phi)\checkmark$	
2	t	ϕ	$1\neg \to$
3	t	$\neg [p] \langle f \rangle \phi\checkmark$	$1\neg \to$
4	$t\overset{-}{.}s$	$\neg \langle f \rangle \phi^{t\checkmark}$	$3\neg [p]$
5	$t\overset{-}{.}s\overset{+}{.}t$	$\neg\phi$	$4\neg \langle f \rangle$
		$\times$	

Napomena 4.2 (Antisimetrija) *Akisom antisimetrije jest:*

- $\forall x \forall y((x \prec y \land y \prec x) \to x = y)$

Ovaj aksiom otvarajući mogućnost $x \prec y$ *i* $y \prec x$ *ne isključuje refleksivnost.*

Napomena 4.3 (Refleksivnost) *U slučaju refleksivnosti nadopuna pravila za oznake jest:*

$$\frac{\sigma.t}{\sigma.t.t}$$

4.3. Tranzitivnost

Tranzitivnost određuje dostupnosti više trenutaka u odnosu na njihov redoslijed [1]. Prethodni trenuci (x ili y) imaju svoje sljedbenike (y ili w), što povezuje prethodnike prethodnika sa sljedbenicima sljedbenika (x prema w). Tranzitivnost je poznata iz aletične logike i formula **4** je valjana u ovom razredu modela. Jedina je promjena u tome što sada postoje dvije formule **4**, jedna za budućnost i jedna za prošlost. Oznaka je vremenske logike sa svojstvom tranzitivnosti '$L_{\mathcal{TT}}$', a razreda modela '$\mathfrak{M}^T$'.

Propozicija 4.2 ($L_{\mathcal{TT}}$)
Svojstva razreda modela:

1. $\forall x \forall y \forall w((x \prec y \land y \prec w) \to x \prec w)$

Karakteristične valjane formule:

1. $\models_{\mathfrak{M}^T} [f]\,\phi \to [f]\,[f]\,\phi$
2. $\models_{\mathfrak{M}^T} [p]\,\phi \to [p]\,[p]\,\phi$

Nadopuna pravila za oznake:

$$\frac{\sigma.t.u \qquad \sigma.u.v}{\sigma.t.v}$$

4.4. Usporedivost

Nakon što je definiran redoslijed i dostupnost, usporedivost prikazuje odnose trenutaka među njima samima [1]. t i t' su ili jednaki ili jedan slijedi/prethodi drugome. Usporedivost niže trenutke po redoslijedu. Ako postoji trenutak t i zna se da njemu slijede trenuci u i z postavlja se pitanje odnosa trenutaka u i z. Tri su mogućnosti:

- $u \prec z$
- $u = z$
- $z \prec u$

Oznaka je vremenske logike sa svojstvom usporedivosti '$L_{\mathcal{TU}}$', a razreda modela '$\mathfrak{M}^U$'.

Propozicija 4.3 ($L_{\mathcal{TU}}$)
Svojstva razreda modela:

1. $\forall x \forall y (x \prec y \lor x = y \lor y \prec x)$

Karakteristične valjane formule:

1. $\models_{\mathfrak{M}^U} (\langle f\rangle\,\phi \land \langle f\rangle\,\psi) \to (\langle f\rangle\,(\phi \land \langle f\rangle\,\psi) \lor \langle f\rangle\,(\phi \land \psi) \lor \langle f\rangle\,(\langle f\rangle\,\phi \land \psi))$
2. $\models_{\mathfrak{M}^U} (\langle p\rangle\,\phi \land \langle p\rangle\,\psi) \to (\langle p\rangle\,(\phi \land \langle p\rangle\,\psi) \lor \langle p\rangle\,(\phi \land \psi) \lor \langle p\rangle\,(\langle p\rangle\,\phi \land \psi))$

Nadopuna pravila za oznake:

$$\frac{\begin{array}{c}\sigma.u\\ \sigma.z\end{array}}{\sigma.u.z \;\big|\; \sigma.u = \sigma.z \;\big|\; \sigma.z.u}$$

Napomena 4.4 *Uz pretpostavku da nigdje ranije nije definirano σ.u.z, σ.z.u ili σ.u. = σ.z.*

1. $((\langle f\rangle\phi \wedge \langle f\rangle\psi) \to (\langle f\rangle(\phi \wedge \langle f\rangle\psi) \vee \langle f\rangle(\phi \wedge \psi) \vee \langle f\rangle(\langle f\rangle\phi \wedge \psi))$			
1	t	$\neg((\langle f\rangle\phi \wedge \langle f\rangle\psi) \to (\langle f\rangle(\phi \wedge \langle f\rangle\psi) \vee \langle f\rangle(\phi \wedge \psi) \vee \langle f\rangle(\langle f\rangle\phi \wedge \psi)))\checkmark$	
2	t	$\langle f\rangle\phi \wedge \langle f\rangle\psi\checkmark$	$1\neg\to$
3	t	$\neg(\langle f\rangle(\phi \wedge \langle f\rangle\psi) \vee \langle f\rangle(\phi \wedge \psi) \vee \langle f\rangle(\langle f\rangle\phi \wedge \psi))\checkmark$	$1\neg\to$
4	t	$\neg\langle f\rangle(\phi \wedge \langle f\rangle\psi)^{u,z\checkmark}$	$3\neg\vee$
5	t	$\neg\langle f\rangle(\phi \wedge \psi)^{u\checkmark}$	$3\neg\vee$
6	t	$\neg\langle f\rangle(\langle f\rangle\phi \wedge \psi)^{u\checkmark}$	$3\neg\vee$
7	t	$\langle f\rangle\phi\checkmark$	$2\wedge$
8	t	$\langle f\rangle\psi\checkmark$	$2\wedge$
9	$t\dotplus u$	ψ	$8\,\langle f\rangle$
10	$t\dotplus u$	$\neg(\phi \wedge \langle f\rangle\psi)\checkmark$	$4\neg\langle f\rangle$
11	$t\dotplus u$	$\neg(\phi \wedge \psi)\checkmark$	$5\neg\langle f\rangle$
12	$t\dotplus u$	$\neg(\langle f\rangle\phi \wedge \psi)\checkmark$	$6\neg\langle f\rangle$
		/ \	
13	$t\dotplus u$	$\neg\phi \qquad \neg\psi$	$11\neg\vee$
		/ \ $\quad\times$	
14	$t\dotplus u$	$\neg\langle f\rangle\phi^{z\checkmark} \qquad \neg\psi$	$12\neg\wedge$
		/ \ $\quad\times$	
15	$t\dotplus u$	$\neg\phi \qquad \neg\langle f\rangle\psi$	$10\neg\wedge$
16	$t\dotplus z$	$\phi \qquad \phi$	$7\,\langle f\rangle$

$z \prec u$				
16	$t\dotplus z$	ϕ	ϕ	$7\,\langle f\rangle$
17	$t\dotplus z$	$\neg(\phi \wedge \langle f\rangle\psi)\checkmark$	$\neg(\phi \wedge \langle f\rangle\psi)\checkmark$	$4\neg\langle f\rangle$
		/ \	/ \	
18	$t\dotplus z$	$\neg\phi \qquad \neg\langle f\rangle\psi^{u\checkmark}$	$\neg\phi \qquad \neg\langle f\rangle\psi^{u\checkmark}$	$17\neg\wedge$
19	$t\dotplus z\dotplus u$	$\times \qquad \psi$	$\times \qquad \psi$	$18\neg\langle f\rangle$
		$\qquad\times$	$\qquad\times$	

$u \prec z$				
16	$t\dotplus z$	ϕ	ϕ	$7\,\langle f\rangle$
17	$u\dotplus z$	$\neg\phi$	$\neg\phi$	$14\neg\langle f\rangle$
		$\times$	$\times$	

$u = z$				
13	$t\overset{+}{.}u$	$\neg\phi$		$11\neg\wedge$
		$\vdots$		
16	$t\overset{+}{.}z$	ϕ	ϕ	$7\,\langle f\rangle$
17	$t\overset{+}{.}u = t\overset{+}{.}z$	$\neg\phi$	$\neg\phi$	$13\,=$
		$\times$	$\times$	

4.5. Irefleksivnost

Nijedan t ne može prethoditi samome sebi i to je smisao irefleksivnosti [1]. Ako se za t kaže ‘sada’ onda se shvaća da iz ‘sada’ ne možemo mijenjati i utjecati na taj ‘sada’. Za ovaj razred modela ne postoje karakteristične formule. Intuitivno vrijeme ima jak uvjet irefleksivnosti. Oznaka je vremenske logike sa svojstvom irefleksivnosti ‘$L_{\mathcal{TI}}$’, a razreda modela ‘$\mathfrak{M}^{I}$’.

Propozicija 4.4 ($L_{\mathcal{TI}}$)
Svojstva razreda modela:

1. $\forall x \neg(x \prec x)$

4.6. Strogi linearni poredak (uređaj)

Intuitivno se vrijeme često doživljava kao linearno, skalarno i nezaustavljajuće. Potrebne su propozicije 4.2, 4.3 i 4.4 da bi se u logičkim okvirima opisao takav doživljaj vremena, to jest da bi ga se formaliziralo [3].

4.7. Maksimum/minimum

Minimum i maksimum predstavljaju relativne trenutke početka i kraja vremena [1]. Ima jedan trenutak koji je poslije ili istovremen svim ostalim, te ga se naziva maksimum. Također postoji jedan trenutak koji je prije ili istovremen svim ostalim trenucima. Takav se trenutak naziva minimum. Oznaka je vremenske logike sa svojstvom maksimum/minimum ‘$L_{\mathcal{TM/M}}$’, a razreda modela ‘$\mathfrak{M}^{M/M}$’.

Propozicija 4.5 ($L_{\mathcal{TM/M}}$)
Svojstva razreda modela:

1. $\exists x \forall y (y \prec x \vee y = x)$ *maksimum*
2. $\exists x \forall y (x \prec y \vee x = y)$ *minimum*

Valjane formule:

1. $\models_{\mathfrak{M}^{M/M}} [f] \perp \vee \langle f\rangle [f] \perp$
2. $\models_{\mathfrak{M}^{M/M}} [p] \perp \vee \langle p\rangle [p] \perp$

Nadopuna pravila za oznake:
Ako se radnja odvija u nekom trenutku ω takvom da $\forall x(\omega \prec x \vee \omega = x)$, ukoliko se radi o minimumu, onda se stablo zatvara jer ne postoji ω' za koji vrijedi da $\omega' \prec \omega$. Za maksimum vrijedi obratno, u nekom trenutku ω takvom da $\forall x(x \prec \omega \vee \omega = x)$ stablo se zatvara jer ne postoji takav ω' za koji vrijedi $\omega \prec \omega'$. Formalno zapisano:

$$\forall t \, \frac{}{\neg\exists\sigma, \sigma = \omega \dot{+} t}, \; \forall t \, \frac{}{\neg\exists\sigma, \sigma = \omega \dot{-} t}$$

gdje je prva nadopuna za maksimum te druga za minimum.

1. $[f] \perp \vee \langle f\rangle [f] \perp$			
1	t	$\neg([f] \perp \vee \langle f\rangle [f] \perp)\checkmark$	
2	t	$\neg [f] \perp \checkmark$	$1\neg\vee$
3	t	$\neg \langle f\rangle [f] \perp^{\omega\checkmark}$	$1\neg\vee$
4	$t\dot{+}\omega$	$\neg \perp$	$2\neg [f]$
5	$t\dot{+}\omega$	$\neg [f] \perp$	$3\neg \langle f\rangle$
		$\times$	
ne postoji ω'			

2. $[p] \perp \vee \langle p\rangle [p] \perp$			
1	t	$\neg([p] \perp \vee \langle p\rangle [p] \perp)\checkmark$	
2	t	$\neg [p] \perp \checkmark$	$1\neg\vee$
3	t	$\neg \langle p\rangle [p] \perp^{\omega\checkmark}$	$1\neg\vee$
4	$t\dot{-}\omega$	$\neg \perp$	$2\neg [p]$
5	$t\dot{-}\omega$	$\neg [p] \perp$	$3\neg \langle p\rangle$
		$\times$	
ne postoji ω'			

Napomena 4.5 *Moguće je $t = \omega$, čime stablo zadovoljava jednočlanu domenu, to jest model sa samo jednim trenutkom.*

4.8. Serijalnost

Serijalnost se susreće u aletičnoj logici. Ona naprosto kazuje da za svaki trenutak postoji barem jedan dostupan trenutak. Važno je napomenuti da se ovdje razlikuju dva smjera dostupnosti, jedan za budućnost i jedan za prošlost [1]. Karakteristična je formula **D** koja ima dvije varijante. Oznaka je vremenske logike sa svojstvom serijalnosti '$L_{\mathcal{TS}}$', a razreda modela '$\mathfrak{M}^S$'.

Propozicija 4.6 ($L_{\mathcal{TS}}$)
Svojstva razreda modela:

1. $\forall x \exists y(x \prec y)$ *serijalnost budućnosti*

2. $\forall x \exists y(y \prec x)$ *serijalnost prošlosti*

Valjane formule:

1. $\models_{\mathfrak{M}^S} [f]\,\phi \rightarrow \langle f\rangle\,\phi$
2. $\models_{\mathfrak{M}^S} [p]\,\phi \rightarrow \langle p\rangle\,\phi$

Nadopuna pravila za oznake:

$$\frac{\sigma}{\sigma.t}$$

4.9. Gustoća vremena

Između svaka dva trenutka postoji barem još jedan trenutak. Gustoća vremena dopušta da se između dva 'susjedna' trenutka ubaci proizvoljna količina trenutaka, na primjer, upravo koliko je potrebno u svrhu rješavanja semantičkog stabla ili nekog drugog problema [1]. Oznaka je vremenske logike sa svojstvom gustoće vremena '$L_{\mathcal{TG}}$', a razreda modela '$\mathfrak{M}^G$'.

Propozicija 4.7 ($L_{\mathcal{TG}}$)
Svojstva razreda modela:

1. $\forall x \forall y (x \prec y \rightarrow \exists w (x \prec w \wedge w \prec y))$

Karakteristične valjane formule:

1. $\models_{\mathfrak{M}^G} \langle f\rangle\,\phi \rightarrow \langle f\rangle\,\langle f\rangle\,\phi$
2. $\models_{\mathfrak{M}^G} \langle p\rangle\,\phi \rightarrow \langle p\rangle\,\langle p\rangle\,\phi$

Nadopuna pravila za oznake:

$$\frac{\sigma.z}{\sigma.v.z}$$

U $\mathfrak{M}^G$ se koristi nadopuna iz propozicije 4.6.

1. $\langle f\rangle\,\phi \rightarrow \langle f\rangle\,\langle f\rangle\,\phi$			
1	t	$\neg(\langle f\rangle\,\phi \rightarrow \langle f\rangle\,\langle f\rangle\,\phi)\checkmark$	
2	t	$\langle f\rangle\,\phi\checkmark$	$1\neg\rightarrow$
3	t	$\neg\langle f\rangle\,\langle f\rangle\,\phi^{v\checkmark}$	$1\neg\rightarrow$
4	$t\dagger z$	ϕ	$2\,\langle f\rangle$
5	$t\dagger v$	$\neg\langle f\rangle\,\phi^{z\checkmark}$	$3\neg\langle f\rangle$
6	$t\dagger v\dagger z$	$\neg\phi$	$5\neg\langle f\rangle$
		$\times$	

1. $\langle p\rangle\,\phi \to \langle p\rangle\,\langle p\rangle\,\phi$			
1	t	$\neg(\langle p\rangle\,\phi \to \langle p\rangle\,\langle p\rangle\,\phi)\checkmark$	
2	t	$\langle p\rangle\,\phi\checkmark$	$1\neg\to$
3	t	$\neg\,\langle p\rangle\,\langle p\rangle\,\phi^{s\checkmark}$	$1\neg\to$
4	$t\overset{-}{.}a$	ϕ	$2\,\langle p\rangle$
5	$t\overset{-}{.}s$	$\neg\,\langle p\rangle\,\phi^{a\checkmark}$	$3\neg\,\langle p\rangle$
6	$t\overset{-}{.}s\overset{-}{.}a$	$\neg\phi$	$5\neg\,\langle p\rangle$
		$\times$	

4.10. Diskretno vrijeme

Intuitivno se vrijeme može doživljavati kao diskretno ili gusto. Diskretno je ono koje je djeljivo točno na t i t' tako da nema trenutka t'' za kojeg vrijedi $t \prec t'' \prec t'$ [1]. Od situacije se do situacije koristi jedna od dvije mogućnosti. Dinamika, kinematika, logički stroj i tako dalje primjeri su upotrebe diskretnog vremena. 'Pretrčao je stazu za 2/3 vremena koje mu je bilo potrebno da istu stazu pretrči prošli put.' jest primjer upotrebe gustog vremena. Oznaka je vremenske logike sa svojstvom diskretnosti '$L_{\mathcal{TD}}$', a razreda modela '$\mathfrak{M}^D$'.

Propozicija 4.8 ($L_{\mathcal{TD}}$)
Svojstva razreda modela:

1. $\forall x \exists y(x \prec y \wedge \neg\exists w(x \prec w \wedge w \prec y))$ *sljedbenik*
2. $\forall x \exists y(y \prec x \wedge \neg\exists w(y \prec w \wedge w \prec x))$ *predhodnik*

Karakteristične valjane formule:

1. $\models_{\mathfrak{M}^D} (\phi \wedge [p]\,\phi) \to \langle f\rangle\,[p]\,\phi$
2. $\models_{\mathfrak{M}^D} (\phi \wedge [f]\,\phi) \to \langle p\rangle\,[f]\,\phi$

Nadopuna pravila za oznake:
U $\mathfrak{M}^D$ se koristi nadopuna iz propozicije 4.6.

1. $(\phi \wedge [p]\,\phi) \to \langle f\rangle\,[p]\,\phi$			
1	t	$\neg((\phi \wedge [p]\,\phi) \to \langle f\rangle\,[p]\,\phi)\checkmark$	
2	t	$\phi \wedge [p]\,\phi$	$1\neg\to\checkmark$
3	t	$\neg\,\langle f\rangle\,[p]\,\phi^{u\checkmark}$	$1\neg\to$
4	t	ϕ	$2\wedge$
5	t	$[p]\,\phi^{s\checkmark}$	$2\wedge$
6	$t\overset{+}{.}u$	$\neg\,[p]\,\phi\checkmark$	$3\neg\,\langle f\rangle$
7	$t\overset{+}{.}u\overset{-}{.}s$	$\neg\phi$	$6\neg\,[p]$
8	$t\overset{-}{.}s$	ϕ	$5\,[p]$
		$\times$	

2. $(\phi \wedge [f]\,\phi) \to \langle p \rangle\,[f]\,\phi$			
1	t	$\neg((\phi \wedge [f]\,\phi) \to \langle p \rangle\,[f]\,\phi)\checkmark$	
2	t	$\phi \wedge [f]\,\phi$	$1\neg \to \checkmark$
3	t	$\neg\,\langle p \rangle\,[f]\,\phi^{s\checkmark}$	$1\neg \to$
4	t	ϕ	$2\wedge$
5	t	$[f]\,\phi^{u\checkmark}$	$2\wedge$
6	$t\underset{\cdot}{-}s$	$\neg\,[f]\,\phi\checkmark$	$3\neg\,\langle p \rangle$
7	$t.\underset{\cdot}{-}s\underset{\cdot}{+}u$	$\neg\phi$	$6\neg\,[f]$
8	$t\underset{\cdot}{+}u$	ϕ	$5\,[f]$
		$\times$	

4.11. Granice vremena

Za sve trenutke t vrijedi da su poslije/prije barem jednog trenutka i za sve trenutke t' vrijedi to isto. Ima barem jedan trenutak t'' koji je poslije ili prije svih ostalih trenutaka t i t'. Razlika između ovog razreda modela i maksimum/minimum razreda modela (4.7) jest što se u 4.7 oni trenuci koji su poslije, odnosno prije, svode na maksimalni odnosno minimalni trenutak. Granica vremena postavlja na zadani trenutak uvijek jedan kasniji ili raniji trenutak u odnosu na to radi li se o gornjoj ili donjoj granici [1]. Oznaka je vremenske logike sa svojstvom granica vremena '$L_{\mathcal{TL}}$', a razreda modela '$\mathfrak{M}^L$'.

Propozicija 4.9 (VGr)
Svojstva razreda modela:

1. $\forall x \forall y \exists w(x \prec w \wedge y \prec w)$ *gornja granica*
2. $\forall x \forall y \exists w(w \prec x \wedge w \prec y)$ *donja granica*

Karakteristične valjane formule:

1. $\models_{\mathfrak{M}^L} \langle f \rangle\,[f]\,\phi \to [f]\,\langle f \rangle\,\phi$
2. $\models_{\mathfrak{M}^L} \langle p \rangle\,[p]\,\phi \to [p]\,\langle p \rangle\,\phi$

Nadopuna pravila za oznake:
U $\mathfrak{M}^L$ se koristi nadopuna iz propozicije 4.6 i ukoliko se dođe do granice vremena stablo se zatvara.

1. $\langle f\rangle [f]\phi \to [f]\langle f\rangle \phi$			
1	t	$\neg(\langle f\rangle [f]\phi \to [f]\langle f\rangle \phi)\checkmark$	
2	t	$\langle f\rangle [f]\phi\checkmark$	$1\neg\to$
3	t	$\neg[f]\langle f\rangle \phi\checkmark$	$1\neg\to$
4	$t\dotplus u$	$\neg\langle f\rangle \phi^{z\checkmark}$	$3\neg[f]$
5	$t\dotplus v$	$[f]\phi^{z\checkmark}$	$2\langle f\rangle$
6	$t\dotplus v\dotplus z$	ϕ	$5[f]$
7	$t\dotplus u\dotplus z$	$\neg\phi$	$4\neg\langle f\rangle$
		$\times$	

2. $\langle p\rangle [p]\phi \to [p]\langle p\rangle \phi$			
1	t	$\neg(\langle p\rangle [p]\phi \to [p]\langle p\rangle \phi)\checkmark$	
2	t	$\langle p\rangle [p]\phi\checkmark$	$1\neg\to$
3	t	$\neg[p]\langle p\rangle \phi\checkmark$	$1\neg\to$
4	$t\dot{-}s$	$\neg\langle p\rangle \phi^{a\checkmark}$	$3\neg[p]$
5	$t\dot{-}r$	$[p]\phi^{a\checkmark}$	$2\langle p\rangle$
6	$t\dot{-}r\dot{-}a$	ϕ	$5[p]$
7	$t\dot{-}s\dot{-}a$	$\neg\phi$	$4\neg\langle p\rangle$
		$\times$	

5. Potpunost

Potrebno je dokazati potpunost metode semantičkog stabla za $L_{\mathcal{T}}$.

5.1. Hintikkin skup

Hintikkin se skup označava Γ^H. Taj je skup definiran svojim sadržajem, koji se proširuje ili smanjuje s obzirom na tip logike s kojom se radi. U ovom je slučaju potrebno Γ^H za $L_{\mathcal{S}}$ nadograditi u Γ^H za $L_{\mathcal{T}}$. Neka je Γ^H nadopunjen sljedećim formulama:

1. Ako je $\nu \in \Gamma^H$, onda za svaku $\tau \in l(\Gamma^\Sigma)$ takvu da $\sigma \triangleright \tau\ \nu_0 \in \Gamma^H$
2. Ako je $\pi \in \Gamma^H$, onda barem za jednu $\tau \in l(\Gamma^\Sigma)$ takvu da $\sigma \triangleright \tau\ \pi_0 \in \Gamma^H$

Definicija 5.1 (Hintikkin put) *Hintikkin je put onaj u kojem sve formule tvore Hintikkin skup. [5]*

Lema 5.1 *Svako sustavno stablo u kojem nisu svi putevi zatvoreni, ima barem jedan Hintikkin put. [5]*

Ako stablo nema sve zatvorene putove onda ima potpun otvoren ili beskonačan put. Kaže se da je put potpun i otvoren ako i samo ako ne sadrži

- označena propozicijska varijabla $\sigma :: \phi$ i njegova negacija $\sigma :: \neg\phi$, i
- ako su sve ostale formule dekompozirane prema (α, β), $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\pi}$ pravilima.

Dvije se navedene točke poklapaju s definicijom Hintikkinog skupa. Dakle, formule sadržane u potpunom otvorenom putu čine Hintikkin skup. Ako postoji beskonačan put u stablu onda formule na tom putu čine beskonačan Hintikkin skup.

5.2. Hintikkina lema

Lema 5.2 (Hintikkina lema) *Svaki je Hintikkin skup zadovoljiv. [5]*

Lema se dokazuje tako da se nađe barem jedno tumačenje u kojemu su svi $\phi \in \Gamma^H$ istiniti, neka se to tumačenje zove T^*. Dokazat će se da su svi elementi u Γ^H istiniti u T^* matematičkom indukcijom na duljinu formule. Ukupan zbroj propozicijskih varijabli, veznika i modalnih operatora u formuli jest duljina formule.

Osnovica:

Za svaku formulu $\phi \in \Gamma^H$ duljine 1, $T^* \models \phi$.

Induktivni korak:

Ako za svaku formulu $\phi \in \Gamma^H$ duljine n ili manje, $T^* \models \phi$, onda za svaku formulu $\phi \in \Gamma^H$ duljine $n+1$, $T^* \models \phi$.

Sljedi nadopuna formulama tipa ν i π. Ako:

- $\nu \in \Gamma^H$, onda za svaku $\tau \in l(\Gamma^\Sigma)$ takvu da $\sigma \triangleright \tau\ \nu_0 \in \Gamma^H$
- $\pi \in \Gamma^H$, onda barem za jednu $\tau \in l(\Gamma^\Sigma)$ takvu da $\sigma \triangleright \tau\ \pi_0 \in \Gamma^H$

po definiciji Hintikkinog skupa. Prema induktivnoj hipotezi $T^* \models \nu_0$ i $T^* \models \pi_0$, tako da prema induktivnom koraku slijedi:

- $T^* \models \nu$
- $T^* \models \pi$

5.3. Teorem o potpunosti

Teorem 5.1 (Teorem o potpunosti) *Ako je konačan skup formula Γ nezadovoljiv, svako sustavno stablo za Γ ima svaki put zatvoren. [5]*

Teorem će se dokazati pretpostavljajući obratno. Neka ima barem jedan otvoren put. Ako ga ima to je Hintikkin put (5.1). Sve formule na tom putu čine Hintikkin skup (def. Hintikkin put) Γ^H a svaki je Hintikkin skup zadovoljiv (5.2). Kako je $\Gamma \subseteq \Gamma^H$ onda je i Γ zadovoljiv. Dakle, ako je Γ nezadovoljiv onda semantičko stablo za Γ ima svaki put zatvoren.

Literatura

[1] Burgess, J. P. Basic tense logic. U *Handbook of Philosophical Logic,* D. M. Gabbay, F. Guenthner, ur. Dordrecht [etc.]: Kluwer Academic Publishers, 2002, str. 1–42.

[2] Fitting, M. Introduction. U *Handbook of Tableau Methods,* M. D'Agostino, ur. Dordrecht [etc.]: Kluwer Academic Publishers, 1999, str. 1–41.

[3] Goldblatt, R. *Logics of Time and Computation.* Stanford: Center for the study of language and information, 1992.

[4] Goré, R. Tableau methods for modal and temporal logics. U *Handbook of Tableau Methods,* M. D'Agostino, ur. Dordrecht [etc.]: Kluwer Academic Publishers, 1999, str. 297–397.

[5] Kovač, S. Uvod u elementarnu logiku. http://www.ifzg/ ~skovac/index.html, 2007.

[6] Kovač, S. O logici i metafizici vremena. U *Vrijeme metamorfoza – Uz Metamorfoze metafizike Marijana Cipre,* D. Barbarić, ur. Zagreb: Matica hrvatska, 2009, str. 33–59.

[7] Swinburne University of Technology and COSMOS–The SAO Encyclopedia of Astronomy. Planck time. http://astronomy. swin.edu.au/cosmos/P/Planck+Time, 2013.

Lovre Grisogono

Types of Models in Temporal Logic

Abstract

Time is a concept that opens up a wide range of questions. Time can be analyzed philosophically, logically, mathematically, physically, and so on. This paper presents a new set of decomposition rules for semantic tableau method. On the basis of the various axioms of time, models for modal temporal logic will be built, and, characteristic and valid formulas for those models will be presented. At the end the completeness theorem for this system will be examined.

Key words

time, temporal logic, modal logic, axioms, semantic tableau, decomposition rules