IZVORNI ZNANSTVENI RAD
UDK 330.567.2:366

Prof. dr. sc. Ante Puljić,

Mr. sc. Ilko Vrankić

Mira Oraić, dipl. oec.

DOLAZAK NA PUTANJU DOHODAK-POTROŠNJA U TOČKE MAKSIMALNOG ZADOVOLJSTVA I MINIMALNIH IZDATAKA

CONSUMER'S COMING TO THE INCOME-CONSUMPTION PATH

SAŽETAK: U ovom se članku proces rješavanja problema ograničene optimizacije primjenjuje na rješavanje potrošačevog problema ograničene maksimizacije korisnosti i na rješavanje potrošačevog problema ograničene minimizacije izdataka polazeći od pretpostavke da potrošačev ukus opisuje suvremena strogo rastuća i striktno kvazikonkavna funkcija korisnosti. Proces se rješavanja ovih problema zapravo svodi na opis potrošačevog dolaska u ravnotežu i na opis ravnoteže, odnosno na opis potrošačevog dolaska na putanju dohodak-potrošnja kada potrošač, pri zadanim cijenama, maksimizira korisnost za zadani dohodak i na opis potrošačevog dolaska na putanju korisnost-izdaci kada potrošač, pri zadanim cijenama, minimizira izdatke za zadanu korisnost te na opis točaka ravnoteže na tim putanjama.

Matematičko oblikovanje potrošačeve ravnoteže omogućava primjenu metode jednakih nagiba pomoću koje se, u oba slučaja ograničene optimizacije, jednostavno pronalaze optimalne kombinacije dobara i optimalne vrijednosti funkcija cilja. U procesu se dolaska do ovih rezultata na prirodan način razotkrivaju i ekonomsko i matematičko značenje Lagrangeovih multiplikatora kao i skup jednadžbi kojih je rješenje kritična točka Lagrangeove funkcije bez da se bilo što izravno govori o Lagrangoevoj funkciji. Ne samo to, polazeći od stajališta da je funkcija cilja u problemu ograničene minimizacije izdataka funkcija ograničenja iz problema maksimizacije korisnosti i da je funkcija ograničenja u problemu ograničene minimizacije izdataka funkcija cilja iz problema ograničene maksimizacije korisnosti bezbolno se izvode dualne veze, od kojih posebnu važnost imaju veze između Hicksovih i Marshallovih funkcija potražnje iz kojih izravno slijedi jednadžba Slutskyog, jednadžba koja na najsažetiji način izražava suvremeni zakon potražnje.

Metoda jednakih nagiba i geometrijska interpretacija uloge Lagrangeovih multiplikatora potpuno razaraju mističnu predodžbu o Lagrangeovoj metodi neodređenih multiplikatora. Iz uvjeta prvog reda, koji slijede iz Lagrangeove funkcije, proizlazi ravnotežna jednakost granične stope supstitucije između dobara, koja je imuna na monotono rastuće transformacije funkcije korisnosti, i odnosa cijena dobara. Imunost granične stope supstitucije između dobara na monotono rastuće transformacije funkcije korisnosti omogućava bijeg od pojma korisnosti i napuštanje zakona opadajuće granične korisnosti, kojeg, u skladu s Paretovim zamislima, zamjenjuje zakon opadajuće granične stope supstitucije između dobara. Ispunjenje je tog zakona dovoljan uvjet drugoga reda u oba modela ograničene optimizacije.

KLJUČNE RIJEČI: granična stopa tržišne transformacije, granična stopa supstitucije između dobara, ograničena maksimizacija korisnosti, ograničena minimizacija izdataka, putanja dohodak-potrošnja, putanja korisnost-izdaci, dualni modeli, granična korisnost novca, zakon opadajuće granične korisnosti, zakon opadajuće granične stope supstitucije.

ABSTRACT: This article explains the process of solving constrained optimization problem by solving constrained utility maximization problem and constrained expenditure minimization problem for a consumer by assuming that the consumer's preferences are represented by strictly increasing and strictly quasiconcave utility function. The process of solving these problems is actually reduced to a description of consumer's coming to an equilibrium and description of that equilibrium, that is the description of a consumer's coming to the income-consumption path, when the consumer, at given prices, maximizes utility for the given level of income and minimizes expenditures for the given utility level, and to the equilibrium points description on those paths.

Mathematic formation of consumer's equilibrium enables the implementation of the equal slopes method which allows, in both cases of constrained optimization, to simply find the optimum combination of goods and optimal values of the objective functions. In the process of reaching these results, both economical and mathematical interpretation of the Lagrange multipliers are revealed in a natural way, as well as a set of equations whose solution is the critical point of Lagrange function without directly implying Lagrange function. Not just that, but by assuming that the objective function in the constrained expenditure minimization problem is the constraint function in the utility maximization problem, and that the constraint function in the expenditure minimization problem is the objective function in the constrained utility maximization problem, it is easy to derive dual relationships, from which ones between Hicksian and Marshallian functions are of extraordinary importance. The Slutsky's equation, which describes the modern law of demand in the most compact way, is directly derived from those dual relationships.

The equal slope method and the geometrical interpretation of the Lagrange multipliers completely do away with the mystical conotations surrounding the Lagrange method of undefined multipliers. From the first order conditions, which follow from the Lagrange function, it is easy to reach an equality between the marginal rate of substitution, which is invariant to the positive monotonic transformations of the utility function, and price ratio Invariance of the marginal rate of substitution to positive monotonic transformations of the utility function enables the abandoning the idea of utility and the law of diminishing marginal utility which, in accordance with Pareto's ideas, is replaced by the law of diminishing marginal rate of substitution. Fulfillment of that law is a sufficient second order condition in both constrained optimization models.

KEY WORDS: the marginal rate of market transformation, the marginal rate of substitution, constrained utility maximization, constrained expenditure minimization, the income-consumption path, dual models, the marginal utility of income, the law of diminishing marginal utility, the law of diminishing marginal rate of substitution.

1. UVOD

U ovom članku pretpostavljamo da potrošač formira poređaj košara dobara po redu poželjnosti u skladu sa šest aksioma. Između tih šest aksioma, tri nam aksioma: aksiom o potpunosti, aksiom o tranzitivnosti i aksiom o neprekidnosti potrošačevih preferencija, omogućuju da definiramo funkciju ordinalne korisnosti ili funkciju poređaja, koja svakoj košari dobara pripisuje broj čija veličina određuje samo mjesto košare u poređaju košara prema potrošačevim preferencijama. Dva daljnja aksioma, aksiom o nezasitnosti potrošača ili aksiom o strogoj monotonosti potrošačevih preferencija i aksiom o striktnoj konveksnosti potrošačevih preferencija, psihološki su aksiomi koji pobliže određuju potrošačeve ukuse i time svojstva funkcije korisnosti. Aksiom o potrošačevoj nezasitnosti ekvivalentan je aksiomu da je funkcija korisnosti strogo rastuća funkcija, a aksiom koji tvrdi da su potrošačeve preferencije striktno konveksne aksiomu da je funkcija korisnosti striktno kvazikonkavna funkcija. Iz sadržaja pet navedenih aksioma proizlazi da ulogu binarne relacije blage preferencije u analizi potrošačeva izbora može preuzeti neprekidna, strogo rastuća i striktno kvazikonkavna funkcija korisnosti čije su neprekidne, i u odnosu na koordinatni početak striktno konveksne, krivulje ili hiperplohe indiferencije takve da svaka košara dobara leži na jednoj i samo jednoj između tih krivulja ili hiperploha indiferencije. Da bismo omogućili primjenu metoda diferencijalnog računa i time olakšali analizu, četiri prva aksioma možemo zamijeniti aksiomom o diferencijabilnosti koji kaže da je funkcija korisnosti diferencijabilno strogo rastuća funkcija i da je funkcija korisnosti diferencijabilna onoliko puta koliko je potrebno. Ovaj aksiom nedvojbeno izražava potrošačevu nezasitnost u bilo kojoj točki i stavlja na raspolaganje cjelokupnu „ratnu opremu“ diferencijalnog računa. Nakon danih objašnjenja sve aksiome možemo zamijeniti samo jednim aksiomom, aksiomom koji kaže da je funkcija ordinalne korisnosti koja u analizi potrošačeva izbora preuzima ulogu binarne relacije blage preferencije, strogo rastuća i striktno kvazikonkavna funkcija na R_+^n.

Prethodno definirana funkcija ordinalne korisnosti omogućuje nam da izjavu kako potrošač iz konveksnog i kompaktnog skupa ostvarive potrošnje koje određuju cijene dobara i potrošačev dohodak, bira košaru dobara koju najviše voli, prevedemo u izjavu da se potrošač pri izboru košare dobara ponaša tako kao da maksimizira funkciju korisnosti uz zadano budžetsko ograničenje. Definirana funkcija ordinalne korisnosti nije samo funkcija cilja u problemu maksimizacija korisnosti uz zadano budžetsko ograničenje nego i funkcija ograničenja u problemu minimizacije izdataka za zadanu razinu korisnosti. Prijelaz na područje matematičke teorije optimizacije nameće da čitatelja pobliže upoznamo s procesom optimizacije, s procesom iznalaženja maksimuma ili minimuma uz ograničenje. Cilj nam je da u ovom članku to upoznavanje obavimo na pristupačan i uvjerljiv način, bez pretjeranog oslanjanja na znanje matematike. Naša je stožerna pretpostavka u tom nastojanju da obični potrošač uvijek zna koliko je jedinica dobra X_2 spreman žrtvovati za dodatnu vrlo malu jedinicu dobra X_1 i za koliko jedinica dobra X_2 na tržištu može dobiti tu dodatnu jedinicu dobra X_1. Ako je razboriti potrošač spreman žrtvovati veći broj jedinica dobra X_2 za dodatnu jedinicu dobra X_1 od broja jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti jedinicu dobra X_1, on će se preorijentirati na povećanje kupnje dobra X_1 bilo da nastoji maksimizirati korisnost za zadani dohodak i zadane cijene bilo da nastoji minimizirati izdatke za zadanu korisnost i zadane cijene. Smjer je preraspodjele obrnut kada je potrošač spreman žrtvovati manji broj jedinica dobra X_2 za dodatnu jedinicu dobra X_1 od broja jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1.

Matematička formalizacija modela ograničene optimizacije omogućuje i poopćenje problema i primjenu različitih metoda optimizacije između kojih posebno izdvajamo metodu Lagrangeovih multiplikatora. Toj ćemo metodi posvetiti veliku pozornost i na neuobičajen način čitatelju, nadamo se, jasno protumačiti matematički smisao Lagrangeovih multiplikatora.

Budući da smatramo kako je dualnost pojam čiji se smisao najuvjerljivije može protumačiti na konkretnom primjeru, razboritog bi potrošača koji je pri zadanim cijenama dobara za zadani dohodak M kupio košaru dobara x^M koja mu u zadanim uvjetima daje maksimalnu korisnost, mogli zapitati koliko bi iznosio njegov najmanji izdatak kada bi on, pri jednakim cijenama, htio ostvariti razinu korisnosti koju mu daje košara dobara x^M. Vjerujemo da bi potrošač, pošto bi se začudio koliko smo neupućeni u proces optimizacije, jednostavno odgovorio da bi njegov minimalni izdatak za zadanu korisnost iznosio M i da bi ponovno kupio košaru dobara x^M kako bi ostvario zadanu postignutu maksimalnu razinu korisnosti. Potrošač nas odgovorom nesvjesno upoznaje s problemima dualnosti jer odgovorom izražava korespondenciju između pojmova u problemu ograničene maksimizacije i pojmova u problemu ograničene minimizacije. To nas potiče da što je moguće ranije na prikladnim mjestima uspostavljamo veze između procesa ograničene maksimizacije i procesa ograničene minimizacije i da uspostavljene veze na kraju malo sustavnije prikažemo. U okviru razmatranja problema dualnosti i u okviru razmatranja pojedinačnih procesa ograničene optimizacije posebno značenje pripisujemo ekonomskim interpretacijama Lagrangeovih multiplikatora. Nadamo se da će naš pristup tim interpretacijama čitatelju biti novo iskustvo.

Paretov prevratnički nalaz da se izvođenje potrošačevih funkcija potražnje ne mora temeljiti na funkcijama kardinalne korisnosti i zakonu opadajuće granične korisnosti nego na krivuljama indiferencije kojima oblik određuje zakon opadajuće granične stope supstitucije između dobara, zauzima najistaknutije mjesto u teoriji potrošačeva izbora. Tom ćemo prevratu posvetiti poseban odjeljak gdje ćemo pokazati da primjena monotono rastućih transformacija na bilo koju funkciju korisnosti ne utječe na graničnu stopu supstitucije između dobara pa, zbog toga, ni na funkcije potražnje koje su zapravo rješenje problema ograničene optimizacije. Nadamo se da će nakon toga čitatelju postati posve jasan smisao i važnost Paretovog prevrata.

U ekonomskim nam primjenama kontekst problema obično jasno kazuje jesmo li našli maksimum ili minimum. U našem je slučaju to očito, stoga ćemo dovoljnim uvjetima drugog reda posvetiti malo prostora, tek radi cjelovitosti.

2. MODEL OGRANIČENE MAKSIMIZACIJE KORISNOSTI

Problem ograničene maksimizacije ilustrirat ćemo primjerom maksimiziranja korisnosti uz budžetsko ograničenje. Pritom polazimo od činjenice kako iz prihvaćenih aksioma proizlazi da je potrošačeva funkcija korisnosti diferencijabilno strogo rastuća funkcija i od činjenice da je skup ostvarive potrošnje kompaktan skup. Zbog toga se košara dobara koja maksimizira potrošačevo zadovoljstvo mora nalaziti na budžetskoj crti. U odnosu na bilo koju košaru dobara iz skupa ostvarive potrošnje koja ne pripada budžetskoj crti, postoji košara dobara na budžetskoj crti koja sadrži veću količinu barem jednog dobra i ne manju količinu drugog dobra. Posve je stoga jasno da nezasitan potrošač više voli košaru dobara s budžetske crte nego usporednu košaru dobara koja ne pripada budžetskoj crti. Kupujući košaru dobara s budžetske crte, nezasitni potrošač troši sav svoj dohodak, stoga u problemu ograničene maksimizacije korisnosti ograničenje možemo pisati u obliku jednakosti. Na temelju iznesenog, model potrošačeva ponašanja s dvije varijable izbora možemo simbolički sažeto zapisati u obliku:

$$\underset{x_1, x_2 \geq 0}{\text{maks}} \ u(x_1, x_2)$$
$$\text{uz uvjet } p_1 x_1 + p_2 x_2 = M.$$

Iz zapisa je očito da je potrošačev cilj maksimizirati korisnost te da potrošač to mora učiniti izborom košare dobara i da pri tom izboru ne smije narušiti zadano ograničenje. *Egzogene varijable*, varijable koje potrošač ne može nadzirati, cijene su dobara, p_1 i p_2, i dohodak potrošača, M , dok su *endogene varijable*, *varijable izbora* ili *varijable odlučivanja* količine dobara x_1 i x_2

Postavljeni problem ograničene optimizacije možemo riješiti na tri načina: metodom izravne supstitucije, metodom jednakih nagiba i metodom Lagrangeovog multiplikatora.

2.1 Rješavanje modela metodom izravne supstitucije

Radi potpunosti izlaganja napišimo još jednom model potrošačeva ponašanja s dvije varijable izbora:

$$\underset{x_1, x_2 \geq 0}{\text{maks}} \ u(x_1, x_2)$$
$$\text{uz uvjet } p_1 x_1 + p_2 x_2 = M. \tag{1}$$

Iz zapisa je očito da treba naći maksimalnu vrijednost funkcije korisnosti u uvjetima u kojima budžetska jednadžba ograničava vrijednosti varijabli izbora. Kako se ovaj problem rješava metodom izravne supstitucije? Metoda izravne supstitucije polazi od stajališta da između količina x_1 i x_2 postoji funkcionalni odnos i da, s tim u skladu, varijable x_1 i x_2 mogu poprimiti samo vrijednosti koje zadovoljavaju budžetsko ograničenje. Kada se, na primjer, količina x_2 izrazi kao funkcija količine x_1, $x_2(x_1)$, tada za bilo koju zadanu količinu x_1, količinu x_2, koja zadovoljava budžetsko ograničenje, daje linearna funkcija

$$x_2(x_1) = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1. \tag{2}$$

Očito je da ovu linearnu funkciju možemo uvrstiti u funkciju korisnosti i na taj način, zadovoljavajući ograničenja koja ta linearna funkcija nameće na vrijednosti varijabli izbora, problem ograničene maksimizacije svesti na problem neograničene maksimizacije funkcije

$$\begin{aligned} u &= u(x_1, x_2(x_1)) \\ &= u(x_1, \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1), \end{aligned} \tag{3}$$

u kojoj je varijabla izbora samo količina x_1. Proces optimizacije teče na uobičajen način. Kada $u(x_1, x_2(x_1))$ diferenciramo s obzirom na x_1 i izjednačimo s nulom, dobivamo

$$\frac{\partial\, u(x_1, x_2(x_1))}{\partial\, x_1} + \frac{\partial\, u(x_1, x_2(x_1))}{\partial\, x_2} \frac{dx_2}{dx_1} = 0 \ . \tag{4}$$

Prvi pribrojnik na lijevoj strani jednadžbe (4) izražava povećanje korisnosti kao izravan učinak povećanja količine dobra X_1, dok drugi član izražava promjenu korisnosti kao posredan učinak povećanja količine dobra X_1. Posrednost učinka promjene količine dobra X_1 očituje se u tome što ona prvo određuje promjenu količine dobra X_2 i tek preko te promjene promjenu korisnosti. Primijetimo da je tek u ravnoteži apsolutna veličina izravnog učinka promjene količine dobra X_1 jednaka apsolutnoj veličini posrednog učinka promjene količine dobra X_1.

Funkciju (2) možemo diferencirati da bismo dobili

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}. \tag{5}$$

Nakon uvrštavanja (5) u (4) i dovođenja u prikladan oblik dobije se uobičajen uvjet dodirivosti,

$$\frac{\partial\, u(x_1^M, x_2^M) / \partial\, x_1}{\partial\, u(x_1^M, x_2^M / \partial\, \mathrm{x}_2} = \frac{p_1}{p_2}, \tag{6}$$

koji nam kaže da je potrošač u ravnoteži onda kada je *granična stopa supstitucije između dobara* jednaka odnosu cijena dobara.

Primjena metode izravne supstitucije moguća je i u slučajevima kada imamo veći broj endogenih varijabli. Njezina je osnovna značajka da ona problem ograničene optimizacije koji ima n endogenih varijabli svodi na problem neograničene optimizacije u kojem je *(n-1)* endogena varijabla. Ova je metoda rješavanja samo na prvi pogled vrlo primamljiva. Nju uvijek nije moguće primijeniti, osobito ne u slučaju kada je ograničenje zadano kao implicitna funkcija iz koje eksplicitno ne možemo izraziti jednu varijablu kao funkciju druge varijable. Što je još važnije, ova metoda slabije od ostalih metoda rasvjetljuje strukturu problema i narav rješenja, stoga ćemo podrobnije objasniti samo smisao dviju preostalih metoda.

2.2 Rješavanje metodom jednakih nagiba-grafički pristup

Kada je zadano budžetsko ograničenje, funkciju korisnosti promatramo kao funkciju u kojoj su varijable x_1 i x_2 međusobno ovisne, odnosno kao funkciju u kojoj vrijednosti neovisnih varijabli zadovoljavaju budžetsko ograničenje. Ograničenje je u našem slučaju linearna funkcija i njezin je graf na slici 1. pravac u ravnini x_1Ox_2. Ograničenje zadovoljava svaka točka, svaka košara dobara, koja pripada tom pravcu. Međutim, ograničenje nije zadovoljeno samo u svakoj točki koja pripada budžetskoj crti već i u bilo kojoj točki koja se nalazi okomito iznad budžetske crte jer se okomito iznad bilo koje točke na budžetskoj crti mijenjaju vrijednosti samo varijable u, ali ne i vrijednosti varijabli x_1 i x_2. Možemo stoga zaključiti da je u našem trodimenzionalnom slučaju ograničenje na dopustive kombinacije količina x_1 i x_2 zadovoljeno u svakoj točki beskonačno proširive ravnine koja je paralelna s osi u i koja sadrži budžetsko ograničenje iz ravnine x_1Ox_2.

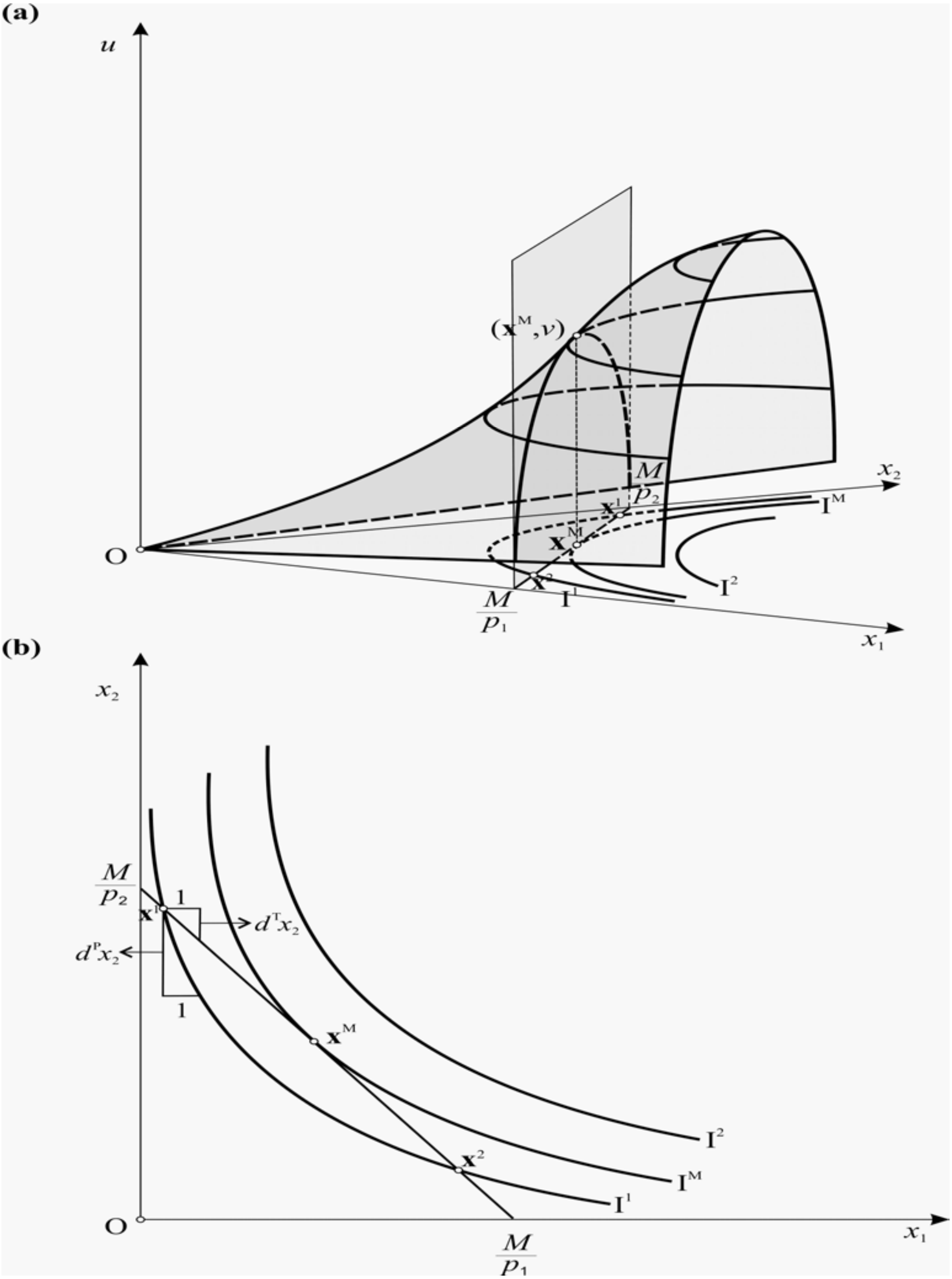
Razmotrimo sada odnos funkcije korisnosti i budžetskog ograničenja. Diferencijabilno strogo rastuća funkcija korisnosti funkcija je cilja. Ona nema maksimalnu vrijednost dok se ne uvedu ograničenja na vrijednosti varijabli x_1 i x_2. Pošto se uvedu ograničenja na vrijednosti varijabli x_1 i x_2, moramo naći količine x_1^M i x_2^M koje zadovoljavaju ograničenja i za koje funkcija cilja poprima najveću vrijednost. Za sada pretpostavljamo da su količine koje maksimiziraju funkciju korisnosti pozitivne, odnosno da problem maksimizacije korisnosti uz ograničenja ima *unutarnje rješenje*. Presjek ravnine koja je okomita na ravninu x_1Ox_2 s grafom funkcije korisnosti ili skup zajedničkih točaka te ravnine i grafa, izgleda poput ruba kriške. Između svih aplikata točaka tog ruba, aplikata točke $(\mathrm{x}^{\mathrm{M}}, v)$ predočava najveću vrijednost funkcije korisnosti na budžetskom ograničenju. U toj točki izopresjek funkcije korisnosti, čija je okomita projekcija u ravnini x_1Ox_2 krivulja indiferencije I^M, i budžetsko ograničenje, imaju jednak nagib. U ravnini x_1Ox_2 nalaze se okomite projekcije još dvaju izopresjeka funkcije korisnosti, krivulje indiferencije I^1 i I^2.

Slika 1., crtež (b), u biti je slika iz ptičje perspektive. Ona na uobičajen način predočava okomite projekcije triju, između beskonačno mnogo, izopresjeka funkcije korisnosti kao krivulje indiferencije I^1, I^M i I^2. Naša je pozornost usredotočena na točku x^{M}. Ta točka predočuje pozitivne količine x_1^M i x_2^M koje zadovoljavaju budžetsko ograničenje i maksimiziraju funkciju korisnosti. U toj se točki dodiruju krivulja indiferencije i budžetsko ograničenje, stoga krivulja indiferencije i budžetsko ograničenje u toj točki imaju jednak nagib. Ta se točka zove *točka ravnoteže*.

Pokušajmo sada pobliže objasniti kako potrošač dolazi do kombinacije količine dobara koju predočuje točka ravnoteže. Pri tom pokazivanju polazimo od činjenice da apsolutni nagib krivulje indiferencije, granična stopa supstitucije između dobara, $MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1}$, mjeri psihičku, subjektivnu stopu po kojoj je potrošač voljan razmijeniti dobro X_1 za dobro X_2 u nekoj točki krivulje indiferencije i da apsolutni nagib budžetske crte, *granična stopa tržišne transformacije*, $MRMT = \frac{p_1}{p_2}$, mjeri objektivnu stopu po kojoj potrošač na tržištu može razmijeniti dobro X_1 za dobro X_2. Lako je zamisliti da se potrošač može naći u točki na budžetskoj crti, kao što je to točka x^1, u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara veća od granične stope tržišne transformacije, $MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} > MRMT = \frac{p_1}{p_2}$, u točki, kao što je točka x^2, u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara manja od granične stope tržišne transformacije, $MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} < MRMT = \frac{p_1}{p_2}$, i, konačno, u točki, kao što je točka x^{M}, u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara jednaka graničnoj stopi tržišne transformacije, $MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} = MRMT = \frac{p_1}{p_2}$. Međutim, najvažnije je objasniti zašto će potrošač, kada se god nađe u okolnosti u kojoj se granična stopa supstitucije između dobara razlikuje od granične stope tržišne transformacije, nakon procjene svoga stanja, napustiti to mjesto i otputovati u točku u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara jednaka graničnoj stopi tržišne transformacije, u točku ravnoteže, u točku iz koje se u danim okolnostima ne želi micati. U kojoj god se točki na budžetskoj crti potrošač zateče, to je ujedno i točka na nekoj njegovoj krivulji indiferencije. Pretpostavljamo da potrošač, kada se zateče u nekoj točki na budžetskoj crti, zna koliko je jedinica dobra X_2 u toj točki spreman žrtvovati za vrlo malu dodatnu jedinicu dobra X_1 da bi ostao na jednakoj razini zadovoljstva, da zna za koliki iznos dohotka na tržištu može kupiti broj jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 i da zna je li taj iznos veći, jednak ili manji od iznosa kojim na tržištu može kupiti dodatnu jedinicu dobra X_1. Ako je iznos dohotka za koji na tržištu može kupiti broj jedinica dobra X_2 koji je spreman žrtvovati za jedinicu dobra X_1 veći od iznosa kojim na tržištu može kupiti dodatnu jedinicu dobra X_1, potrošač zaključuje kako bi mu bilo isplativo da taj iznos izdvoji iz svoga dohotka, zato što bi za dio toga iznosa mogao kupiti jedinicu dobra X_1 koja bi ga ostavila na nepromijenjenoj razini zadovoljstva i što bi s preostalim dijelom izdvojenog dohotka mogao povećati razinu svoga zadovoljstva u odnosu na razinu na kojoj bi ostao kada ne bi poduzeo opisanu preraspodjelu dohotka. Drugim riječima, ako je potrošačeva subjektivna vrijednost dodatne jedinice dobra X_1, vrijednost koju potrošač izražava vrijednošću određenog broja jedinica dobra X_2, veća od objektivne tržišne vrijednosti dodatne jedinice dobra X_1, vrijednosti koju tržište izražava vrijednošću određenog broja jedinica dobra X_2, odnosno ako je potrošačeva granična stopa supstitucije između dobra X_1 i dobra X_2 veća od granične stope tržišne transformacije dobra X_2 u dobro X_1, potrošaču se isplati iz dohotka izdvojiti iznos kojim na tržištu može kupiti broj jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 i na opisani način povećati svoje blagostanje.

Zamislite da se na crtežu (b) potrošač zatekao u točki x^1 u kojoj je spreman žrtvovati veći broj jedinica dobra X_2 za dodatnu jedinicu dobra X_1 od broja jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1, u točki u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara veća od granične stope tržišne transformacije. Na temelju prethodne analize nije teško zaključiti da bi potrošač u toj okolnosti iz svog dohotka izdvojio iznos kojim na tržištu može kupiti broj jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 i dijelom tog iznosa povećao razinu svoje korisnosti u odnosu na razinu na kojoj se nalazio prije preraspodjele dohotka. To bi se povećanje korisnosti očitovalo u pomaku udesno iz točke presjecišta budžetske crte i krivulje indiferencije I^1, iz točke x^1, u neku novu točku presjecišta budžetske crte i krivulje indiferencije koja je udaljenija od koordinatnog početka od krivulje indiferencije I^1.U toj bi novoj točki presjecišta dviju krivulja potrošač ponovno usporedio broj jedinica dobra X_2 koji je spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 s brojem jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1, graničnu stopu supstitucije između dobara s graničnom stopom tržišne transformacije. Ako bi ponovno utvrdio da je broj jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 veći od broja jedinica dobra

X_2 za koji na tržištu može dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1, da je granična stopa supstitucije između dobara veća od granične stope tržišne transformacije, potrošač bi obnovio opisani proces preraspodjele dohotka s kupnje dobra X_2 i pomaknuo se još više udesno od potonjeg sjecišta budžetske crte i krivulje indiferencije na novo sjecište budžetske crte i krivulje indiferencije. Ali gdje bi završilo to potrošačevo putovanje po budžetskoj crti udesno od točke x^1? Prije odgovora na ovo pitanje moramo upozoriti kako pretpostavka da je potrošač nezasitan i pretpostavka da su potrošačeve preferencije striktno konveksne, jamče da će optimalna košara dobara biti košara dobara na budžetskoj crti i da će optimalna košara dobara biti jedinstvena, ali i kako ne isključuju mogućnost da optimalna košara dobara bude «ugaona košara dobara», košara dobara u kojoj je količina jednog dobra jednaka nuli. Da bismo isključili mogućnost ugaonog rješenje i u analizi omogućili upotrebu diferencijalnog računa, pretpostavit ćemo da problem maksimizacije korisnosti ima unutarnje rješenje, da količine dobara u optimalnoj košari dobara, $x^M = (x_1^M, x_2^M)$, zadovoljavaju uvjete $x_1^M > 0$ i $x_2^M > 0$. Nakon uvođenja ove pretpostavke odgovor je na postavljeno pitanje posve jednostavan. Putujući po budžetskoj crti od košare dobara x^1 udesno, uzastopne usporedbe broja jedinica dobra X_2, koje je potrošač spreman žrtvovati za dodatne jedinice dobra X_1, s brojem jedinica dobra X_2 za koji on na tržištu može dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1 i odgovarajući pomaci udesno potrošača bi konačno doveli do jedinstvene točke x^M u kojoj je on za dodatnu jedinicu dobra X_1 spreman žrtvovati onaj broj jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti samo dodatnu jedinicu dobra X_1, do jedinstvene točke x^M u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara jednaka graničnoj stopi tržišne transformacije. To je točka u kojoj je potrošačeva subjektivna vrijednost dodatne jedinice dobra X_1 izražena vrijednošću broja jedinica dobra X_2, jednaka objektivnoj vrijednosti jedinice dobra X_1 koju na tržištu izražava vrijednost broja jedinica dobra X_2. To je točka u kojoj krivulja indiferencije dodiruje budžetsku crtu, točka s koje potrošač preraspodjelom dohotka ne može prijeći na krivulju indiferencije koja je udaljenija od koordinatnog početka od krivulje indiferencije I^M. Kada bi potrošač iz točke x^M pokušao prijeći u neku novu točku na budžetskoj crti koja se nalazi neznatno desno od točke x^M, on bi se zatekao na krivulji indiferencije koja je bliže koordinatnom početku nego krivulja indiferencije I^M. Iznos dohotka za koji se na tržištu može kupiti broj jedinica dobra X_2 koji je potrošač spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1, u toj bi točki bio manji od iznosa kojim se na tržištu može kupiti dodatna jedinica dobra X_1. Potrošačeva bi subjektivna vrijednost dodatne jedinice dobra X_1 izražena vrijednošću određenog broja jedinica dobra X_2 bila manja od objektivne vrijednosti dodatne jedinice dobra X_1 koju tržište izražava vrijednošću određenog broja jedinica dobra X_2. Granična bi stopa supstitucije između dobara bila manja od granične stope tržišne transformacije, stoga bi potrošač odmah uočio da na tržištu za jedinicu dobra X_1 može dobiti veći broj jedinica dobra X_2 od broja jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1. Odmah bi izdvojio iznos dohotka s kojim na tržištu može kupiti jedinicu dobra X_1 i taj bi iznos transformiranog dohotka s kupnje dobra X_1 upotrijebio za povratak u točku ravnoteže x^M.



Slika 1. Potrošačeva ravnoteža u slučaju ograničene maksimizacije

Na crtežu (a) graf ravnine koji je okomit na ravninu x_1Ox_2 i kojem pripada budžetska crta $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, dodiruje graf izopresjeka strogo rastuće funkcije korisnosti u točki $(\mathrm{x}^{\mathrm{M}}, u)$, a krivulja indiferencije I^M, koja je okomita projekcija grafa izopresjeka na ravninu x_1Ox_2, zadanu budžetsku crtu u točki x^{M}. Košara dobara koju predočuje točka x^{M} maksimizira korisnost potrošaču zbog toga što svaka druga košara dobara koja pripada budžetskoj crti I^M, pripada nekoj drugoj krivulji indiferencije, kao na primjer, krivulja indiferencije I^1 koja je bliže koordinatnom početku od krivulje indiferencije I^M i zbog toga što bilo kojoj krivulji indiferencije koja je od koordinatnog početka udaljenija od krivulje indiferencije I^M, kao na primjer, krivulji indiferencije I^2, ne pripada nijedna košara dobara koja pripada zadanoj budžetskoj crti. Maksimalna je vrijednost funkcije korisnosti jednaka vrijednosti aplikate u točki grafa $(\mathrm{x}^{\mathrm{M}}, v)$. Primijetite da je graf presjeka grafa ravnine i grafa funkcije korisnosti konkavna krivulja iznad budžetske crte.

Na crtežu (b) svaka točka na budžetskoj crti predočuje košaru dobara s presjecišta budžetske crte i neke krivulje indiferencije. Potrošač se želi domoći košare dobara koja mu daje najveću korisnost. Tu košaru traži krećući se po budžetskoj crti i uspoređujući broj jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dodatnu vrlo malu jedinicu dobra X_1, graničnu stopu tržišne transformacije, $-\frac{d^T x_2}{1}$, s brojem jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1, s graničnom stopom supstitucije između dobara, $-\frac{d^P x_2}{1}$. Ako je granična stopa tržišne transformacije dobra X_2 u dobro X_1 manja od granične stope supstitucije između dobara, kao što je to slučaj u točki x^1, potrošač u mislima započinje postupno preraspodjeljivati dohodak s kupnje dobra X_2 na kupnju dobra X_1, supstituirati dobro X_2 dobrom X_1 i prelaziti na krivulje indiferencije koje su sve udaljenije od koordinatnog početka od krivulje indiferencije I^1. To čini sve dok ne stigne u jedinstvenu točku stabilne ravnoteže x^{M}, u točku u kojoj je objektivna vrijednost dodatne jedinice dobra X_1 koju tržište izražava vrijednošću broja jedinica dobra X_2, p_1 / p_2, jednaka potrošačevoj subjektivnoj vrijednosti dodatne jedinice dobra X_1 izražene vrijednošću broja jedinica dobra X_2 koju je on spreman žrtvovati za tu jedinicu, $-dx_2 / dx_1$. Potrošač ne može prijeći na krivulju indiferencije koja je udaljenija od koordinatnog početka od krivulje indiferencije I^M, kao na primjer krivulja indiferencije I^2, jer zadana budžetska crta nema zajedničku košaru dobara s tom krivuljom indiferencije. Na jednak se način može opisati dolazak u ravnotežu iz točke x^2 u kojoj je granična stopa tržišne transformacije veća od granične stope supstitucije između dobara.

Slično prethodnom opisu, kada bi se potrošač zatekao u točki x^2 u kojoj je za dodatnu jedinicu dobra X_1 spreman žrtvovati manji broj jedinica dobra X_2 od broja jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti jedinicu dobra X_1, u točki x^2 u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara manja od granične stope tržišne transformacije, on bi uočio da može izdvojiti iznos dohotka kojim na tržištu može kupiti jedinicu dobra X_1, da samo za dio tog izdvojenog iznosa može kupiti broj jedinica dobra X_2 koji bi ga zadržao na nepromijenjenoj razini korisnosti i da ostatak može upotrijebiti za prijelaz na višu razinu korisnosti od razine koju predočuje krivulja indiferencije I^2, od razine na kojoj bi ostao kada ne bi poduzimao preraspodjelu dohotka. Sada bi potrošač dobro X_1 supstituirao dobrom X_2 i kretao bi se ulijevo od točke x^2 sve dok ne bi stigao u točku x^M. Nakon pokušaja da od točke x^M krene ulijevo ponovno bi se uvjerio da ga to vodi na krivulju indiferencije koja je bliže koordinatnom početku od krivulje indiferencije I^M i da je za njega najbolje da se vrati u točku ravnoteže x^M.

Nesklad između vrijednosti određenog broja jedinica dobra X_2 koju potrošač pripisuje dodatnoj jedinici dobra X_1 subjektivne vrijednosti, i objektivne vrijednosti određenog broja jedinica dobra X_2 koju tržište pripisuje dodatnoj jedinici dobra X_1, nesklad između granične stope supstitucije dobra X_1 za dobro X_2 i granične stope tržišne transformacije dobra X_2 u dobro X_1, izražava neravnotežno stanje, stanje koje potrošač u danim uvjetima želi promijeniti. Žudnja potrošača da maksimizira svoje blagostanje, tjera ga da iskoristi nesuglasje između subjektivne i objektivne vrijednosti. Kao što smo objasnili, on to čini tako da na već opisani način preraspodjeljuje dohodak s kupnje dobra X_2 kada je subjektivna vrijednost jedinice dobra X_1 veća od objektivne tržišne vrijednosti jedinice dobra X_1 i da preraspodjeljuje dohodak s kupnje dobra X_1 kada je subjektivna vrijednost jedinice dobra X_1 manja od objektivne tržišne vrijednosti jedinice dobra X_1. Postupna ga preraspodjela dohotka u oba slučaja dovodi do optimalne košare dobara x^M, do košare dobara koja maksimizira njegovu korisnost, do točke u kojoj je subjektivna vrijednost dodatne jedinice dobra X_1 jednaka objektivnoj vrijednosti dodatne jedinice dobra X_1. Potrošač se ne želi pomaknuti iz točke x^M jer bi ga pomak u bilo kojem smjeru po budžetskoj crti odveo na nižu razinu zadovoljstva. Kada bi se to dogodilo, žudnja da maksimizira svoju korisnost natjerala bi ga da poduzme odgovarajuću preraspodjelu dohotka koja će ga vratiti u točku ravnoteže x^M. Možemo stoga zaključiti da je, pri danom ukusu potrošača i pri zadanoj budžetskoj crti, točka x^M jedinstvena točka stabilne ravnoteže.

Vrlo sažeto, svaka je točka na budžetskoj crti sjecište budžetske crte i neke krivulje indiferencije. Kombinacija količina dobara u bilo kojoj točki na budžetskoj crti zadovoljava i jednadžbu budžetske crte i jednadžbu krivulje indiferencije koja siječe budžetsku crtu u toj točki. Ili još jednostavnije, u bilo kojoj točki na budžetskoj crti funkcija korisnosti ima određenu vrijednost, stoga je prirodno da potrošač pronalazi točku ravnoteže tako da ispita kolika je vrijednost funkcije korisnosti u svakoj točki na budžetskoj crti i da kao onaj koji maksimizira svoju korisnost, izabere onu točku, onu košaru dobara, u kojoj funkcija korisnosti ima najveću vrijednost. Naravno, mnogo je krivulja indiferencije koje nemaju presjecište s budžetskom crtom. Takva je, na primjer, krivulja indiferencije I^2. Na žalost, ni jedna košara dobara na krivulji indiferencije I^2 ne može biti optimalna košara dobara jer potrošač, pri zadanim cijenama p_1 i p_2, s dohotkom M ne može pribaviti ni jednu košaru koja pripada toj krivulji. Našu smo pozornost stoga i ograničili na košare dobara koje su potrošaču dostupne.

2.3 Matematička formalizacija metode jednakih nagiba

a) Formalizacija dolaska u ravnotežu

Pošto smo pomoću elementarne logike pokazali kako potrošač dolazi u točku ravnoteže, u točku dodira krivulje indiferencije i budžetske crte, sada ćemo dolazak u ravnotežu i karakteristike ravnoteže prevesti u algebarski oblik. Pritom polazimo od pretpostavke da potrošač, kada se zateče u bilo kojoj točki krivulje indiferencije, zna kolika je granična korisnost dobra X_1, u_1 i kolika je granična korisnost dobra X_2, u_2. Osim toga, polazimo i od već prihvaćene pretpostavke da potrošač, kada se zateče u bilo kojoj točki krivulje indiferencije, zna koliko je jedinica dobra X_2 spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 ili, sada još općenitije, koju je količinu dobra X_2, $-dx_2$, spreman žrtvovati za vrlo malu dodatnu količinu dobra X_1, dx_1 da bi ostao na nepromijenjenoj razini zadovoljstva. Uz navedene pretpostavke, kada se količina dobra X_1 poveća za dx_1 jedinica, prirast je korisnosti zbog tog vrlo malog povećanja u_1dx_1 jedinica. Ovo je povećanje korisnosti jednako smanjenju korisnosti zbog smanjenja količine dobra X_2 za $-dx_2$ jedinica jer se pri supstituciji dobra X_1 za dobro X_2 razina korisnosti ne mijenja. Smanjenje korisnosti iznosi u_2dx_2 jedinica. Iz navedenog proizlazi da u svakoj točki krivulje indiferencije vrijedi

$$u_1dx_1 + u_2dx_2 = 0 \tag{1}$$

Što potrošača potiče da se kreće po budžetskoj crti i prelazi s jedne na drugu krivulju indiferencije sve dok ne dođe u točku, u našem slučaju u točku x^M, u kojoj je neka krivulja indiferencije, u našem slučaju krivulja indiferencije I^M, tangenta na budžetsku crtu? Potrošač prvenstveno zapaža da bi on, kada bi se zatekao u bilo kojoj točki budžetske crte u kojoj je granična stopa tržišne transformacije manja od granične stope supstitucije, na primjer, u našem slučaju u točki x^1, iz svog konstantnog dohotka M mogao izdvojiti dM jedinica dohotka za koji na tržištu, po tržišnoj cijeni p_2, može kupiti $-dx_2$ jedinica dobra X_2 koje je spreman žrtvovati za dx_1 jedinica dobra X_1, stoga možemo pisati

$$-\frac{dM}{p_2} = dx_2. \tag{2}$$

Nadalje, potrošač zna da bi za izdvojeni dio dohotka, dM, na tržištu, po tržišnoj cijeni p_1, mogao kupiti više od dx_1 jedinica dobra X_1, stoga vrijedi nejednakost

$$\frac{dM}{p_1} > dx_1. \tag{3}$$

Napokon, potrošaču postaje sasvim jasno da on više ne mora ostati na krivulji indiferencije koja prolazi kroz presjecište s kojeg je pošao već da, pošto za dio izdvojenog dohotka kupi količinu dx_1 koja bi ga zadržala na toj krivulji indiferencije, s ostatkom nepotrošenog izdvojenog novca može prijeći na krivulju indiferencije koja je udaljenija od koordinatnog početka od krivulje indiferencije na kojoj bi ostao kad ne bi proveo preraspodjelu dohotka. Budući da je $\frac{dM}{p_1} > dx_1$ i $-\frac{dM}{p_2} = dx_2$, očito je kako se jednadžba (1) preraspodjelom dohotka preobražava u nejednadžbu

$$u_1 \frac{dM}{p_1} - u_2 \frac{dM}{p_2} > 0. \tag{4}$$

Preraspodjela dohotka s kupnje $\frac{dM}{p_2} = -dx_2$ jedinica dobra X_2 dovodi tako do većeg prirasta korisnosti što ga uzrokuje povećanje kupnje dobra X_1 za $\frac{dM}{p_1}$ jedinica od smanjenja korisnosti što ga uzrokuje smanjenje kupnje dobra X_2 za $\frac{dM}{p_2}$ jedinica. Sve dok vrijedi nejednakost (4), potrošač će provoditi preraspodjelu dohotka jer ga ona vodi na sve veću razinu korisnosti. U trenutku kada potrošač za izdvojeni dohodak dM iz konstantnog dohotka M može kupiti $\frac{dM}{p_2} = -dx_2$ jedinica dobra X_2 i samo $\frac{dM}{p_1} = dx_1$ jedinica dobra X_1, povećanje korisnosti od preraspodjele dohotka prestaje. U točki u kojoj se zaustavlja povećanje korisnosti od preraspodjele dohotka, u našem slučaju u točki x^M, nejednakost (4) postaje jednakost

$$u_1(x^M) \frac{dM}{p_1} - u_2(x^M) \frac{dM}{p_2} = 0 \tag{5}$$

U toj je točki spremnost potrošača da žrtvuje $-\frac{dx_2}{dx_1}$ jedinica dobra X_2 za dodatnu jedinicu dobra X_1, subjektivna vrijednost jedinice dobra X_1 izražena određenog broja vrijednošću jedinica dobra X_2 jednaka objektivnoj vrijednosti jedinice dobra X_1 koju tržište izražava vrijednošću određenog broja jedinica dobra X_2, vrijednosti $\frac{p_1}{p_2}$. Kada bi se potrošač sada pomaknuo tek malo desno od točke x^M, on bi se zatekao na krivulji indiferencije koja je bliže koordinatnom početku od krivulje indiferencije I^M koja dodiruje budžetsku crtu u točki x^M. Drugim riječima, kada bi se potrošač pomaknuo tek malo udesno od točke x^M, on bi se uvjerio da za izdvojeni dohodak dM za koji bi na tržištu mogao kupiti $\frac{dM}{p_2} = dx_2$ jedinica dobra X_2, na tržištu ne bi mogao kupiti dx_1 jedinica dobra X_1, $\frac{dM}{p_1} < -dx_1$. U tom bi se slučaju jednadžba (1) preraspodjelom dohotka preobrazila u nejednadžbu

$$-u_1\frac{dM}{p_1}+u_2\frac{dM}{p_2}>0, \tag{6}$$

koja nakon množenja s (-1) poprima oblik

$$u_1\frac{dM}{p_1}-u_2\frac{dM}{p_2}<0. \tag{7}$$

U zatečenom bi stanju vrijednost jedinice dobra X_2 za potrošača bila veća od vrijednosti koju jedinici dobra X_2 pripisuje tržište, stoga bi on iz konstantnog dohotka M izdvojio iznos dohotka dM kojim bi na tržištu mogao kupiti $-dx_1$ jedinica dobra X_1, $\frac{dM}{p_1}=-dx_1$, ali i više od dx_2 jedinica dobra X_2, $\frac{dM}{p_2}>dx_2$, i na taj bi način izabrao put povratka u točku ravnoteže x^{M}, u točku u kojoj je ispunjena jednakost (5).

Kada bi se potrošač zatekao u točki x^2, u točki u kojoj je $\frac{dM}{p_2}=dx_2$ i $\frac{dM}{p_1}<-dx_1$, on bi proveo analizu koja je analogna analizi slučaja u kojem je $\frac{dM}{p_2}=-dx_2$ i $\frac{dM}{p_1}>dx_1$, s tom razlikom što bi se sada preraspodjelom dohotka s kupnje dobra X_1 vratio u točku ravnoteže x^{M} supstituirajući dobro X_1 dobrom X_2. Pokušaj da se pomakne lijevo od točke x^{M} odveo bi ga na krivulju indiferencije koja je bliže koordinatnom početku od krivulje indiferencije I^M i upozorio ga da se preraspodjelom dohotka s kupnje dobra X_2 vrati u točku ravnoteže x^{M}. Možemo stoga zaključiti da je točka u kojoj potrošač, uz zadane cijene i zadani dohodak, maksimizira svoju korisnost točka stabilne ravnoteže x^{M}, točka u kojoj krivulja indiferencije dodiruje budžetsku crtu, točka u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara jednaka graničnoj stopi tržišne transformacije ili ekonomskoj supstituciji između dobara:

$$\frac{u_1(\mathrm{x}^M)}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})}=\frac{p_1}{p_2}\ . \tag{7}$$

b) Izvođenje granične korisnosti dohotka

Vratimo se ponovno jednakosti (5) koju, nakon dijeljenja s dM, možemo napisati u obliku

$$u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})\cdot\frac{1}{p_1}=u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})\cdot\frac{1}{p_2}\ . \tag{8}$$

Jednakost se (7), nakon množenja s $\frac{u_2(\mathrm{x}^M)}{p_1}$, također svodi na jednakost (8). Jedinice u brojnicima razlomaka na lijevoj i desnoj strani jednakosti (8) zamišljamo sada kao vrlo male jedinice dohotka, $dM=1$, odnosno kao vrlo male jedinice novčanih izdataka na dobro

X_1 i dobro X_2. Stoga nam kvocijent $\frac{1}{p_1}$ kaže da bi potrošač u ravnoteži, kada bi na kupnju dobra X_1 izdao dodatnu vrlo malu jedinicu dohotka, mogao kupiti $\frac{1}{p_1} = dx_1$ jedinica dobra X_1, a kvocijent $\frac{1}{p_2}$ da bi potrošač u ravnoteži, kada bi na kupnju dobra X_2 izdao dodatnu vrlo malu jedinicu dohotka, mogao kupiti $\frac{1}{p_2} = dx_2$ jedinica dobra X_2. $u_1 dx_1$ je korisnost od dx_1 jedinica dobra X_1 koje su kupljene dodatnom vrlo malom jedinicom novca, a $u_2 dx_2$ korisnost od dx_2 jedinica dobra X_2 koje su kupljene dodatnom vrlo malom jedinicom novca. Bez obzira na to na koje bi dobro potrošač potrošio vrlo malu dodatnu jedinicu dohotka, on bi, budući da se nalazi u ravnoteži, u oba slučaja ostvario jednak prirast korisnosti. Zbog toga je $\frac{u_1}{p_1}$ prirast korisnosti od dodatno potrošene jedinice dohotka na kupnju dobra X_1 i $\frac{u_2}{p_2}$ prirast korisnosti od dodatno potrošene jedinice dohotka na kupnju dobra X_2. Prirast korisnosti od dodatne vrlo male jedinice dohotka zove se *granična korisnost dohotka.* S tim je u skladu $\frac{u_1}{p_1}$ granična korisnost dohotka izdanog na dobro X_1, a $\frac{u_2}{p_2}$ granična korisnost dohotka izdanog na dobro X_2. Stoga možemo reći da je potrošač u ravnoteži kada je granična korisnost dohotka izdanog na dobro X_1 jednaka graničnoj korisnosti dohotka izdanog na dobro X_2:

$$\frac{u_1(\mathrm{x}^\mathrm{M})}{p_1} = \frac{u_2(\mathrm{x}^\mathrm{M})}{p_2} . \tag{9}$$

Zajedničku ćemo vrijednost ovih dvaju kvocijenata u ravnoteži, kvocijenta između granične korisnosti dobra X_1 po jedinici dohotka, $\frac{u_1(\mathrm{x}^\mathrm{M})}{p_1}$, i kvocijenta između granične korisnosti dobra X_2 po jedinici dohotka, $\frac{u_2(\mathrm{x}^\mathrm{M})}{p_2}$, označiti s $\lambda^M(\mathrm{x}^\mathrm{M})$. U skladu s navedenim možemo pisati da u ravnoteži vrijedi

$$\frac{u_1(\mathrm{x}^\mathrm{M})}{p_1} = \frac{u_2(\mathrm{x}^\mathrm{M})}{p_2} = \lambda^\mathrm{M}(\mathrm{x}^\mathrm{M}) \tag{10}$$

i reći da je $\lambda^M(\mathrm{x}^\mathrm{M})$ granična korisnost dohotka ili granična korisnost novca u ravnoteži.

Zanimljivo je također uočiti da se kvocijent $\frac{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})}{p_1}$ može protumačiti kao odnos granične korisnosti i graničnih troškova. U brojniku je tog kvocijenta granična korisnost dobra X_1 u ravnoteži, $u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})$. Cijena p_1 u nazivniku iznos je koji potrošač mora potrošiti na dodatnu jedinicu dobra X_1, stoga je cijena dobra X_1 granični trošak dobra X_1. Na jednak se način kvocijent $\frac{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})}{p_2}$ može protumačiti kao odnos granične korisnosti dobra X_2 i graničnog troška dobra X_2. I ovo tumačenje daje jasno do znanja da zajednička vrijednost kvocijenata u ravnoteži, $\lambda^M(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})$, izražava graničnu korisnost dohotka, dodatnu korisnost koju uzrokuje dodatno potrošena jedinica dohotka. Dodatnom jedinicom dohotka, $dM = 1$, potrošač kupuje $\frac{1}{p_1} = dx_1$ jedinica dobra X_1, a dx_1 jedinica dobra X_1 potrošaču daju $u_1 dx_1$ jedinica korisnosti.

c) Rješenja modela i formiranje sustava jednadžbi koje ih određuju

Pretpostavimo sada da je iz (7) moguće eksplicitno izraziti količine endogene varijable x_2 kao funkciju endogene varijable x_1:

$$x_2 = x_2(x_1; p_1, p_2). \tag{11}$$

Jednadžba (11) izvedena je samo iz uvjeta dodirivosti krivulje indiferencije i budžetske crte, ali ne iz budžetskog ograničenja, stoga ona vrijedi za sve razine dohotka i definira crtu koja povezuje sve moguće točke optimuma, odnosno sve moguće točke dodira između budžetskih crta i krivulja indiferencije. Ova se crta koju predočuje slika 2., zove *putanja dohodak-potrošnja*. Kada se (11) uvrsti u budžetsku jednadžbu dobije se

$$p_1 x_1 + p_2 x_2(x_1; p_1, p_2) = M, \tag{12}$$

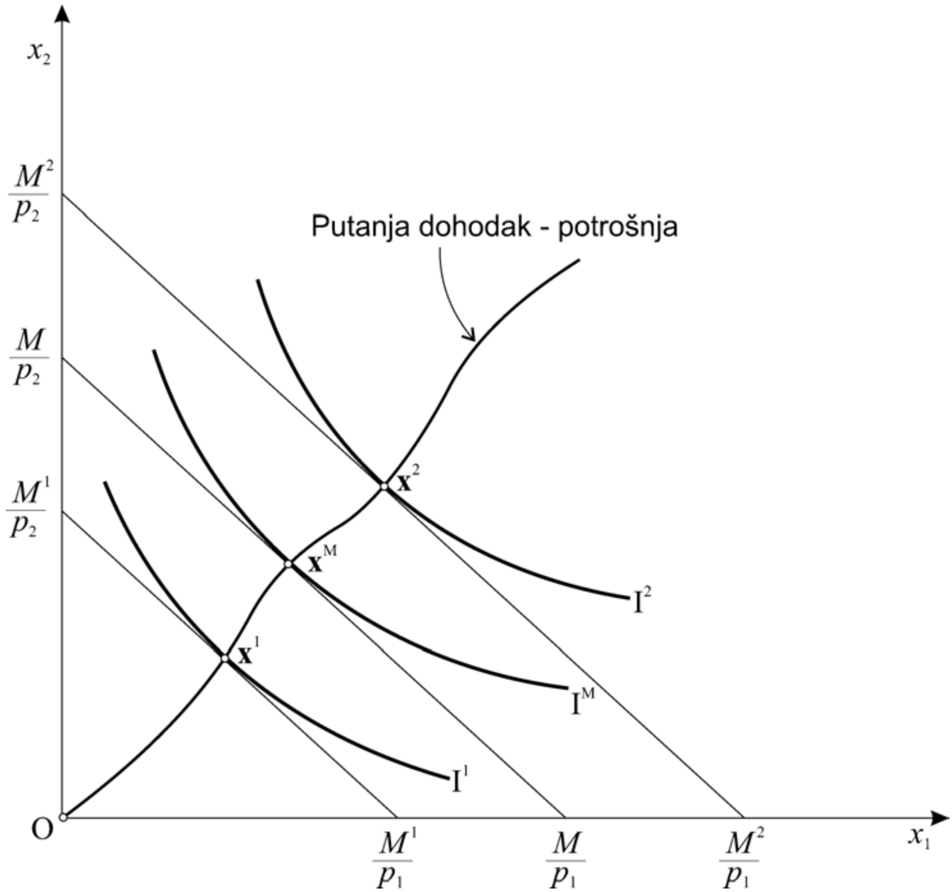
odakle proizlazi da je *Marshallova funkcija potražnje* za dobrom X_1:

$$x_1 = x_1^M(p_1, p_2, M). \tag{13}$$

Za bilo koje zadane cijene i bilo koji zadani dohodak iz (13) se dobije optimalna količina dobra X_1 pri kojoj se maksimizira potrošačeva korisnost. To je samo prva koordinata točke optimuma x^{M}. Kada se (13) uvrsti u (11) dobije se Marshallova funkcija potražnje za dobrom X_2:

$$x_2 = x_2^M(p_1, p_2, M). \tag{14}$$

Marshallove funkcije potražnje (13) i (14) katkad se zovu *funkcije optimalnog izbora*, katkad *funkcije potražnje s konstantnim novčanim dohotkom* i vrlo često samo *obične funkcije potražnje*. Potrošačevo zadovoljstvo maksimizira košara dobara $\mathrm{x}^{\mathrm{M}} = (x_1^M, x_2^M)$. To je na krivulji dohodak-potrošnja od koordinatnog početka najudaljenija košara dobara koju potrošač pri zadanim cijenama i pri zadanom dohotku može pribaviti.



Slika 2. Putanja dohodak-potrošnja

Putanja dohodak-potrošnja skup je potencijalnih točaka ravnoteže, točaka u kojima krivulje indiferencije dodiruju različite paralelne budžetske crte. Njezino izvođenje ne ovisi o dohotku, stoga ona predočuje košare dobara između kojih svaka maksimizira potrošačevu korisnost za odgovarajuću zadanu razinu dohotka. Što je zadana razina dohotka veća, optimalna je košara dobara na putanji dohodak-potrošnja udaljenija od koordinatnog početka. Zamislite da je zadana razina dohotka *M*. U tom slučaju košara dobara x^{M}, predočena presjecištem budžetske crte i putanje dohodak-potrošnja, daje potrošaču maksimalnu korisnost *u*.

Nakon uvrštavanja funkcija potražnje (13) i (14) u funkciju korisnosti, kao funkciju cilja, dobije se *indirektna funkcija korisnosti:*

$$v(p_1, p_2, M) = u(x_1^M(p_1, p_2, M), x_2^M(p_1, p_2, M)) \,, \qquad (15)$$

iz koje se, uvažavajući već zadane cijene i već zadani dohodak, dobije maksimalna vrijednost funkcije korisnosti. Indirektna funkcija korisnosti daje maksimalnu vrijednost funkcije korisnosti za bilo koji skup cijena i bilo koju razinu dohotka. Ona ističe činjenicu da razina korisnosti, u određenom smislu, neizravno ovisi o cijenama dobara i potrošačevu dohotku, stoga se i zove indirektna funkcija korisnosti.

Lako je dokučiti da je zajednička vrijednost kvocijenata u ravnoteži, $\lambda^{M}(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})$, $u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})/p_1$ ili $u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})/p_2$. Ovdje nas zanima više od toga. Zanima nas formiranje sustava jednadžbi iz kojeg su proizašla rješenja Marshallove funkcije potražnje x_1^M, x_2^M i λ^{M}. Iz kvocijenta

$$\frac{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})}{p_1} = \lambda^{\mathrm{M}} \tag{16}$$

proizlazi jednakost

$$u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{M}}) - \lambda^{M} p_1 = 0, \tag{17}$$

a iz kvocijenta

$$\frac{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})}{p_2} = \lambda^{\mathrm{M}} \tag{18}$$

jednakost

$$u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{M}}) - \lambda^{M} p_2 = 0\ . \tag{19}$$

Iz jednakosti (17) i (19) proizlaze dvije jednadžbe sustava s tri nepoznanice. Kada im se nadoda jednadžba ograničenja, onda se dobije sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice iz kojeg su proizaašla rješenja x_1^M, x_2^M i λ^{M}. Taj je sustav

$$\begin{aligned} u_1(\mathrm{x})\text{-}\lambda\ \mathrm{p}_1 &= 0 \\ u_2(\mathrm{x})\text{-}\lambda\ \mathrm{p}_2 &= 0 \\ p_1x_1 + p_2x_2 - M &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Već smo ilustrirali kako se ovaj sustav rješava. Primijetimo još da kvocijent $\lambda = \dfrac{u_1}{p_1} = \dfrac{u_2}{p_2}$ u jednadžbama sustava igra ulogu *multiplikatora* koji množi funkcije graničnih troškova tako da vrijednosti umnožaka u točki ravnoteže budu jednake odgovarajućim vrijednostima funkcija graničnih korisnosti.

3. MODEL OGRANIČENE MINIMIZACIJE IZDATAKA

Vidjeli smo da potrošač problem ograničene maksimizacije korisnosti rješava tako da putuje po budžetskoj crti sve dok ne naiđe na jedinstvenu točku, košaru, ravnoteže x^{M}, u kojoj krivulja indiferencije I^M siječe putanju dohodak–potrošnja i dodiruje budžetsku crtu definiranu cijenama p_1 i p_2 i potrošačevim dohotkom M. Na putanji dohodak-potrošnja košara dobara x^{M} najudaljenija je košara dobara od koordinatnog početka koju potrošač može pribaviti za zadane cijene p_1 i p_2 i za zadani dohodak M, stoga je i krivulja indiferencije I^M najudaljenija krivulja indiferencije od koordinatnog početka na kojoj se potrošač može naći kupujući košaru dobara x^{M}.

Pretpostavimo sada da nas zanima kako bi potrošač, pri jednakim cijenama dobara kao i u problemu maksimizacije korisnosti, minimizirao izdatke za maksimalnu razinu korisnosti $u(x_1^M, x_2^M)$ dobivenu kao rješenje problema ograničene maksimizacije. Kada bi dovitljivi potrošač znao da je x^{M} optimalna košara dobara koja za zadane cijene i zadani dohodak maksimizira njegovu korisnost, on bi vjerojatno odmah odgovorio da je košara dobara x^{M} ona košara koja minimizira izdatke za zadanu razinu korisnosti i da njegovi minimalni izdatci iznose M. Međutim, mi pretpostavljamo da potrošač ne zna rezultate maksimizacije korisnosti i da on u tim uvjetima mora riješiti problem minimizacije izdataka:

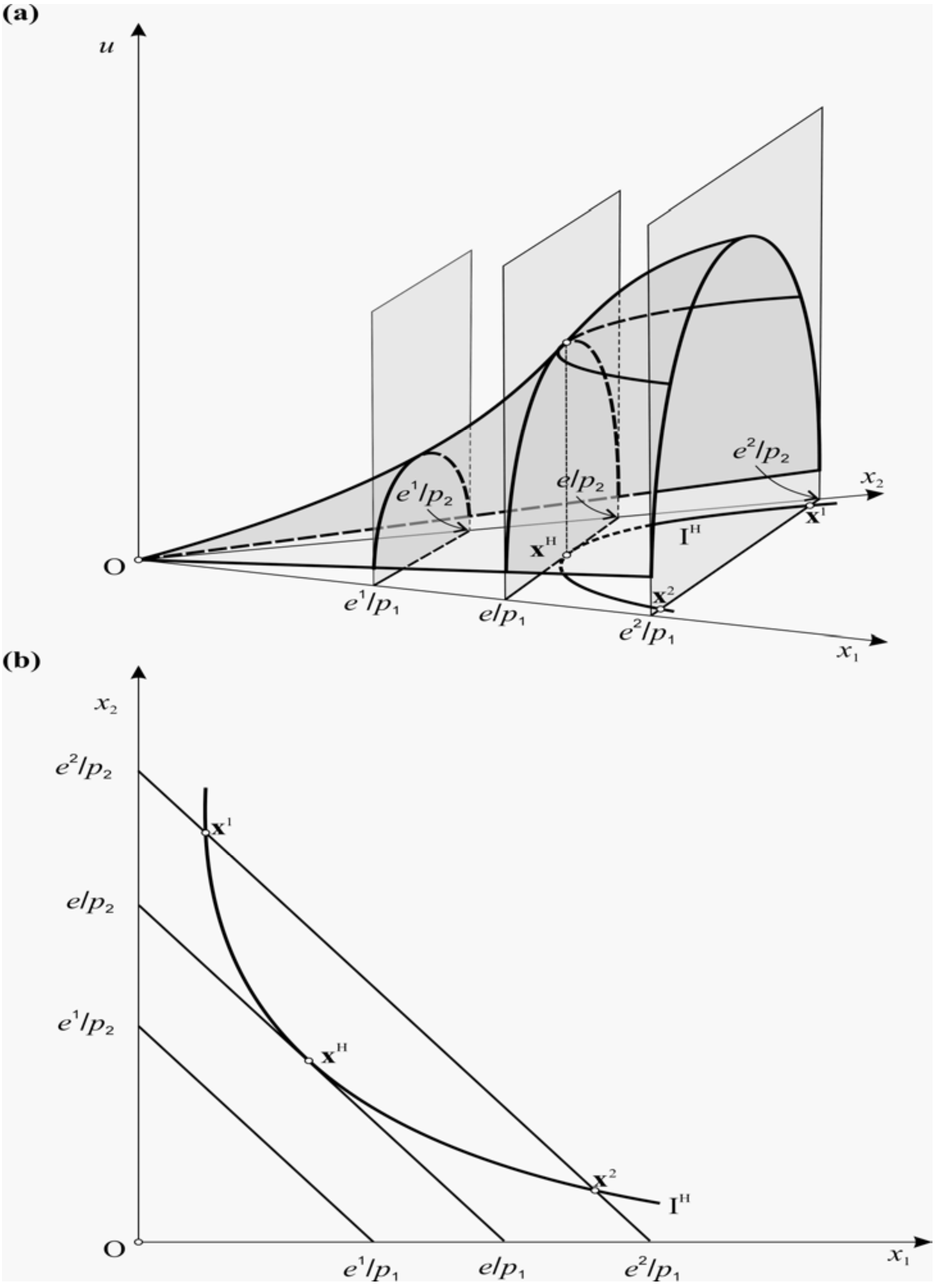
$$\begin{aligned} &\min_{x_1, x_2 \geq 0} \ (p_1 x_1 + p_2 x_2) \\ &\text{uz uvjet } \ u(x_1, x_2) = u, \end{aligned} \tag{1}$$

gdje je u zadana razina korisnosti.

3.1 Dolazak u ravnotežu metodom jednakih nagiba-grafički pristup

Sliku 3 s našeg stajališta možemo shvatiti kao grafičku ilustraciju ograničene minimizacije za zadanu razinu korisnosti dobivenu kao rješenje problema ograničene maksimizacije i kao grafičku ilustraciju problema ograničene minimizacije sa stajališta potrošača. Potrošaču bi sada zasigurno palo na um da problem minimizacije izdataka za zadanu korisnost može riješiti krećući se uzduž krivulje indiferencije koja predočuje zadanu razinu korisnosti i uspoređujući na tom putu koliko bi ga pri zadanim cijenama dobara koštale košare dobara dok konačno ne naiđe na najjeftiniju jedinstvenu košaru dobara x^{H} u kojoj crta jednakih izdataka siječe putanju potrošnja-izdatci odnosno putanju korisnost-izdatci, preimenovanu putanju dohodak-potrošnja, i dodiruje zadanu krivulju indiferencije. Košara dobara x^{H} koja potrošaču daje zadanu razinu korisnosti najmanje je udaljena košara dobara od koordinatnog početka na putanji korisnost-izdatci koja može ispuniti tu zadaću, stoga je i crta jednakih izdataka kojoj pripada košara dobara x^{H}, crta jednakih izdataka koja je najmanje udaljena od koordinatnog početka. Za razliku od potrošača, mi koji smo svjesni da je zadana razina korisnosti maksimalna razina korisnosti dobivena kao rješenje problema ograničene maksimizacije korisnosti i da se cijene dobara ne mijenjaju, znamo da su količine dobara u košari dobara x^{H} jednake količinama dobara u košari dobara x^{H}, znamo da je $\mathrm{x}^{\mathrm{H}}=\mathrm{x}^{\mathrm{M}}$ i da je iznos minimalnih izdataka potrošača na kupnju košare dobara x^{H} jednak iznosu zadanog dohotka M iz problema maksimizacije korisnosti, odnosno da je optimalna crta jednakih izdataka u problemu minimizacije izdataka budžetska crta iz problema maksimizacije korisnosti. Ili općenitije, mi znamo da je optimalna vrijednost funkcije izdataka, kada je maksimalna vrijednost funkcije korisnosti iz problema ograničene maksimizacije korisnosti zadana kao ograničenje, jednaka razini ograničenja, dohotku M, iz problema ograničene maksimizacije korisnosti. Jednako tako znamo da je optimalna vrijednost funkcije korisnosti u problemu ograničene maksimizacije korisnosti, kada je minimalna vrijednost funkcije izdataka iz problema ograničene minimizacije izdataka zadana kao ograničenje, jednaka razini ograničenja, zadanoj razini korisnosti problema ograničene minimizacije. Iz do sada rečenog nije teško shvatiti da je indirektna funkcija korisnosti, kada se cijene dobara ne mijenjaju, strogo rastuća funkcija dohotka koju je moguće invertirati i na taj način dobiti funkciju izdataka $e = e(p_1, p_2, u)$, kao i to da je funkcija izdataka, kada se cijene ne mijenjaju, strogo rastuća funkcija razine korisnosti koju je moguće invertirati i na taj način dobiti indirektnu funkciju korisnosti $v = v(p_1, p_2, M)$. Ovo je vrlo važan nalaz jer ukazuje da nam dvije vrste optimizacije daju iste obavijesti. Ovdje ćemo završiti ovaj vrlo kratak, ali nadamo se, i vrlo koristan izlet na područje dualnosti na koje ćemo se povremeno vraćati tek pošto malo podrobnije opišemo kako potrošač dolazi do optimalne kombinacije količina x_1^H i x_2^H,, do količina koje minimiziraju njegove izdatke za zadanu razinu korisnosti.

Pretpostavimo da se na slici 3., crtežu (b), potrošač zatekao u točki x^1 u kojoj je spreman žrtvovati $-dx_2$ jedinica dobra X_2 za dx_1 jedinica dobra X_1 i u kojoj se na tržištu za $-dx_2$ jedinica dobra X_2 može dobiti više od dx_1 jedinica dobra X_1, u točki u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara veća od granične stope tržišne transformacije. Potrošač bi u toj okolnosti odmah shvatio da bi samo za dio izdataka koji bi imao na $-dx_2$ jedinica dobra X_2 na tržištu mogao kupiti dx_1 jedinica dobra X_1 i tako ostati na zadanoj razini korisnosti smanjujući izdatke za zadanu razinu korisnosti u odnosu na izdatke koje bi imao u točki x^1. Nakon pomaka iz točke x^1 niz krivulju indiferencije u novu točku sjecišta krivulje indiferencije i nove crte jednakih izdataka koja je paralelna s crtom jednakih izdataka koja prolazi kroz točku x^1, ali i bliža od nje koordinatnom početku, potrošač bi ponovno usporedio $-dx_2$ jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dx_1 jedinica dobra X_1 s brojem jedinica dobra X_2 za koje na tržištu može dobiti dx_1 jedinica dobra X_1. Ako bi ponovno utvrdio da je broj jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dx_1 jedinica dobra X_1 veći od broja jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dx_1 jedinica dobra X_1, potrošač bi shvatio da još može sniziti izdatke za zadanu razinu korisnosti silazeći niz krivulju indiferencije u novo sjecište nepromijenjene krivulje indiferencije s novom crtom jednakih izdataka. Ovo bi putovanje trajalo sve dok potrošač ne naiđe na jedinstvenu točku x^{H} u kojoj je broj jedinica dobra X_2, $-dx_2$ koji je on spreman žrtvovati za dx_1 jedinica dobra X_1, jednak broju jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dx_1 jedinica dobra X_1, sve dok ne naiđe na točku x^{H} u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara jednaka graničnoj stopi tržišne transformacije. Točka x^{H} je točka ravnoteže, točka u kojoj je potrošačeva subjektivna vrijednost dodatne jedinice dobra X_1 izražena vrijednošću određenog broja jedinica dobra X_2 koje je on spreman zauzvrat žrtvovati, jednaka objektivnoj vrijednosti dodatne jedinice dobra X_1 koju tržište izražava vrijednošću određenog broja jedinica dobra X_2. Kada bi potrošač krenuo niz krivulju indiferencije dalje od točke x^{H} i tako pokušao sniziti izdatke za zadanu razinu korisnosti, on bi uvidio da je broj jedinica dobra X_2, $-dx_2$ koji je on spreman žrtvovati za dx_1 jedinica dobra X_1, manji od broja jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dx_1 jedinica dobra X_1, da je granična stopa supstitucije između dobara manja od granične stope tržišne transformacije i zbog toga bi se vratio u točku ravnoteže x^H. Na sličan bi se način mogao opisati dolazak u točku ravnoteže polazeći od pretpostavke da se potrošač zatekao u točki x^2.



Slika 3. Potrošačeva ravnoteža u slučaju ograničene minimizacije

Na crtežu (a) graf izopresjeka strogo rastuće funkcije korisnosti koji je paralelan s ravninom x_1Ox_2, predočuje zadanu razinu korisnosti $u = u(x_1, x_2)$ i dodiruje graf ravnine koja je okomita na ravninu x_1Ox_2 u točki $(\mathrm{x}^{\mathrm{H}}, u)$. Okomita je projekcija grafa tog izopresjeka na ravninu x_1Ox_2 krivulja indiferencije I^H koja u točki x^{H} dodiruje crtu jednakih izdataka $e = p_1x_1 + p_2x_2$. Točka x^{H} jedina je točka koja zadovoljava i jednadžbu jednakih izdataka $e = p_1x_1 + p_2x_2$ i jednadžbu krivulje indiferencije $u = u(x_1, x_2)$. Košara dobara koju predočuje ta točka minimizira potrošačeve izdatke za zadanu razinu korisnosti zbog toga što svaka druga košara dobara koja pripada krivulji indiferencije I^H pripada crti jednakih izdataka koja je od koordinatnog početka udaljenija od crte jednakih izdataka $e = p_1x_1 + p_2x_2$ i zbog toga što nijedna košara dobara koja pripada krivulji indiferencije I^H ne pripada nijednoj crti jednakih izdataka koja je bliže koordinatnom početku od crte $e = p_1x_1 + p_2x_2$, stoga su potrošačevi minimalni izdatci $e = p_1x_1^H + p_2x_2^H$.

Na crtežu (b) svaka točka na krivulji indiferencije predočuje košaru dobara s presjecišta neke crte jednakih izdataka i krivulje indiferencije. Potrošač se želi domoći košare dobara koja mu minimizira izdatke za zadanu razinu korisnosti. Tu košaru traži krećući se po krivulji indiferencije i uspoređujući broj jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu vrlo malu jedinicu dobra X_1, graničnu stopu supstitucije između dobara, s brojem jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1, s graničnom stopom tržišne transformacije. Ako je granična stopa supstitucije između dobara veća od granične stope tržišne transformacije, kao što je to slučaj u točki x^1, potrošač u mislima započinje postupno preraspodjeljivati izdatke s kupnje dobra X_2 na kupnju dobra X_1 i prelaziti na crte jednakih izdataka koje su sve manje udaljene od koordinatnog početka. To čini sve dok ne stigne u jedinstvenu točku stabilne ravnoteže x^{H}, u točku u kojoj je njegova subjektivna vrijednost dodatne jedinice dobra X_1 izražena vrijednošću broja jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za tu jedinicu jednaka objektivnoj vrijednosti dodatne jedinice dobra X_1 koju tržište izražava vrijednošću jednakog broja jedinica dobra X_2. Potrošač ne može prijeći na crtu jednakih izdataka koja je bliže koordinatnom početku od crte jednakih izdataka $e = p_1x_1 + p_2x_2$ jer na toj crti ne bi bilo košare dobara koja pripada zadanoj krivulji indiferencije. Na jednak se način opisuje dolazak u ravnotežu iz točke x^2 u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara manja od granične stope tržišne transformacije.

3.2 Matematička formalizacija metode jednakih nagiba

a) Formalizacija dolaska u ravnotežu

Matematička formalizacija prethodnih nalaza slična je matematičkoj formalizaciji nalaza u problemu ograničene maksimizacije korisnosti. U slučaju ograničene minimizacije izdataka polazimo od činjenice da je u bilo kojoj točki krivulje indiferencije, sa stajališta potrošača koji izražava da je voljan žrtvovati $-dx_2$ jedinica dobra X_2 za dx_1 jedinica dobra X_1 da bi ostao na jednakoj razini zadovoljstva, smanjenje korisnosti zbog smanjenja količine dobra X_2 za $-dx_2$ jedinica, $-u_2 dx_2$, jednako prirastu korisnosti zbog povećanja dobra X_1 za dx_1 jedinica, $u_1 dx_1$. Polazimo od činjenice da je totalni diferencijal jednadžbe krivulje indiferencije jednak nuli, odnosno od činjenice da i dalje vrijedi jednakost (1) iz prethodnog odjeljka. Pretpostavka da se potrošač zatekao u točki x^1 znači da bi on dio dohotka dM za koji po tržišnoj cijeni p_2 može kupiti $-dx_2$ jedinica dobra X_2 bio spreman žrtvovati za kupnju dx_1 jedinica dobra X_1 po tržišnoj cijeni p_1. Iznos dohotka dM podijeljen cijenom p_2 jednak je broju jedinica dobra X_2, $-dx_2$ koji je potrošač spreman žrtvovati za dx_1 jedinica dobra X_1:

$$-\frac{dM}{p_2} = dx_2. \tag{2}$$

Međutim, potrošaču koji se zatekao u točki x^1 tržište omogućuje da za iznos dM po cijeni p_1 kupi više od dx_1 jedinica dobra X_1:

$$\frac{dM}{p_1} > dx_1. \tag{3}$$

Budući da želi ostati na nepromijenjenoj razini korisnosti, potrošač sada zapaža da bi samo dio iznosa dM morao izdati na kupnju dx_1 jedinica dobra X_1 i da bi za nepotrošeni dio iznosa dM smanjio svoje izdatke za zadanu razinu zadovoljstva. Kad se (2) i (3) uvrste u (1), dobije se nejednakost

$$u_1 \frac{dM}{p_1} - u_2 \frac{dM}{p_2} > 0 \tag{4}$$

koja potrošača upozorava da bi on sišao s krivulje indiferencije s koje ne želi sići kada bi čitav iznos dM izdao na kupnju dobra X_1. Da smanji izdatke za zadanu razinu korisnosti, potrošač bi stoga nastavio postupno supstituirati dobro X_2 dobrom X_1 i prelazio bi na crte jednakih izdataka koje su sve bliže koordinatnom početku dok god na krivulji indiferencije po kojoj se kreće ne bi došao u točku u kojoj je $-\frac{dM}{p_2} = dx_2$ i $\frac{dM}{p_1} = dx_1$, odnosno u točku u kojoj je

$$u_1 \frac{dM}{p_1} - u_2 \frac{dM}{p_2} = 0. \tag{5}$$

To je točka ravnoteže x^H u kojoj crta jednakih izdataka dodiruje krivulju indiferencije. Kad bi se potrošač, idući niz krivulju indiferencije, pomaknuo tek malo desno od točke x^H, on bi se zatekao na crti jednakih izdataka koja je udaljenija od koordinatnog početka od crte jednakih izdataka koja dodiruje krivulju indiferencije u točki x^H. Potrošač bi se odmah uvjerio da za iznos dM, za koji bi po cijeni p_2 na tržištu mogao kupiti $-dx_2$ jedinica dobra X_2, više ne bi mogao kupiti dx_1 jedinica dobra X_1, odnosno da bi sada vrijedila nejednakost:

$$u_1 \frac{dM}{p_1} - u_2 \frac{dM}{p_2} < 0. \tag{6}$$

Potrošač bi stoga odustao od daljnjeg putovanja i ostao bi u točki stabilne ravnoteže x^{H} koja je za nas, koji znamo da je zadana razina korisnosti u problemu minimizacije dobivena maksimalna razina korisnosti iz problema ograničene maksimizacije, i točka stabilne ravnoteže x^{M}, $\mathrm{x}^{\mathrm{M}} = \mathrm{x}^{\mathrm{H}}$. Na sličan bismo način mogli opisati putovanje potrošača u točku ravnoteže x^{H} kada bismo pretpostavili da se potrošač zatekao u točki x^2. Na temelju prethodne analize možemo sada zaključiti da je točka u kojoj potrošač minimizira izdatke za zadanu razinu korisnosti, točka stabilne ravnoteže x^{H}, točka u kojoj crta jednakih izdataka dodiruje krivulju indiferencije, točka u kojoj je granična stopa supstitucije između dobara jednaka graničnoj stopi tržišne transformacije ili ekonomske supstitucije između dobara:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{7}$$

b) Izvođenje graničnog troška korisnosti

Proces maksimizacije korisnosti, uz zadane cijene dobara i zadani dohodak, dovodi potrošača u onu točku u kojoj mu zadnja jedinica potrošenog dohotka na bilo koje dobro daje jednaku korisnost, a proces minimizacije izdataka, uz zadane cijene dobara i zadanu razinu korisnosti u onu točku u kojoj su njegovi izdatci, na količine bilo kojeg dobra koje mu daju dodatnu jedinicu korisnosti jednaki, stoga je, u slučaju minimizacije izdataka, jednakost (7) prikladno pisati u obliku

$$p_1 \frac{1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = p_2 \frac{1}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} \tag{8}$$

Za dodatnu vrlo malu jedinicu korisnosti u ravnoteži, $du = 1$, potrošač bi morao potrošiti $\frac{1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = dx_1$ jedinica dobra X_1. Kad se taj dodatni broj jedinica dobra X_1 pomnoži cijenom dobra X_1, p_1, dobije se prirast izdataka koji uzrokuje prirast korisnosti za jednu vrlo malu jedinicu. Ovaj nalaz možemo izraziti zapisom

$$p_1 \frac{1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = p_1 dx_1 \ . \tag{9}$$

Isto bi tako, za dodatnu vrlo malu jedinicu korisnosti, $du = 1$, u ravnoteži potrošač morao potrošiti $\frac{1}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = dx_2$ jedinica dobra X_2 i zbog toga povećati izdatke za

$$p_2 \frac{1}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = p_2 dx_2. \tag{10}$$

Prirast izdataka koji je neophodan da se korisnost poveća za jednu vrlo malu jedinicu u oba se slučaja izražava izdatcima na dodatne količine dobara koje su neophodne da se taj prirast korisnosti ostvari. Bez obzira na to kojom bi potrošnjom dobra ili kombinacijom potrošnje dobara potrošač povećao korisnost za jednu vrlo malu jedinicu, on bi u oba slučaja imao jednake izdatke jer nalazi u ravnoteži. Prirast izdataka na dodatnu jedinicu korisnosti zove se *granični trošak korisnosti*. Cijene su dobara, kao što znamo, granični troškovi dobara sa stajališta potrošača, stoga je $\frac{p_1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})}$ odnos između graničnog troška dobra X_1 i granične korisnosti dobra X_1, a $\frac{p_2}{u_2(\mathrm{x}^{H})}$ odnos između graničnog troška dobra X_2 i granične korisnosti dobra X_2. Zajedničku ćemo vrijednost ovih dvaju kvocijenata u ravnoteži označiti $\mu^{H}()$ i s tim u skladu pisati

$$\frac{p_1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = \frac{p_2}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = \mu^{H}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}}) \,. \tag{11}$$

Iz (11) se jasno vidi da je $\mu^{H}()$ granični trošak korisnosti u ravnoteži, dodatni trošak što ga uzrokuje dodatna jedinica korisnosti. Dodatnu vrlo malu jedinicu korisnosti, $du = 1$, potrošač ostvaruje potrošnjom $\frac{1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = dx_1$ jedinica dobra X_1 ili potrošnjom $\frac{1}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = dx_2$ jedinica dobra X_2 na koje smo izdali $p_1 dx_1$ ili $p_2 dx_2$ jedinica dohotka. Sada nam je lako objasniti i vezu između granične korisnosti dohotka u ravnoteži, $\lambda^{H}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$, i graničnog troška korisnosti u ravnoteži, $\mu^{H}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$. Budući da je p_1 granični trošak dobra X_1 i $u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{M}}) = u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$ granična korisnost dobra X_1 u ravnoteži te da je p_2 granični trošak dobra X_2 i $u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{M}}) = u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$ granična korisnost dobra X_2 u ravnoteži, zajednička vrijednost $\mu^{H}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$ izražava vrijednost odnosa graničnog troška i granične korisnosti u ravnoteži za oba dobra, a zajednička vrijednost $\lambda^{M}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$ vrijednost odnosa granične korisnosti i graničnog troška u ravnoteži za oba dobra. Očito je dakle da je granična korisnost dohotka u ravnoteži, $\lambda^{M}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$ jednaka recipročnoj vrijednosti graničnog troška korisnosti u ravnoteži, $\mu^{H}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$,

$$\lambda^{M}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}}) = \frac{1}{\mu^{H}(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} \quad . \tag{12}$$

Jednostavno rečeno, u ravnoteži je granična korisnost dohotka jednaka recipročnoj vrijednosti graničnog troška korisnosti.

c) Rješenja modela i formiranje sustava jednadžbi koje ih određuju

Pokušajmo sada naći vrijednosti endogenih varijabli u ravnoteži, vrijednosti x_1^H, x_2^H i μ^H. Radi toga ćemo pretpostaviti da je endogenu varijablu x_2 iz (7) moguće eksplicitno izraziti kao funkciju endogene varijable x_1 i pretpostavku izraziti zapisom:

$$x_2 = x_2(x_1; p_1, p_2) \,. \tag{13}$$

Jednadžbu (13), kao i jednadžbu (11) u problemu ograničene maksimizacije, izvodimo samo iz uvjeta dodirivosti crte jednakih izdataka ili jednakih troškova koja je u biti budžetska crta iz problema ograničene maksimizacije i krivulje indiferencije, ali ne i iz zadane razine korisnosti kao ograničenja. Ulogu dohotka iz problema ograničene maksimizacije ovdje preuzima zadana razina korisnosti. Jednadžba (13) identična je jednadžbi (11) iz problema ograničene maksimizacije, stoga ona vrijedi za sve razine korisnosti i definira crtu koja povezuje sve točke dodira između krivulja indiferencije i paralelnih crta jednakih izdataka. Tako definiranu crtu nazvat ćemo *putanja potrošnja-izdatci ili putanja korisnost-izdatci.* Putanja korisnost-izdatci ujedno je i putanja dohodak-potrošnja koja je izvedena iz modela ograničene minimizacije izdataka kao što je i putanja dohodak-potrošnja putanja korisnost-izdatci koja je izvedena iz modela ograničene maksimizacije korisnosti. Svaka točka na toj dvojnoj putanji predočuje košaru dobara koja maksimizira korisnost za neki zadani iznos dohotka i minimizira izdatke za zadanu maksimalnu korisnost koja je ostvarena tim zadanim iznosom dohotka. Minimalni su izdatci za tu zadanu maksimalnu korisnost jednaki zadanom iznosu dohotka kojim je ta maksimalna korisnost postignuta. Ili obrnuto, svaka točka na toj dvojnoj putanji predočuje košaru dobara koja minimizira izdatke za neku zadanu razinu korisnosti i maksimizira korisnost za zadani dohodak koji je jednak minimalnim izdatcima za zadanu razinu korisnosti. Maksimalna je korisnost za taj zadani minimalni iznos dohotka (izdataka) jednaka zadanoj razini korisnosti koja je ostvarena tim minimalnim iznosom izdataka.

Kada se (13) uvrsti u jednadžbu korivulje indiferencije, dobije se

$$u(x_1, x_2(x_1; p_1, p_2)) = u, \tag{14}$$

odakle proizlazi *Hicksova funkcija potražnje* ili *kompenzirana funkcija potražnje* za dobrom X_1:

$$x_1 = x_1^H(p_1, p_2, u). \tag{15}$$

Hicksova se zove po velikom engleskom ekonomistu Johnu Hicksu. Suoznaka H u funkciji mnemotehničke je naravi. Ona nam samo pomaže da se lakše sjetimo kako se radi o Hicksovoj funkciji potražnje. Ovdje se radi o modelu u kojem se realni dohodak potrošača ne mijenja. Ovaj je model misaona konstrukcija u skladu s kojom potrošač uvijek ima točno onoliko novčanih sredstava koliko mu je potrebno da stalno bude na istoj krivulji indiferencije. Prijelazom iz jedne u drugu točku na krivulji indiferencije nominalni se dohodak potrošača prilagođuje tako da mu se oduzme višak do iznosa koji mu je neophodan da ostane na istoj krivulji indiferencije ili tako da mu se nadoda manjak do iznosa koji mu je neophodan da ostane na istoj krivulji indiferencije. Zbog toga se izvedena funkcija potražnje zove kompenzirana funkcija potražnje.

Za bilo koje zadane cijene dobara i bilo koju zadanu razinu korisnosti iz (19) se dobije optimalna količina dobra X_1 pri kojoj se minimizira potrošačev izdatak za zadanu razinu korisnosti. To je samo prva koordinata točke optimuma x^{H}. Kada se (15) uvrsti u (13), dobije se Hicksova funkcija potražnje ili kompenzirana funkcija potražnje za dobrom X_2 :

$$x_2 = x_2^H(p_1, p_2, u). \tag{16}$$

Nakon uvrštavanja Hicksovih funkcija potražnje, (15) i (16), u funkciju cilja dobije se *funkcija izdataka:*

$$e(p_1, p_2, u) = p_1 x_1^H(p_1, p_2, u) + p_2 x_2^H(p_1, p_2, u) \tag{17}$$

iz koje se, uzimajući u obzir zadane cijene i zadanu razinu korisnosti, dobiju minimalni izdatci za zadanu korisnost. Funkcija izdataka daje minimalnu vrijednost izdataka za bilo koji skup cijena i bilo koju zadanu razinu korisnosti.

Napokon, Hicksova se funkcija zajedničke vrijednosti dvaju kvocijenata u ravnoteži, $\mu^H(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})$, dobije koristeći (11). Na primjer, pošto se derivira funkcija korisnosti s obzirom na x_1 ili s obzirom na x_2 i u kvocijent $\dfrac{p_1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})}$ ili u kvocijent $\dfrac{p_2}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})}$ uvrste Hicksove funkcije potražnje, dobije se

$$\mu = \mu^H(p_1, p_2, u). \tag{18}$$

Naša razmatranja minimizacije izdataka za zadanu razinu korisnosti možemo završiti formiranjem sustava jednadžbi iz kojeg proizlaze rješenja Hicksove funkcije potražnje x_1^H, x_2^H i μ^H. Činjenicu da je u točki ravnoteže x^{H} nagib krivulje indiferencije jednak nagibu budžetske crte, možemo, kao što znamo, izraziti formalnim zapisom

$$\frac{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = \frac{p_1}{p_2} \tag{19}$$

i dobiveni zapis preformulirati u oblik

$$\frac{p_1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = \frac{p_2}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})}. \tag{20}$$

Kada znakom μ^H označimo zajedničku vrijednost kvocijenata u (20), dobivamo

$$\frac{p_1}{u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = \frac{p_2}{u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{H}})} = \mu^H. \tag{21}$$

Iz (21) proizlaze dvije jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} p_1 - \mu\ u_1(\mathrm{x}\ ) &= 0 \\ p_2 - \mu\ u_2(\mathrm{x}\ ) &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Sustavu (22) koji ima dvije jednadžbe i tri nepoznanice (x_1, x_2, μ) dodajemo jednadžbu ograničenja da bismo dobili sustav koji ima tri jednadžbe i tri nepoznanice:

$$p_1 - \mu\ u_1(\mathrm{x}\ ) = 0$$
$$p_2 - \mu\ u_2(\mathrm{x}\ ) = 0$$
$$u\ \ (x_1, x_2)\text{-}\mu = 0\ . \qquad (23)$$

Već smo ilustrirali kako se rješava ovaj sustav. Primijetimo još da zajednička vrijednost kvocijenata, μ , u jednadžbama igra ulogu *multiplikatora* koji množi funkcije graničnih korisnosti dobara tako da vrijednost umnožaka u točki ravnoteže budu jednake odgovarajućim graničnim vrijednostima funkcije cilja, koje su ovoga puta jednake cijenama dobara odnosno graničnim troškovima dobara.

4. MALO SUSTAVNIJE O DUALNOSTI

Proces rješavanja problema minimizacije izdataka uz ograničenja povremeno smo dovodili u vezu s procesom rješavanja problema maksimizacije korisnosti uz ograničenja. Veza se između dva problema ograničene optimizacije zove dualnost ili dvojnost. Činjenica da smo s našeg stajališta funkciju ograničenja iz problema maksimizacije korisnosti promatrali kao funkciju cilja u problemu minimizacije izdataka i da smo funkciju korisnosti iz problema maksimizacije korisnosti promatrali kao funkciju ograničenja u problemu minimizacije izdataka, znači da su ova dva problema optimizacije duali ili dvojnici jedan drugom. Indirektna je funkcija korisnosti u problemu ograničene maksimizacije korisnosti

$$v = v(p_1, p_2, M), \qquad (1)$$

dok je funkcija izdataka u problemu ograničene minimizacije izdataka

$$e = e(p_1, p_2, u)\ . \qquad (2)$$

Ako je u problemu minimizacije izdataka, kao ograničenje, zadana maksimalna razina korisnosti dobivena kao rješenje problema ograničene maksimizacije, $v(p_1, p_2, M)$, onda su minimalni izdatci za tu razinu korisnosti jednaki zadanom dohotku M iz problema ograničene maksimizacije:

$$e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, M)) = M. \qquad (3)$$

S druge strane, ako se u problemu maksimizacije korisnosti kao dohodovno ograničenje zadaju minimalni izdatci dobiveni kao rješenje problema ograničene minimizacije, $e(p_1, p_2, u)$, onda je maksimalna razina korisnosti jednaka zadanoj razini korisnosti u problemu minimizacije izdataka:

$$v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u. \qquad (4)$$

Slika 4. snagom dokaza ilustrira prethodne tvrdnje.

Pretpostavljamo kako je lako prihvatiti tvrdnju da se, uz ostale nepromijenjene uvjete, korisnost nezasitnog potrošača povećava kada dohodak potrošača raste, odnosno tvrdnju da je indirektna funkcija korisnosti strogo rastuća funkcija dohotka kao i tvrdnju da se, uz ostale nepromijenjene uvjete, izdatci potrošača povećavaju kada se razina korisnosti povećava, odnosno da je funkcija izdataka strogo rastuća funkcija korisnosti. Znanje da je indirektna funkcija korisnosti, kada je promatramo samo kao funkciju dohotka, strogo rastuća funkcija dohotka, omogućuje nam da tu funkciju invertiramo i da na taj način dobijemo funkciju izdataka. Prema tome, iz (4) proizlazi

$$e(p_1, p_2, u) = v^{-1}(p_1, p_2; u). \tag{5}$$

Jednako je tako funkcija izdataka, kada je promatramo samo kao funkciju korisnosti, strogo rastuća funkcija korisnosti koja nam omogućuje da funkciju izdataka invertiramo i da na taj način dobijemo funkciju korisnosti. Prema tome, iz (3) proizlazi

$$v(p_1, p_2, M) = e^{-1}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2; \mathrm{M}) . \tag{6}$$

Gledano s empirijskog stajališta, prethodni nalazi imaju veliku važnost. Oni upućuju na osnovni zaključak da je kod rješavanja problema ograničene optimizacije dovoljno riješiti samo jedan problem jer se iz rješenja jednog problema na jednostavan način može izvesti rješenje drugog problema.

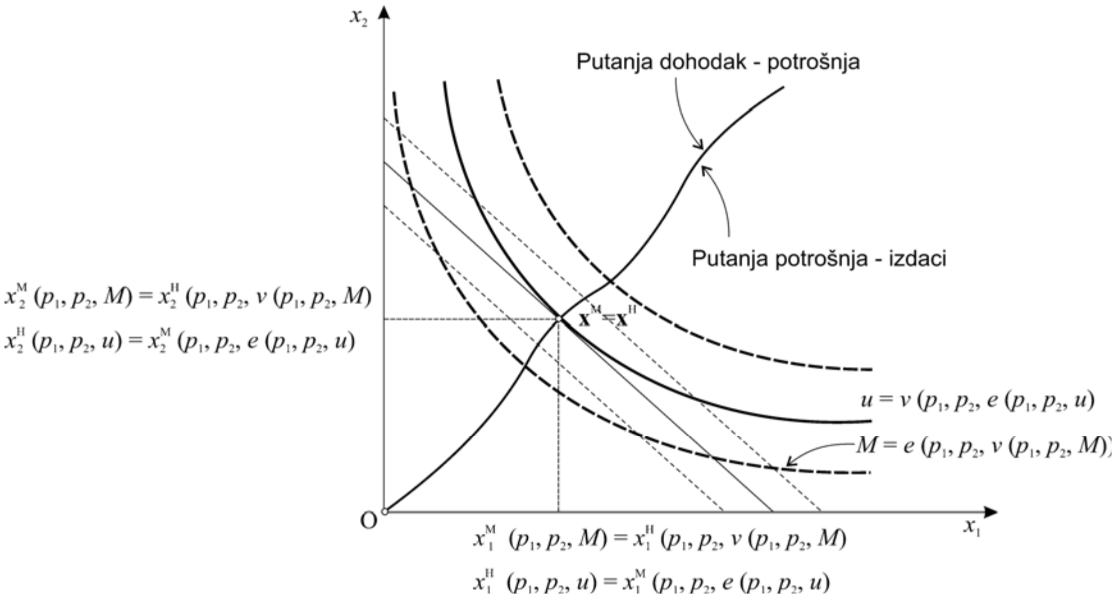
Dvojnost nas ne dovodi samo do zaključka da se iz indirektne funkcije korisnosti lako izvodi funkcija izdataka i obrnuto, da se iz funkcije izdataka lako izvodi funkcija korisnosti. U procesu rješavanja problema ograničene optimizacije, uz pretpostavku da je funkcija ograničenja u jednom problemu funkcija cilja u drugom problemu i da je funkcija cilja u jednom problemu funkcija ograničenja u drugom problemu, košara dobara koja maksimizira korisnost potrošaču u problemu maksimizacije korisnosti, x^{M}, minimizira izdatke potrošaču u problemu minimizacije izdataka, $\mathrm{x}^{\mathrm{M}} = \mathrm{x}^{\mathrm{H}}$, i obrnuto, košara dobara koja minimizira izdatke potrošaču u problemu minimizacije izdataka, x^{H}, maksimizira korisnost potrošaču u problemu maksimizacije korisnosti, $\mathrm{x}^{\mathrm{H}} = \mathrm{x}^{\mathrm{M}}$. To nam omogućuje da napišemo još dvije važne dualnosti. U prvom je slučaju Marshallova potražnja, kada su cijene dobara $p_1 \; i \; p_2$ i kada je dohodak potrošača M, jednaka Hicksovoj potražnji koja proizlazi kao rješenje problema minimizacije izdataka u kojem su cijene dobara $p_1 \; i \; p_2$ i u kojem je zadana razina korisnosti jednaka maksimalnoj razini korisnosti iz problema maksimizacije korisnosti:

$$x_i^M(p_1, p_2, M) = x_i^H(p_1, p_2, v(p_1, p_2, M)). \tag{7}$$

U drugom je slučaju Hicksova potražnja, kada su cijene dobara $p_1 \; i \; p_2$ i kada je zadana korisnost *u,* jednaka Marshallovoj potražnji koja proizlazi kao rješenje problema maksimizacije korisnosti u kojem su cijene dobara $p_1 \; i \; p_2$ i u kojem je zadana razina dohotka jednaka minimalnom iznosu izdataka iz problema minimizacije izdataka:

$$x_i^H(p_1, p_2, u) = x_i^M(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)). \tag{8}$$

U ovom ćemo se članku ograničiti samo na tvrdnju da je ova potonja veza dualnosti jedan od najvažnijih nalaza na kojem se temelji izvođenje suvremenog zakona potražnje jer ona povezuje opazive Marshallove funkcije potražnje i neopazive Hicksove funkcije potražnje. To je zapravo veza iz koje se na vrlo elegantan način izvodi jednadžba Slutskyog, jednadžba koja na najsažetiji način izražava suvremeni zakon potražnje. Taj zakon kaže da se potražnja za normalnim dobrom povećava kada se njegova cijena smanjuje i da dobro mora biti inferirno ako smanjenje cijene dobra uzrokuje smanjenje tražene količine.



Slika 4. Maksimizacija korisnosti i minimizacija izdataka

Maksimalnu korisnost za zadanu neisprekidanu budžetsku crtu daje košara dobara x^M u kojoj neisprekidana krivulja indiferencije dodiruje neisprekidanu budžetsku crtu. Neisprekidana krivulja indiferencije najudaljenija je krivulja indiferencije od koordinatnog početka na koju potrošač može doći krećući se po krivulji dohodak-potrošnja. Minimalne izdatke za postignutu maksimalnu korisnost daje košara dobara x^H u kojoj neisprekidana crta jednakih izdataka (budžetska crta) dodiruje neisprekidanu krivulju indiferencije. Neisprekidana crta jednakih izdataka koordinatnom je početku najbliža crta jednakih izdataka na koju potrošač može doći idući po krivulji potrošnja-izdatci i ostvariti maksimalnu korisnost iz problema maksimizacije korisnosti.

Objašnjenje može teći i u obrnutom smjeru. Minimalne izdatke za zadanu korisnost predočenu neisprekidanom krivuljom indiferencije daje košara dobara x^H u kojoj neisprekidana crta jednakih izdataka (budžetska crta) dodiruje krivulju indiferencije. Neisprekidana je crta jednakih izdataka koordinatnom početku najbliža crta na koju potrošač može doći idući po krivulji potrošnja-izdatci i ostvariti zadanu korisnost predočenu neisprekidanom krivuljom indiferencije. Maksimalnu korisnost za tako ostvarene minimalne izdatke daje košara dobara x^M u kojoj neisprekidana krivulja indiferencije dodiruje neisprekidanu crtu jednakih izdataka. Neisprekidana krivulja indiferencije najudaljenija je krivulja indiferencije od koordinatnog početka na koju potrošač može doći krećući se po krivulji dohodak-potrošnja kada su minimalni izdatci jednaki potrošačevu dohotku.

Točka dodira neisprekidane budžetske crte (crte jednakih izdataka) i neisprekidane krivulje indiferencije jasno ilustrira dualnost između Marshallovih i Hicksovih funkcija potražnje jer je ona rješenje i problema maksimizacije korisnosti uz ograničenje

$M = e(p_1, p_2, u)$ i rješenje problema minimizacije izdataka uz ograničenje $u = v(p_1, p_2, M)$. Konačno, treća se veza dualnosti odnosi na zajedničke vrijednosti kvocijenata λ^M *i* μ^H. Nju smo već podrobno objasnili. Ovdje radi potpunosti navodimo samo konačan zaključak. Kvocijent λ^M mjeri granični učinak promjene razine dohotka (granični učinak promjene razine ograničenja) na vrijednost indirektne funkcije korisnosti (na vrijednost funkcije optimalnih vrijednosti), stoga je λ^M granična korisnost dohotka u ravnoteži. U problemu minimizacije izdataka kvocijent μ^H mjeri granični učinak promjene razine korisnosti (granični učinak promjene razine ograničenja) na vrijednost funkcije izdataka (na vrijednost funkcije optimalnih vrijednosti), stoga je μ^H granični trošak korisnosti u ravnoteži. Međutim, granična je korisnost dohotka jednaka recipročnoj vrijednosti graničnog troška korisnosti. Recipročnost granične korisnosti dohotka i graničnog troška korisnosti u ravnoteži skraćeno izražavamo zapisom $\lambda^M = 1/\mu^H$.

5. LAGRANGEOVA METODA NEODREĐENIH MULTIPLIKATORA

Do sada smo pokazali kako se metodom izravne supstitucije i metodom jednakih nagiba pronalaze stacionarne točke u problemima ograničene optimizacije. Objašnjavajući te metode, izvršili smo obilne pripreme za objašnjenje Lagrangeove metode neodređenih multiplikatora. Godine 1797. francuski matematičar Joseph Louis Lagrange došao je na duhovitu zamisao da funkciji cilja iz problema ograničene optimizacije doda funkciju ograničenja u implicitnom obliku pomnoženu varijablom λ, neodređenim Lagrangeovim multiplikatorom, i da na taj način dobije novu funkciju, Lagrangeovu funkciju kojom se problem ograničene optimizacije glede načina izvođenja uvjeta prvog reda svodi na problem neograničene optimizacije. U skladu s tom zamisli u našem slučaju Lagrangeova funkcija, u izrečenom smislu, svodi problem ograničene maksimizacije korisnosti na problem neograničene maksimizacije korisnosti

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1 x_1 - p_2 x_2) \tag{1}$$

Kada je ograničenje zadovoljeno, drugi je pribrojnik na desnoj strani jednakosti jednak nuli bez obzira na to kolika je vrijednost Lagrangeovog multiplikatora λ. Nadalje, najvažnije je zapaziti da je derivacija Lagrangeove funkcije s obzirom na Lagrangeov multiplikator λ jednaka ograničenju i da će jednadžba ograničenja stoga biti jedna između sustava jednadžbi koje izražavaju uvjete prvog reda za maksimizaciju korisnosti. Budući da je u našem slučaju sustav jednadžbi koje izražavaju uvjete prvog reda rješiv, ograničenje je zadovoljeno i stacionarna je vrijednost Lagrangeove funkcije jednaka maksimalnoj vrijednosti funkcije korisnosti.

Pogledajmo sada kako izgleda sustav jednadžbi koji izražava uvjete prvog reda. Diferenciranje Lagrangeove funkcije s obzirom na endogene varijable i izjednačavanja s nulom daju sljedeći sustav jednadžbi:

$$u_1 - \lambda p_1 = 0 \tag{2a}$$

$$u_2 - \lambda p_2 = 0 \tag{2b}$$

$$M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \ . \tag{2c}$$

To je sustav s kojim smo se već susreli. Iz sustava je očito da je granična korisnost dobra X_1 u ravnoteži, $u_1(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})$, jednaka umnošku ravnotežne vrijednosti Lagrangeovog multiplikatora, λ^M, i cijene dobra X_1, $\lambda^M p_1$. Jednako je tako očito da je granična korisnost dobra X_2 u ravnoteži, $u_2(\mathrm{x}^{\mathrm{M}})$, jednaka umnošku ravnotežne vrijednosti Lagrangeovog multiplikatora, λ^M, i cijene dobra X_2, $\lambda^M p_2$. Što su cijene dobara? Gledano sa stajališta potrošača, cijena je dobra X_1 granični trošak dobra X_1 jer potrošač za dodatnu jedinicu dobra X_1 mora platiti iznos p_1, a cijena dobra X_2 granični je trošak dobra X_2 jer potrošač za dodatnu jedinicu dobra X_2 mora platiti iznos p_2.

Lako je zapaziti da se u Lagrangeovoj funkciji budžetsko ograničenje promatra kao crta u ravnini x_1Ox_2 koju sadrži graf funkcije

$$g(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - M. \tag{3}$$

Vrijednost je konstruirane funkcije (3) jednaka nuli samo kada je ispunjeno budžetsko ograničenje, samo onda kada izdatci na dobra upravo iscrpljuju dohodak potrošača. Njezine su djelomične derivacije s obzirom na količine dobara jednake cijenama p_1 i p_2 za koje smo časak ranije utvrdili da izražavaju granične troškove dobara.

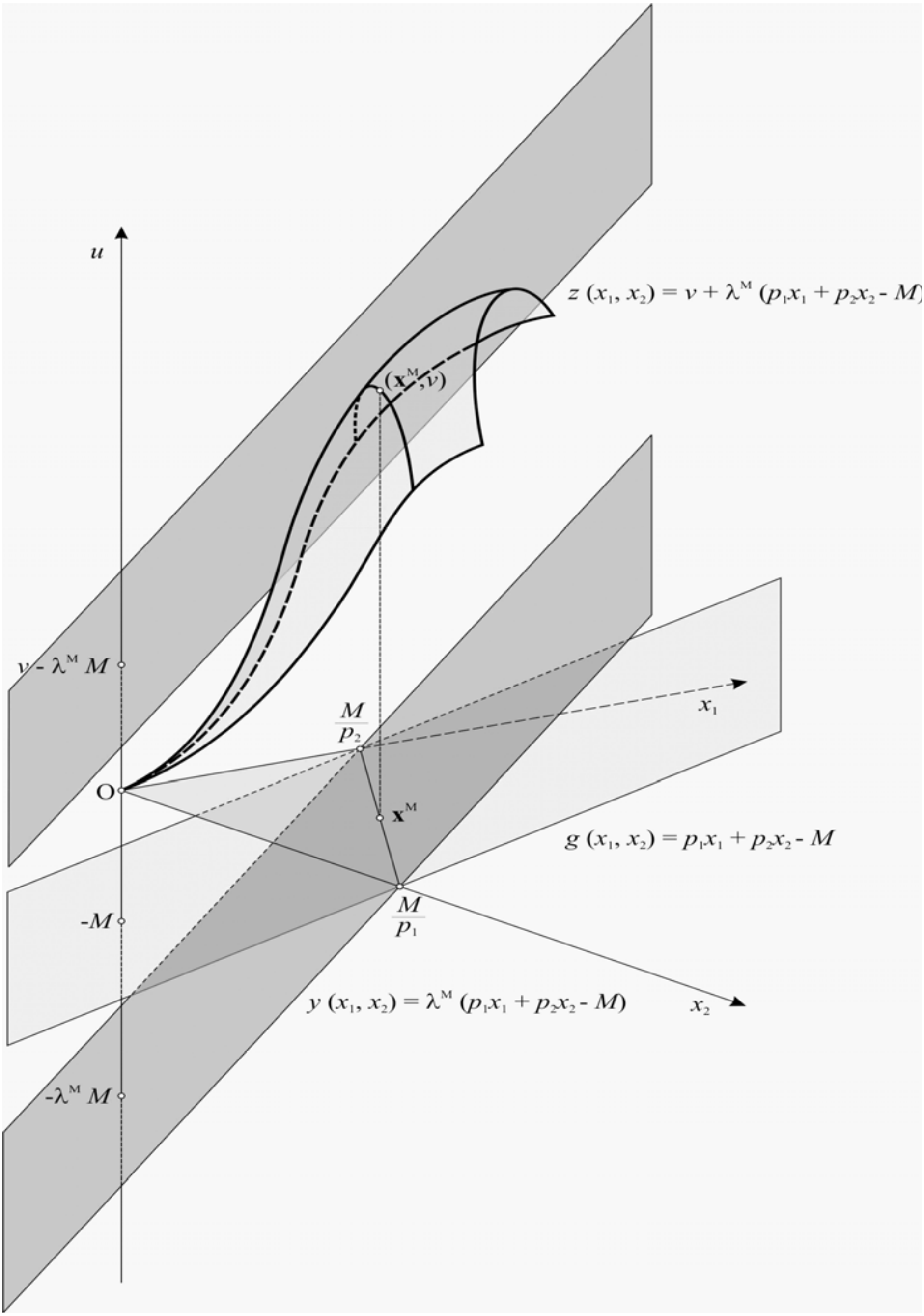
Koju ulogu ima Lagrangeov multiplikator kao novouvedena endogena varijabla? Lagrangeov multiplikator λ ima ulogu da graf funkcije (3) predočen ravninom zakrene oko budžetske crte toliko da se dobije nova funkcija

$$y(x_1, x_2) = \lambda^M (p_1 x_1 + p_2 x_2 - M), \tag{4}$$

koje su djelomične derivacije u točki ravnoteže $\mathrm{x}^{\mathrm{M}} = (x_1^M, x_2^M)$ jednake graničnim korisnostima dobara. Lagrangeov multiplikator, λ^M, zakrene graf funkcije (3) oko budžetskog ograničenja toliko da se on preobrazi u ravninu koja je graf funkcije (4) i koja je paralelna s tangencijalnom ravninom na graf ukupne korisnosti u točki (x_1^M, x_2^M, v). Paralelnost osigurava multiplikator λ^M jer množi cijene tako da nagibi tangenti grafa funkcije (4) u svim smjerovima budu jednaki nagibima tangenti grafa funkcije korisnosti u točki (x_1^M, x_2^M, v) u odgovarajućim smjerovima. Točka (x_1^M, x_2^M, v) nalazi se na vrhu okomite dužine iznad košare dobara x^{M} koja pripada budžetskoj crti i maksimizira potrošačevo zadovoljstvo. Udaljenost je između dijela grafa funkcije korisnosti koji je okomito iznad budžetske crte i budžetske crte najveća u točki x^{M}, stoga je i ravnina koja predočuje graf funkcije

$$z(x_1, x_2) = v + \lambda^M (p_1 x_1 + p_2 x_2 - M) \tag{5}$$

tangencijalna na graf funkcije ukupne korisnosti u točki (x_1^M, x_2^M, v). Nadalje, valja zapaziti da je dio grafa funkcije koji je okomito iznad budžetske crte, striktno konkavan i da je to sasvim dovoljno da potrošač u zadanim uvjetima maksimizira svoje zadovoljstvo.



Slika 5. Uloga Lagrangeovog multiplikatora

Ravnotežni Lagrangeov multiplikator λ^M zakreće graf funkcije ograničenja $g(x_1,x_2)$ i preobražava ovu funkciju u funkciju $y(x_1,x_2)$ koje su vrijednosti djelomičnih derivacija u svim smjerovima jednake vrijednostima odgovarajućih djelomičnih derivacija funkcije cilja u točki ravnoteže x^{M}.

Već smo pokazali da nam ravnotežni Lagrangeov multiplikator λ^M pokazuje koliko iznosi granična korisnost dohotka u ravnoteži. Ovdje ćemo do te njegove ekonomske interpretacije doći i na formalan način. Radi toga pretpostavljamo da je indirektna funkcija korisnosti neprekidno diferencijabilna. Izjava da je λ^M granična korisnost dohotka po značenju je ekvivalentna izjavi da je vrijednost djelomične derivacije indirektne funkcije korisnosti s obzirom na dohodak u ravnoteži jednaka vrijednosti multiplikatora λ^M. Preostaje nam stoga da indirektnu funkciju korisnosti djelomično deriviramo s obzirom na dohodak M i da provjerimo je li ova potonja izjava istinita. Indirektna je funkcija korisnosti

$$v(p_1,p_2,M)=u(x_1^M(p_1,p_2,M),x_2^M(p_1,p_2,M)). \tag{6}$$

Izravno deriviranje s obzirom na M daje

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial M}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^M}{\partial M}\\&=u_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+u_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}.\end{aligned} \tag{7}$$

Iz uvjeta prvog reda proizlazi da je u ravnoteži $u_1=\lambda^M p_1$ i $u_2=\lambda^M p_2$, stoga (7) možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial v}{\partial M}=\lambda^M\left(p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}\right). \tag{8}$$

Ako je granična korisnost dohotka, $\frac{\partial v}{\partial M}$, jednaka ravnotežnoj vrijednosti Lagrangeovog multiplikatora, λ^M, onda se mora dokazati da je svota u malim zagradama s desne strane jednakosti (8) jednaka jedinici. Da bismo to dokazali, uvrštavamo funkcije potražnje u budžetsko ograničenje kako bismo dobili identitet

$$p_1x_1^M+p_2x_2^M=M \tag{9}$$

iz kojeg nakon deriviranja, s obzirom na M, proizlazi

$$p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M}+p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}=1. \tag{10}$$

Napokon, kada (10) uvrstimo u (8), dobivamo da je granična korisnost dohotka u ravnoteži jednaka ravnotežnoj vrijednosti Lagrangeovog multiplikatora:

$$\frac{\partial v}{\partial M}=\lambda^M. \tag{11}$$

Ili općenitije, vrijednost derivacije indirektne funkcije cilja s obzirom na konstantu ograničenja jednaka je ravnotežnoj vrijednosti Lagrangeovog multiplikatora.

6. O UTJECAJU MONOTONO RASTUĆIH TRANSFORMACIJA NA RAVNOTEŽNA RJEŠENJA

Sve do godine 1906., do godine u kojoj je talijanski ekonomist Vilfredo Pareto pokazao da se teorija potrošačeva izbora može temeljiti samo na skupu krivulja indiferencije koje imaju određena svojstva, pretpostavljalo se da je korisnost svake košare dobara *kardinalno* mjerljiva kvaliteta i da s tim u skladu postoji funkcija *kardinalne korisnosti* koja svakoj košari pripisuje ukupan iznos korisnosti izražen u izabranim jedinicama mjere. Izbor je jedinica mjere bio proizvoljan i do linearne i do afine transformacije. Kad kažemo do linearne transformacije, onda to znači da se neka jedinica mjere mogla pomnožiti proizvoljno izabranim pozitivnim skalarom i na taj način transformirati u neku drugu jedinicu mjere, a kad kažemo do afine transformacije, onda to znači do linearne transformacije uvećane ili umanjene za proizvoljno izabrani skalar.

Pretpostavimo da je prije 1906. godine, u skladu s rezultatima koji proizlaze iz funkcije kardinalne korisnosti $u(\mathrm{x})$, košara dobara x^1 potrošaču davala 10 jedinica korisnosti i da je košara dobara x^2 potrošaču davala 5 jedinica korisnosti. Ukupan iznos korisnosti što ga je potrošaču pružala košara dobara x^1 za potrošača je bio dvostruko veći od ukupnog iznosa korisnosti što mu ga je davala košara dobara x^2. U tom se razdoblju također smatralo da u potrošnji vlada Gossenov zakon opadajuće granične korisnosti prema kojem potrošnja dodatnih jedinica nekog dobra potrošaču donosi sve manju korisnost sve do točke zasićenja u kojoj je granična korisnost dobra jednaka nuli. On je bio utjelovljen u funkciji kardinalne korisnosti. Prema drugom Gossenovom zakonu racionalni potrošač, trošeći sav svoj dohodak, maksimizira svoje zadovoljstvo kada mu je ugoda od potrošnje dodatne jedinice svakog dobra na zadnju jedinicu potrošenog dohotka jednaka. Na temelju ovih dvaju zakona izvodio se zakon potražnje koji je glasio: "Kad se cijena dobra smanji, tražena se količina dobra poveća."

Suvremena se teorija potrošačeva izbora razlikuje od teorije potrošačeva izbora koja proizlazi iz pretpostavke da je korisnost košare dobara kardinalno mjerljiva. Ona se temelji na aksiomima koji pomoću binarne relacije blage preferencije izražavaju odnos potrošačevih preferencija prema košarama dobara ili, ako hoćete, na aksiomima koji opisuju potrošačevu dosljednost i potrošačevo ponašanje kada za sebe bira jednu između barem dviju košara dobara koje su mu dostupne. Potrošačevo se ponašanje može analizirati izravno primjenjujući prihvaćene aksiome ili, posredno, koristeći jednu između beskonačno mnogo *funkcija ordinalne korisnosti* koje proizlaze iz tih aksioma i sažeto utjelovljuju obavijesti koje nam daje relacija preferencije. U drugom slučaju, ulogu koju u analizi ponašanja potrošača ima binarna relacija blage preferencije, preuzima suvremena funkcija ordinalne korisnosti pripisujući košarama dobara koje potrošač jednako voli, košarama dobara iz istog indiferencijskog skupa, jednak broj i košarama dobara koje pripadaju poželjnijim indiferencijskim skupovima veće brojeve. Za razliku od funkcije kardinalne korisnosti, funkcija ordinalne korisnosti košarama dobara ne pripisuje apsolutne iznose korisnosti već brojeve koji određuju mjesta košara u poređaju košara koji je jednak poređaju potrošačevih preferencija prema košarama dobara. Da bismo potpuno shvatili kako suvremena funkcija ordinalne korisnosti opisuje potrošačeve preferencije i razliku između te funkcije i funkcije kardinalne korisnosti, pretpostavimo sada da suvremena funkcija ordinalne korisnosti košari dobara x^1 pripisuje broj 10 i košari dobara x^2 broj 5. Brojevi 10 i 5 više nisu iznosi apsolutne korisnosti već indeksi korisnosti pripisani košarama dobara x^1 i x^2. Usporedba nam broja 10 i broja 5 sada pokazuje da potrošač više voli košaru dobara x^1 nego košaru dobara x^2, ali ne i da potrošač košaru dobara x^1 voli dva puta više nego košaru dobara x^2. Kada bismo brojeve 10 i 5 kvadriranjem transformirali u brojeve 100 i 25, ti bi nam brojevi dali jednaku obavijest kao i brojevi 10 i 5, samo obavijest da potrošač više voli košaru dobara x^1 nego košaru dobara x^2. Do jednakog bi nas zaključka dovelo svako pravilo transformiranja brojeva 10 i 5 koje košari dobara x^1 pripisuje veći broj nego košari dobara x^2, svako pravilo koje ne narušava po veličini usklađeni redoslijed košarama pripisanih brojeva s redoslijedom potrošačevih preferencija prema košarama dobara. Broj je takvih pravila transformiranja beskonačno velik.

Ilustraciju da se prikladnim transformiranjem brojeva koje neka suvremena funkcija ordinalne korisnosti $u(\mathrm{x})$ pripisuje košarama dobara dobiva neka nova funkcija ordinalne korisnosti $z(\mathrm{x})$ koja podjednako dobro opisuje potrošačeve preferencije kao i funkcija $u(\mathrm{x})$, možemo formalno poopćiti. Kada pravilo ili funkciju transformiranja označimo s *F*, možemo pisati

$$z(\mathrm{x}) = F(u(\mathrm{x})), \tag{1}$$

gdje je $\dfrac{dF}{du} = F' > 0$. Ograničenje $F' > 0$ znači da funkcija $z(\mathrm{x})$ raste kada funkcija $u(\mathrm{x})$ raste, odnosno da pravilo transformiranja *F* čuva poređaj potrošačevih preferencija koji proizlazi iz funkcije korisnosti $u(\mathrm{x})$. Transformacija *F* zove se *strogo rastuća* ili *monotono rastuća transformacija.* Kaže se također da je funkcija *z* monotono rastuća funkcija od *u*. Broj je monotono rastućih transformacija beskonačno velik. Zbog toga je beskonačno velik i broj funkcija ordinalne korisnosti koje podjednako dobro opisuju potrošačeve preferencije. Dok je funkcija kardinalne korisnosti jedinstvena do linearne ili afine transformacije, funkcija je ordinalne korisnosti $u(\mathrm{x})$ jedinstvena do *monotono rastuće transformacije.* Ovo potonje znači da primjenom monotono rastuće transformacije iz svake funkcije ordinalne korisnosti možemo izvesti neku drugu funkciju ordinalne korisnosti koja ne mijenja već dobiveni poređaj potrošačevih preferencija.

Broj obavijesti koji nam daje funkcija ordinalne korisnosti manji je od broja obavijesti koji nam daje funkcija kardinalne korisnosti. Funkcija nas kardinalne korisnosti obavještava kolika je apsolutna korisnost koju potrošaču daje bilo koja košara dobara i time o poređaju košara dobara po redu poželjnosti. Povrh toga, iz funkcije kardinalne korisnosti uvijek možemo izvesti koliko iznosi granična korisnost bilo kojeg dobra u bilo kojoj točki. Za razliku od funkcije kardinalne korisnosti, funkcija nam ordinalne korisnosti ne daje smislene obavijesti ni o iznosu korisnosti koju potrošaču daje neka košara dobara ni o veličini granične korisnosti bilo kojeg dobra u bilo kojoj točki jer se primjenom monotono rastućih transformacije te veličine mogu proizvoljno mijenjati. Jedino je što znamo da su granične korisnosti dobara pozitivne i da to izražava pretpostavku kako je potrošač nezasitan.

Iz prethodnog je razmatranja očito da je za suvremenu teoriju potrošačeva izbora nevažno i kardinalno mjerenje korisnosti košare dobara i zakon opadajuće granične korisnosti dobra. Umjesto na zakon opadajuće granične korisnosti dobra, suvremena se teorija potrošačeva izbora oslanja na aksiom da granična stopa supstitucije između dobara opada, na aksiom koji kaže da je potrošač koji se kreće niz krivulju indiferencije, spreman žrtvovati sve manji broj jedinica dobra X_2 za dodatnu jedinicu dobra X_1 zbog toga što odnos količine dobra X_2 i količine dobra X_1 postaje sve manji. Ovaj je aksiom zapravo na drugi način iskazani aksiom da su potrošačeve preferencije striktno konveksne, aksiom koji kaže da potrošač košaru dobara koja je ponderirani prosjek dviju košara dobara, kada su ponderi različiti od nule, voli više nego onu košaru koju između dviju košara dobara ne voli više. Dolazak potrošača iz točke x^1 u točku ravnoteže x^M omogućio je aksiom koji kaže da granična stopa supstitucije između dobara opada. Granična se stopa supstitucije između dobara smanjivala sve dok se u točki x^M nije izjednačila s graničnom stopom ekonomske supstitucije između dobara. Jednako je tako aksiom da granična stopa supstitucije opada omogućio da potrošač iz točke x^2 dođe u točku ravnoteže x^M. Granična je stopa suspstitucije između dobara rasla sve dok se nije izjednačila s graničnom stopom ekonomske supstitucije. Nadamo se da je čitatelju već sada jasno zašto se suvremena teorija potrošačeva izbora, umjesto na zakon opadajuće granične korisnosti dobara, oslanja na aksiom da granična stopa supstitucije između dobara opada.

Gledano s matematičkog stajališta, izvođenje je potrošačevih funkcija potražnje kada je funkcija cilja funkcija kardinalne korisnosti ekvivalentno izvođenju potrošačevih funkcija potražnje kada je funkcija cilja funkcija ordinalne korisnosti. Već smo pokazali kako se izvode Marshallove funkcije potražnje kada je funkcija cilja $u(\mathrm{x})$ i kada je zadano budžetsko ograničenje. Zamislite da je funkcija $u(\mathrm{x})$ funkcija kardinalne korisnosti. Primijenimo na tu funkciju monotono rastuću transformaciju *F* da bismo dobili funkciju

$$z(x_1, x_2) = F(u(x_1, x_2)), \tag{2}$$

iz koje ne mora proizlaziti da u potrošnji vlada zakon opadajuće granične korisnosti dobara zbog toga što predznak od

$$z_{ii} = F' u_{ii} + F'' u_i^2$$

ne mora biti jednak predznaku od u_{ii} jer je $F' > 0$ jedino ograničenje na monotono rastuću transformaciju *F*. Pogledajmo sada koje ćemo Marshallove funkcije potražnje dobiti kada umjesto funkcije cilja $u(\mathrm{x})$ kao funkciju cilja uzmemo njezinu monotono rastuću transformaciju $z(x_1, x_2)$. U tom je slučaju Lagrangeova funkcija

$$L(x_1, x_2, \lambda) = F(u(x_1, x_2)) + \lambda(M - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

Uvjeti su prvog reda

$$F'u_1 - \lambda p_1 = 0 \tag{3a}$$

$$F'u_2 - \lambda p_2 = 0 \tag{3b}$$

$$M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0\ . \tag{3c}$$

Iz prvih dviju jednadžbi sustava proizlazi

$$\frac{F'u_1}{F'u_2} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2}, \tag{4}$$

odnosno

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{5}$$

Dobiveni je rezultat uvjet tangentnosti koji proizlazi iz modela u kojem je funkcija cilja $u(\mathrm{x})$ jednostavno zbog toga što monotono rastuća transformacija F ne mijenja graničnu stopu supstitucije između dobara. Daljnji je postupak rješavanja očit. On daje Marshallove funkcije potražnje koje su jednake Marshallovim funkcijama potražnje koje proizlaze iz modela u kojem je funkcija $u(\mathrm{x})$ funkcija cilja. Funkcija Lagrangeovog multiplikatora koja proizlazi iz modela u kojem je funkcija cilja monotono rastuća transformacija razlikuje se od funkcije Lagrangeovog multiplikatora koja proizlazi iz modela u kojem je funkcija cilja $u(\mathrm{x})$. Međutim, Lagrangeov multiplikator i dalje ima jednostavnu ekonomsku interpretaciju. Iz uvjeta prvog reda (3a) i (3b) proizlazi da je vrijednost Lagrangeovog multiplikatora u ravnoteži pozitivna i da bi dodatna potrošena jedinica dohotka na bilo koje dobro u ravnoteži dala jednaku korisnost.

Nadamo se da čitatelj sada uviđa da nas funkcija ordinalne korisnosti, na koju se postavljaju znatno blaži zahtjevi nego na funkciju kardinalne korisnosti, uspješno dovodi do Marshallovih funkcija potražnje bez oslanjanja na kardinalnu mjerljivost korisnosti košare dobara i opadajuću graničnu korisnost dobra. Jednako se tako nadamo da je sada razumljivija Paretova izjava kako pojedinac može otići sa scene kada pomoću krivulja indiferencija, iznad kojih se diže beskonačno mnogo brežuljaka, dade potpunu sliku svojih ukusa.

7. SLOVO O DOVOLJNIM UVJETIMA DRUGOG REDA

Do sada smo se bavili maksimizacijom korisnosti uz zadano linearno budžetsko ograničenje koje krasi nepromjenjivost granične stope tržišne transformacije. Poopćenje ovih razmatranja je maksimizacija korisnosti ili neke druge funkcije cilja uz bilo kakvo ograničenje o kojem možemo promišljati kao o općenitoj, ne nužno linearnoj, funkciji izdataka:

$$\underset{x_1, x_2 \geq 0}{maks}\ u(x_1, x_2)$$
$$g(x_1, x_2) = M.$$

Granične cijene oskudnih dobara, $g_1 \; i \; g_2$, na koja potrošač raspodjeljuje dohodak, ovise o količinama tih dobara, stoga je količina drugog dobra koju možemo dobiti za malu količinu prvog dobra, dx_1, promjenjiva veličina,

$$dg = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 = 0,$$

$$dx_2 = -\frac{g_1}{g_2} dx_1,$$

koje je diferencijal suprotne vrijednosti

$$d^2 x_2 = d(dx_2) = -\frac{(g_{11} + g_{12}\frac{dx_2}{dx_1})g_2 - g_1(g_{21} + g_{22}\frac{dx_2}{dx_1})}{g_2^2} dx_1^2,$$

$$d^2 x_2 = -\frac{(g_{11} - g_{12}\frac{g_1}{g_2})g_2 - g_1(g_{21} - g_{22}\frac{g_1}{g_2})}{g_2^2} dx_1^2,$$

$$d^2 x_2 = -\frac{\frac{1}{g_2}(g_1^2 g_{22} - 2g_1 g_2 g_{12} + g_2^2 g_{11})}{g_2^2} dx_1^2.$$

O stabilnosti ravnoteže, kao i u optimizaciji bez ograničenja, odlučujemo na osnovi predznaka diferencijala drugog reda funkcije cilja,

$$du = u_1 dx_1 + u_2 dx_2,$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= d(du) = d(u_1 dx_1 + u_2 dx_2) = \\ &= (u_{11} dx_1 + u_{12} dx_2) dx_1 + (u_{21} dx_1 + u_{22} dx_2) dx_2 + u_2 d^2 x_2 = \\ &= u_{11} dx_1^2 + 2u_{12} dx_1 dx_2 + u_{22} dx_2^2 + u_2 d^2 x_2 = \\ &= u_{11} dx_1^2 - 2\frac{g_1}{g_2} u_{12} dx_1^2 + \frac{g_1^2}{g_2^2} u_{22} dx_1^2 + u_2 d^2 x_2 = \\ &= \frac{g_1^2 u_{22} - 2g_1 g_2 u_{12} + g_2^2 u_{11}}{g_2^2} dx_1^2 + u_2 d^2 x_2. \end{aligned}$$

Imajući u vidu da je granična korisnost novca jednaka kvocijentu granične korisnosti i granične cijene dobra X_2 u ravnoteži, $\lambda = \frac{u_2}{g_2}$, diferencijal drugog reda ukupne korisnosti možemo zapisati u obliku

$$d^2u = \frac{g_1^2 u_{22} - 2g_1 g_2 u_{12} + g_2^2 u_{11}}{g_2^2} dx_1^2 - \frac{\lambda(g_1^2 g_{22} - 2g_1 g_2 g_{12} + g_2^2 g_{11})}{g_2^2} dx_1^2$$

$$d^2u = \frac{g_1^2(u_{22} - \lambda g_{22}) - 2g_1 g_2 (u_{12} - \lambda g_{12}) + g_2^2(u_{11} - \lambda g_{11})}{g_2^2} dx_1^2$$

$$d^2u = \frac{g_1^2 L_{22} - 2g_1 g_2 L_{12} + g_2^2 L_{11}}{g_2^2} dx_1^2.$$

Na osnovi minora obrubljene Hesseove matrice Lagrangeove funkcije

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 2g_1 g_2 L_{12} - g_1^2 L_{22} - g_2^2 L_{11}$$

diferencijal drugog reda funkcije cilja poprima jednostavan zapis

$$d_2 u = -\frac{D_2}{g_2^2 dx_1^2}.$$

Dovoljan uvjet drugog reda ograničene maksimizacije, negativan predznak diferencijala drugog reda funkcije cilja, $d^2u < 0$ za $dx_1 \neq 0$ zapravo je zahtjev za pozitivnim predznakom obrubljenog minora, $D_2 > 0$. Povećanje broja dobara, međutim, nameće zahtjev da predznaci posljednjih *n-1* vodećih glavnih minora obrubljene Hesseove matrice Lagrangeove funkcije alterniraju i završe s predznakom $(-1)^n$. Svakako je $D_2 > 0$, no jedan smo obrubljeni minor kojem znamo predznak ispustili,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & g_1 \\ g_1 & L_{11} \end{vmatrix} = -g_1^2 < 0,$$

pa nas na prethodnu tvrdnju podsjeća i niz

$$D_1 < 0, \mathrm{D}_2 > 0.$$

Kako se, poput predznaka kvadratne forme, problemi minimizacije množenjem funkcije cilja s (-1) preobražavaju u probleme maksimizacije, tako se za njih u dovoljnim uvjetima drugog reda na odgovarajući način preobražavaju i znakovi nejednakosti i vodeći su glavni minori obrubljene matrice istog, negativnog, predznaka,

$$D_1 < 0, \mathrm{D}_2 < 0.$$

Linearni oblik izdataka znatno pojednostavljuje ova razmatranja pa ulogu Lagrangeove funkcije u dualnim modelima analize ponašanja potrošača preuzimaju funkcija cilja i ograničenja. Geometrija poprima vidljivo obličje i dovoljni se uvjeti drugog reda i u modelu ograničene maksimizacije korisnosti i u modelu ograničene minimizacije izdataka svode na zahtjev da funkcija korisnosti bude striktno kvazikonkavna. U slučaju dvaju dobara tim zahtjevom

$$\bar{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

postižemo konveksan oblik krivulja indiferencije kojim predočujemo zakon opadajuće subjektivne vrijednosti jedinice relativno sve obilnijeg dobra izražene vrijednošću količine relativno sve oskudnijeg dobra koju je potrošač zauzvrat voljan žrtvovati. Ovaj zakon, prema kojem potrošač voli miješati sadržaje jednako poželjnih košara dobara, okosnica je ordinalnog pristupa i svoju važnost nalazi ne samo u stabilnosti ravnoteže već i u komparativno statičkoj analizi, stoga se nadamo da će ovaj kratak izlet među dovoljne uvjete drugog reda biti dostatan poticaj da se time ubuduće zabavimo znatno opsežnije.

8. ZAKLJUČAK

Naša je nakana bila da u ovom članku pristupačno i uvjerljivo, bez pretjeranog oslanjanja na znanje matematike, opišemo problem potrošačeva izbora. Nakon uobičajenog formuliranja modela ograničene maksimizacije korisnosti i modela ograničene minimizacije izdataka, dolazak smo u ravnotežu u oba slučaja objasnili oslanjajući se na jednostavno stajalište da običan potrošač uvijek zna koliko je jedinica dobra X_2 spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 i za koliko se jedinica dobra X_2 na tržištu može dobiti dodatnih jedinica dobra X_1. U problemu ograničene maksimizacije korisnosti potrošač, uspoređujući broj jedinica dobra X_2 za koji na tržištu možemo dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1 s brojem jedinica dobra X_2 koji je on voljan žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1, ispituje koja mu košara dobara na budžetskoj crti maksimizira korisnost, a u problemu ograničene minimizacije izdataka, uspoređujući broj jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1, na koju će košaru dobara na zadanoj krivulji indiferencije izdati najmanje novaca. Potrošač se u oba slučaja prilagođuje uvjetima koje nameće tržište i ostvaruje ravnotežu kada se broj jedinica dobra X_2 koji je on spreman žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 podudara s brojem jedinica dobra X_2 za koji na tržištu može dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1.

Broj jedinica dobra X_2 koji je potrošač voljan žrtvovati za dodatnu jedinicu dobra X_1 i pritom ostati na jednakoj razini zadovoljstva zove se granična stopa supstitucije između dobara,

$$MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_1}{u_2}, \tag{1}$$

a broj jedinica dobra X_2 za koji potrošač na tržištu može dobiti dodatnu jedinicu dobra X_1 granična stopa tržišne transformacije,

$$MRMT = \frac{p_1}{p_2}. \tag{2}$$

Obično se kaže da je, u oba slučaja ograničene optimizacije, ravnoteža potrošača tamo gdje je granična stopa supstitucije između dobara jednaka graničnoj stopi tržišne transformacije:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}, \tag{3}$$

odnosno tamo gdje je nagib krivulje indiferencije jednak nagibu budžetske crte ili nagibu crte jednakih izdataka. Ovo je samo formalniji opis ravnoteže koju smo već iskazali na znatno jednostavniji način.

Metoda jednakih nagiba jedna je između metoda za iznalaženje rješenja problema. Ona polazi od stajališta da ravnotežu potrošača izražava jednadžba (3). U članku smo pokazali kako nam prihvaćanje tog stajališta omogućuje da na prirodan način upoznamo ekonomski i matematički smisao Lagrangeovih multiplikatora i njihovu međusobnu povezanost te da formiramo skup jednadžbi koje opisuju kritičku točku Lagrangeove funkcije, a da bilo što izravno znamo o Lagrangeovoj funkciji.

Pošto smo pokazali kako se u problemu ograničene maksimizacije korisnosti matematički formalizira dolazak u ravnotežu i kako se primjenom metode jednakih nagiba rješava taj problem, lako nam je bilo pokazati kako se matematički formalizira dolazak u ravnotežu u problemu ograničene minimizacije izdataka i kako se primjenom metode jednakih nagiba rješava taj problem. Što je najvažnije, u tom smo procesu rezultate koji proizlaze iz modela ograničene minimizacije izdataka u kojem je funkcija cilja funkcija ograničenja iz modela ograničene maksimizacije korisnosti i funkcija ograničenja funkcija cilja iz modela ograničene maksimizacije korisnosti, na bezbolan način doveli u vezu s rezultatima koji proizlaze iz dualnog modela ograničene maksimizacije korisnosti. Nakon toga nam nije bilo teško sustavnije prikazati veze dualnosti, od kojih posebnu važnost imaju veze između Hicksovih i Marshallovih funkcija potražnje iz kojih izravno slijedi jednadžba Slutskyog, jednadžba koja na najsažetiji način izražava suvremeni zakon potražnje.

Podrobno je upoznavanje metode jednakih nagiba potpuno otklonilo mistične predodžbe o Lagrangeovoj metodi neodređenih multiplikatora. Neodređeni multiplikatori imaju potpuno određeno ekonomsko i matematičko značenje. Nadamo se da je geometrijska interpretacija uloge Lagrangeovog multiplikatora u Lagrangeovoj funkciji posebno uvjerljiva. Iz uvjeta prvog reda koji slijede iz Lagrangeove funkcije, proizlazi ravnotežna jednakost granične stope supstitucije između dobara koja je imuna na monotono rastuće transformacije funkcije korisnosti i odnosa cijena dobara. Ta nam je činjenica omogućila bijeg od pojma korisnosti i napuštanje zakona opadajuće granične korisnosti koji smo, sljedeći Pareta, zamijenili zakonom opadajuće granične stope supstitucije između dobara, središnjim zakonom ordinalne teorije ponašanja potrošača. Taj je zakon, prema kojem potrošač voli miješati sadržaje jednako poželjnih košara dobara, našao svoje mjesto i među dovoljnim uvjetima drugog reda kojima smo radi cjelovitosti analize na kraju ipak posvetili malo prostora. Naime, i u modelu ograničene maksimizacije korisnosti i u modelu ograničene minimizacije izdataka dovoljne smo uvjete drugog reda sveli na zakon opadajuće granične stope supstitucije iz kojeg je proizišao i konveksan oblik krivulja indiferencije.

LITERATURA

1. Alchian, A. A., *The Meaning of Utility Measurement*, American Economic Review, 43: 26-50, 1953.
2. Apostol, M. T., *Mathematical Analysis*, Second Edition, Addison Wesley, 1974.
3. Barten, A. P., Böhm V., *Consumer theory*, objavljeno u *Handbook of Mathematical Economics*, urednici Arrow, K. J., Intriligator, M. D., North-Holland Publishing Company, 1982.
4. Berge, C., *Topological Spaces*, Preveo Patterson, E. M., Oliver and Boyd, Edinburgh, 1963.
5. Blume, L., Simon, C., *Mathematics for Economists*, W. W. Norton & Company, New York-London, 1994.
6. Blundell, R., *Consumer's behaviour: theory and empirical evidence - a survey*, Economic Journal, 98: 16-65, 1988.
7. Chipman, J. S., Moore, J. C., *Compensating variation, consumer's Surplus, and welfare*, American Economic Review, 70: 933-949, 1980.
8. Courant, R., Fritz, J., *Introduction to Calculus and Analysis,* Springer-Verlag, 1999.
9. Debreu, G., *Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function*, in Thrall et al., *Decision Processes*, str. 159-165, John Wiley, New York, 1954.
10. Debreu, G., *Theory of Value: An axiomatic analysis of economic equilibrium*, John Wiley, New York, 1959.
11. Diewert, W. E., *Applications of duality theory*, Frontiers of Quantitative Economics, vol. II, Intriligator, M. D., Kendrick, J. W. (urednici), North Holland, Amsterdam, 1974.
12. Dixit, A. K., *Optimization in Economic Theory*, Second Edition, Oxford University Press, New York, 1990.
13. Fuente, Angel de la, *Mathematical Methods and Models for Economists*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
14. Hicks, J., *Value and Capital,* drugo izdanje, Clarendon Press, Oxford, 1946.
15. Jevons, W. S., *Theory of Political Economy,* Macmillan, 1871.
16. Marshall, A., Principles of Economics, Macmillan, London, 1890.
17. Pareto, V., *Manual of Political Economy*, Prvi prijevod na engleskom izdan 1971., Augustus M. Kelly Publishers, New York, 1906.

18. Samuelson, P. A., *Foundations of Economic Analysis*, 1983 edition, Harvard University Press, Cambridge, Ma, 1947.
19. Screpanti, E., Zamagni, S., *An Outline of the History of Economic Thought*, Second Edition, Oxford University Press, 2005.
20. Silberberg, E., *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1990.
21. Slutsky, E., *Sulla Teoria del Bilancie del Consumatore*, Giornali degli Economisti, 51, 1, 26, 1915, engleski prijevod *On the Theory of the Budget of the Consumer*, u Stigler, G. J., Boulding, K. E., *Readings in Price Theory,* str. 27-56, Allen and Unwin, London, 1953.
22. Stigler, G. J., *The Development of Utility Theory, I & II*, Journal of Political Economy, Vol. 58, (4) p. 307-27, (5), p. 373-96, 1950.
23. Sydsaeter, K., Hammond, J. P., *Mathematics for Economic Analysis*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New York, 1995.
24. Wicksteed, P. H., *The Scope and Method of Political Economy*, The Economic Journal, 1914.
25. Willig, R. D., *Consumer's Surplus without apology*, American Economic Review, 66: 589-597, 1976.