Osječki matematički list 13 (2013), 105-119

Nashova ravnoteža

Mirna Čalija Matijević[*] Bojan Radišić[†]

Sažetak

Jedan od najvažnijih i najpopularnijih pojmova teorije igara je Nashova ravnoteža. U ovom radu želja nam je objasniti pojam Nashove ravnoteže u slučaju igranja čistih i mješovitih strategija na jednostavan i razumljiv način. Brojnim primjerima uvest ćemo i objasniti temeljne pojmove teorije igara. Demonstrirat ćemo razliku između racionalnosti igrača i zajedničke spoznaje svih igrača o tome jesu li svi ostali igrači racionalni, te kako iskoristiti takvo znanje pri odabiru pobjedničke strategije. U tu svrhu smo odigrali jednu od popularnih igara "Pogodi 2/3 od prosjeka" u nekoliko različitih osječkih srednjih škola.

Ključne riječi: *teorija igara, dominantna i podređena strategija, Nashova ravnoteža, čista i mješovita strategija*

Nash equilibrium

Abstract

One of the most important and probably the most popular concepts of game theory is Nash equilibrium. In this paper we wish to explain the notion of Nash equilibrium in presence of pure and mixed strategies in simple and understandable way. With numerous examples we will motivate and introduce some basic game theory notions. We will illustrate the difference between perfect rationality of a player and the common knowledge of rationality of all players, and how to use that knowledge in order to win the game. In order to demonstrate that we have performed the popular "Guess 2/3 of the average" game in several high-schools in the city of Osijek.

Keywords: *game theory, a dominant and dominated strategy, Nash equilibrium, pure and mixed strategy*

[*]III. gimnazija Osijek, Osijek, Kamila Firingera 14, email: mirna.calija@skole.hr
[†]Veleučilište u Požegi, Požega, Vukovarska 17, email: bradisic@vup.hr

1 Uvod

John Von Neumann (1902.–1977.) *američki matematičar mađarskog porijekla, smatran polimatom zbog značajnog doprinosa u širokom rasponu matematičkih i fizikalnih disciplina. U području računarstva značajan je što je dao prijedlog današnjeg modela računala.*

Teorija igara jedna je od najznačajnijih pojava koja je promijenila poglede moderne ekonomije. Početkom moderne teorije igara smatra se knjiga *Theory of Games and Economic Behavior* objavljena 1944. godine. Autori knjige su John Von Neumann, američki matematičar mađarskog porijekla i Oskar Morgenstern, njemački ekonomist koji je zbog drugog svjetskog rata emigrirao u SAD.
Sama definicija teorije igara se može pronaći u različitim knjigama iskazana na različite načine. Mi ćemo koristiti sljedeću definiciju preuzetu iz [1]:

Teorija igara analizira interakciju među skupinom racionalnih igrača koji se ponašaju strateški.

U ovoj definiciji treba obratiti pozornost na nekoliko ključnih riječi: *skupina*, *interakcija*, *racionalni igrač* i *strateško ponašanje*. Svaku skupinu u igri čine dva ili više igrača. Interakcija podrazumijeva da što god učini jedan igrač ima direktan utjecaj na barem još jednog od preostalih igrača u skupini. Racionalni igrač je onaj koji odabire svoju najbolju strategiju (potez[1]) u ovisnosti o vlastitim očekivanjima krajnjeg ishoda igre. Dakle, racionalni igrač neće nikada svjesno povući loš potez, tj. odabrati strategiju na svoju štetu. Strateško ponašanje, u drugu ruku, podrazumijeva odluku o izboru poteza obzirom na međuovisnost o potezima drugih igrača. Uzmimo za primjer pisanje pismenog ispita. Skupinu čine nastavnik i studenti između kojih se odvija interakcija. Točnije, s jedne strane nalazi se student koji pismeni ispit može položiti uzdajući se u svoje naučeno znanje ili će pokušati varati koristeći sve (ne)konvencionalne metode prepisivanja. S druge strane je nastavnik koji motri studente na pismenom ispitu i ocjenjuje ih obzirom na uspješnost pismenog ispita. Student, strateški, donosi odluku hoće li biti pošten i dobiti ocjenu koju realno zaslužuje, ili će varati da bi poboljšao svoj rezultat, a pri tome riskirati da bude uhvaćen i udaljen s ispita. Isto tako s druge strane nastavnik je taj koji bi trebao uočiti one koji varaju i udaljiti ih s ispita. Formalno, svaka igra mora sadržavati tri ključna *sastojka*, a to su: igrači, strategije i isplate.

Definicija 1.1. *Konačna igra Γ uređena je trojka konačnog skupa igrača, konačnog skupa strategija te funkcija isplata:*

1. *Skup igrača $N = \{1, \ldots, n\}$.*

[1]Koncept 'strategije' i 'poteza' načelno nisu isti. Dok 'potez' znači aktivnost koju igrač poduzima igrajući igru, 'strategija' podrazumijeva igračevo razmišljanje, tj. algoritam igranja igre na osnovu kojega igrač povlači poteze. U ovom radu mi ćemo podrazumijevati da 'odabrati strategiju' znači odlučiti se koje poteze odigrati.

2. *Konačni skup strategija* $S_i = \{s_1, \ldots, s_m\}, \forall i \in N$. *Skup* $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ *je skup svih mogućih kombinacija strategija.*

3. *Funkcija isplata* $u_i : S \to \mathbb{R}, \forall i \in N$, *predstavlja isplate* $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ *igrača i s obzirom na kombinaciju strategija svih igrača u igri.*

Igrači su glavni sudionici igre. To mogu biti: pojedinci, skupine ili organizacije. Najmanji broj igrača je dva, a ukupan broj igrača mora biti konačan i poznat. Isplate su brojevi koji se pridružuju svakom mogućem ishodu igre obzirom na odabir strategije svakog igrača. Bolji ishod uvijek se prikazuje većim brojevima.

1.1 Zatvorenikova dilema

Najpoznatiji i osnovni primjer teorije igara je igra poznatija po imenu *zatvorenikova dilema*. Igru su osmislili tijekom pedesetih godina prošlog stoljeća Merrill M. Flood (1908.-1991.) i Melvin Dresher (1911.-1992.), a Albert W. Tucker (1905.-1995.) formalizirao je igru u današnjem obliku koristeći zatvorske kazne kao isplate. Strategije prisutne u ovoj igri primjenjive su u različitim područjima.

Zatvorenikova dilema glasi: Policija privede dva osumnjičenika. Osumnjičenike zatvore u dvije zasebne sobe, bez ikakve mogućnosti međusobne komunikacije, i pred svakog postavljaju izbor. Osumnjičenik može šutjeti ili izdati drugog osumnjičenika, i to na sljedeći način:

Ovdje se radi o pojmu strateške nesigurnosti što znači da igrač nije siguran koji potez povlači trenutno njegov protivnik [2].

- prvi osumnjičenik izdaje drugog, a drugi osumnjičenik šuti, tada je *izdajica* slobodan, a onaj drugi dobije 7 godina zatvora;

- ako oba osumnjičenika izdaju jedan drugog, obojica će dobiti kaznu od tri godine zatvora;

- ako oba osumnjičenika šute, obojica će dobiti kaznu od jedne godine zatvora.

Svaki osumnjičenik može izabrati samo jednu akciju, ne znajući koju će akciju izabrati drugi osumnjičenik. Dilema je treba li osumnjičenik izabrati šutnju ili izdaju.

Kako bi bilo lakše prikazati sve strategije u ovoj dilemi, osumnjičenike ćemo zvati Dora i Luka. Kako bismo bili sigurni radi li se formalno o igri pogledajmo *sastojke*. Imamo dva igrača: Dora i Luka, strategije koje oba igrača imaju na raspolaganju su šutnja ili izdaja. Isplate predstavljaju ili oslobađajuća presuda ili kazna zatvora ovisno o izboru strategije Dore i Luke. Sljedeća tablica predstavlja isplate u skladu s Dorinim strategijama:

		Luka	
		Šuti	Izdaje
Dora	Šuti	-1	-7
	Izdaje	0	-3

Negativni brojevi[2] predstavljaju broj godina zatvora koje Dora može dobiti ovisno koji potez odabere, npr. ako ona izabere šutnju, a Luka izdaju tada ona dobija 7 godina zatvora. Ukoliko oboje odaberu izdaju tada Dora dobije 3 godine zatvora.
Po istoj logici Lukina tablica izgleda ovako:

		Luka	
		Šuti	Izdaje
Dora	Šuti	-1	0
	Izdaje	-7	-3

Spajanjem ovih dviju tablica na način da u svaku ćeliju upisujemo dva broja tako da prvi broj predstavlja isplatu igrača u odgovarajućem retku[3] (Dora), a drugi broj predstavlja isplatu igrača u odgovarajućem stupcu[4] (Luka) dobivamo tablicu koju nazivamo *tablica isplata*. U ovom slučaju tablica isplata izgleda ovako:

		Luka			
		Šuti		Izdaje	
Dora	Šuti	-1	-1	-7	0
	Izdaje	0	-7	-3	-3

Uzmimo za primjer ćeliju gdje Dora šuti, a Luka izdaje, stoji $[-7 \quad 0]$. Prvi broj -7 predstavlja Dorinu isplatu (7 godina zatvora). Označimo li šutnju sa Š i izdaju sa I, skup Dorinih strategija s $S_D = \{\text{I}, \text{Š}\}$, a skup Lukinih strategija s $S_L = \{\text{I}, \text{Š}\}$, Dorinu isplatu možemo zapisati kao $u_D(\text{Š}, \text{I}) = -7$. Drugi broj 0 predstavlja Lukinu isplatu (slobodan je) te ako koristimo oznake Š i I, Lukinu isplatu možemo prikazati kao $u_L(\text{Š}, \text{I}) = 0$. U ovom slučaju Lukina brojčana vrijednost je veća od Dorine, tj. $u_L(\text{Š}, \text{I}) > u_D(\text{Š}, \text{I})$, pa zaključujemo kako je on pobjednik. Postavlja se pitanje kako Dora treba odigrati da ostvari prednost?
Pretpostavimo da Luka odabere šutnju. Ukoliko Dora također odabere šutnju svatko će dobiti 1 godinu zatvora (-1). Kada bi izdala Luku on bi dobio 7 godina zatvora, a ona bi bila slobodna (0). Zaključujemo kako Dora treba u ovom slučaju izabrati izdaju budući je $u_D(\text{I}, \text{Š}) > u_D(\text{Š}, \text{Š})$. Pretpostavimo sada da Luka izabere izdaju. Odabere li Dora šutnju, ona će

[2] U skladu s označavanjem isplata veći broj predstavlja bolji izbor.
[3] Igrač čije ime stoji pokraj tablice.
[4] Igrač čije ime stoji iznad tablice.

dobiti 7 godina zatvora (-7), a Luka će biti slobodan. Ako bi Dora izdala Luku svatko od njih bi dobio 3 godine zatvora (-3). Iz toga je vidljivo da je, kao i u prethodnom slučaju, Dori isplativije izabrati izdaju, tj. vrijedi $u_D(\text{I},\text{I}) > u_D(\text{Š},\text{I})$.
Bez obzira koju strategiju Luka odabere, šutnju ili izdaju, za Doru je najbolja strategija izdaja Luke. Dorina strategija u kojoj je izdaja uvijek bolja od šutnje naziva se *dominantna strategija*.

Definicija 1.2. *Strategiju $s_i' \in S_i$ nazivamo dominantnom strategijom igrača i ukoliko, neovisno o izboru strategija ostalih igrača $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$, vrijedi $u_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n) \geq u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$, za sve $s_i \in S_i \setminus \{s_i'\}$, tj. isplate za s_i' su veće ili jednake od isplata za bilo koje druge strategije igrača i.*

Napomena 1.1. *Ako u prethodnoj definiciji umjesto veće stavimo strogo veće tada kažemo da je strategija s_i' striktno dominantna strategija.*

Ekvivalentno na temelju ove definicije definirajmo i pojam *podređene strategije*.

Definicija 1.3. *Strategiju $s_i' \in S_i$ nazivamo podređenom strategijom igrača i ukoliko, neovisno o izboru strategija ostalih igrača $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$, vrijedi $u_i(s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n) \leq u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$, za sve $s_i \in S_i \setminus \{s_i'\}$, tj. isplate za s_i' su manje ili jednake od isplata za bilo koje druge strategije igrača i.*

Napomena 1.2. *Ako u prethodnoj definiciji umjesto manje stavimo strogo manje tada kažemo da je strategija s_i' striktno podređena strategija.*

Jasno je iz prethodne definicije da svaki racionalni igrač nikada neće odabrati podređenu strategiju. Kako je i Luka racionalan igrač odigrat će svoju dominantnu strategiju, kao i Dora, a to je izdaja jer je taj ishod i za njega uvijek bolji od šutnje.

Primijetite da u Zatvorenikovoj dilemi možemo zamijeniti uloge Dore i Luke, a da sama igra ostane nepromijenjena. Igre u kojima se mogu mijenjati identiteti igrača, a da se isplate ne mijenjaju nazivaju se *simetrične igre* (više o simetričnim igrama možete pronaći u [4]).
Na temelju analize strategije Dore i Luka možemo zaključiti da će oboje izabrati izdaju i tako će oboje dobiti po tri godine zatvora. Postoji li bolje rješenje za oboje? Postoji, ali tada ne bi odabrali svoje strogo dominantne strategije, nego bi oboje izabrali šutnju. Za oboje je to najbolji ishod jer se "izvuku" sa samo jednom godinom zatvora.
Kako bi stvar postala zanimljivija, pretpostavimo da je Dora uspjela sugerirati Luki da će ona sigurno izabrati šutnju kao svoj potez. Kako će se postaviti Luka?
Pred njim se nalazi sljedeća dilema:

1) ako izda Doru on će biti slobodan, a Dora će dobiti sedam godina zatvora,

2) ako se odluči na šutnju oboje će biti u zatvoru godinu dana.

Ukoliko je Luka *sebičnjak* njegov izbor logično bi bio 1), a ako je *altruist* onda će njegov izbor biti 2). Njegov osobni odabir ili 1) ili 2) ovisi prvenstveno o tome kakva je on osoba i kakav je njegov odnos s Dorom, ali to već izgleda kao dobar scenarij za neku TV sapunicu.

1.2 Pogodi 2/3 od prosjeka

'Pogodi 2/3 od prosjeka' je igra koju nastavnici često koriste kao demonstracijski primjer, ali i eksperiment nad samim studentima. Igru je 1981. osmislio i objavio Alain Ledoux u časopisu Jeux et Strategie. Sama igra se može opisati na sljedeći način.

Nastavnik pred svoje učenike ili studente postavlja sljedeći zadatak: *Svaki student treba izabrati jedan cijeli broj iz intervala od* 1 *do* 100*. Pobjednik je onaj koji izabere broj najbliži 2/3 od prosjeka svih izabranih brojeva.* Pretpostavimo da pobjednik ili pobjednici, ukoliko ima više, kao nagradu dobiju svaki po 5 kuna.

Često se ova igra definira na način da student može izabrati bilo koji broj iz intervala $[0, 100]$*. Mi smo se zbog jednostavnosti odlučili za cjelobrojnu verziju igre jer ako se radi o proizvoljnom realnom ili racionalnom broju iz tog intervala, ovo ne bi bila konačna igra.*

Ovo je primjer konačne igre od n igrača, gdje je n ukupan broj studenata koji sudjeluju u igri. Svaki student i ima definiran svoj konačni skup strategija $S_i = \{1, 2, \ldots, 100\}$, te funkciju isplate u_i koja je jednaka 0kn ili 5kn ukoliko je i-ti igrač pobjednik. Primijetite da u ovoj igri ne postoji striktno dominantna niti dominantna strategija za niti jednog igrača. U suprotnom bi slijedilo da i-ti igrač može odabrati broj od 1 do 100 koji mu jamči, neovisno o izboru strategija tj. brojeva ostalih igrača, uvijek bolju isplatu. Primijetite da bi u ovoj igri bolja isplata uvijek značila 5kn, tj. značila bi pobjedu.

Međutim, u ovoj igri postoje podređene strategije. Na primjer, sve strategije od 67 do 100 su podređene strategije jer čak i kada bi svi studenti odabrali broj 100, što svakako nije primjer racionalnog ponašanja igrača koji žele pobijediti, brojevi veći od 66 su veći od 2/3 broja 100. Ukoliko studenti zanemare podređene strategije, ostaju im brojevi od 1 do 66 kao mogući izbori. Koristeći isti argument kao i gore, sada strategije od 44 do 66 postaju podređene strategije, koje niti jedan racionalni igrač ne želi odigrati. Ukoliko studenti opet zanemare podređene strategije, ostaju im brojevi od 1 do 43 kao mogući izbor. Primijetite da se ovaj argument iterativno ponavlja. Budući da racionalni igrač nikada neće izabrati podređenu strategiju svi studenti bi trebali odabrati broj 1 kao odgovor.

Promotrimo sada kako to izgleda u praksi. Odigrali smo igru *2/3 od prosjeka* u nekoliko srednjih škola u gradu Osijeku. Nakon što su učenicima objašnjena pravila igre, dobili smo sljedeće rezultate[5]:

	G-I raz.	G-II raz.	G-III raz.	G-IV raz.	E-IV raz.	EiP-IV raz.
broj učenika	15	23	26	19	22	20
2/3 prosjeka	30,7	25,45	25,92	23,92	24,96	21,97
pobjed. strategija	33	26	26	24	25	22
br. učen. iznad 66	3	3	1	3	6	3

Za usporedbu, ova igra je odigrana kao natjecanje preko Interneta, organizirana od strane Danskih novina Politiken. U natjecanje se uključilo 19 196 ljudi, a pobjednik je pobijedio odigravši strategiju 21,6, što je vrlo slično obrascu uočenom među našim srednjoškolcima iz Elektrotehničke i prometne škole Osijek. Primijetite relativno veliki broj učenika koji su se odlučili za odabir podređene strategije, odigravši broj veći od 66. Radi se očigledno o učenicima koji ili nisu shvatili pravila igre ili su se odlučili iz nekog razloga ne ponašati racionalno.

Rezultati ove igre jasno pokazuju razliku između racionalnosti igrača i zajedničke spoznaje svih igrača o tome jesu li i svi ostali igrači racionalni. Ukoliko bi svaki igrač znao da su i svi ostali igrači racionalni tj. da će se svaki igrač ponašati racionalno, izbor broja 1 bio bi očit. Međutim, kao što su i naši eksperimenti pokazali, nije mudro, čak i za potpuno racionalne igrače, izabrati broj 1, ukoliko nije jasno da će i ostali igrači slijediti logiku ne odabiranja podređene strategije, tj. logiku racionalnog ponašanja.

2 Nashova ravnoteža

U ovom poglavlju ćemo nastaviti koncept igre s dva igrača, Dore i Luke, kao primjer na osnovu kojega ćemo motivirati i objasniti koncept Nashove ravnoteže u teoriji igara.

Definicija 2.1. *Pretpostavimo da Dora vjeruje da zna sve Lukine strategije $s_L \in S_L$. Dorina strategija $s_D \in S_D$ naziva se* najboljim odgovorom *(NO) na neku Lukinu strategiju s_L ako:*

[5] G predstavlja III. gimnaziju, E predstavlja Ekonomsku, a EiP predstavlja Elektrotehničku i prometnu školu u Osijeku.

$$u_D(s_D, s_L) \geq u_D(s'_D, s_L), \ \forall s'_D \in S_D.$$

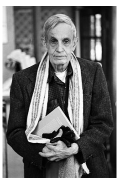
Na isti način definiramo i Lukin najbolji odgovor.

Primjer 1. *Pretpostavimo da Dora i Luka igraju sljedeću igru. Dora ima na izbor poteze:* Gore, Sredina *i* Ispod, *a Luka ima na izbor:* Lijevo, Centar *i* Desno. *Pronađimo Dorine najbolje odgovore na odabrane Lukine strategije ako tablica isplata izgleda ovako:*

		Luka					
		L		*C*		*D*	
Dora	*G*	3	3	2	5	5	5
	S	4	4	2	1	2	6
	I	2	2	1	6	3	4

Dorin NO je *Sredina* u slučaju da Luka igra *Lijevo*. To možemo skraćeno zapisati kao: $NO_D(L) = \{S\}$. Ako Luka odigra *Centar* tada Dora ima dva NO, a to su *Gore* i *Sredina*, tj. $NO_D(C) \in \{G, S\}$. Odigra li Luka *Desno* Dorin NO je tada *Gore*, tj. $NO_D(D) = \{G\}$. Na sličan način možemo utvrditi Lukine NO za izabrane Dorine strategije. Primijetite da će na Dorin NO, Luka odgovoriti svojim NO, na koji će Dora opet odgovoriti svojim NO itd.

Pretpostavimo da Dora i Luka uvijek mogu predvidjeti strategiju koju će odigrati njihov oponent. Pod tim uvjetom, jasno je da će i Dora i Luka kao racionalni igrači uvijek odabrati njihov NO kao najisplativiju strategiju, jer niti Dora niti Luka ne mogu poboljšati svoje isplate odstupanjem od odabira svojih NO. Primijetite da se u ovoj igri uspostavila ravnoteža, gdje svaki igrač igra svoj NO i ne želi odstupiti od njega.



John Forbes Nash (1928.–danas) *američki matematičar koji je osvojio Nobelovu nagradu za princip "Nashovog ekvilibriuma" u teoriji igara. Prema njemu je rađen film* Genijalni um *iz 2001.*

Ovakva se ravnoteža vrlo jednostavno može generalizirati na neku općenitu igru s *n* igrača, a u teoriji igara se naziva *Nashova ravnoteža.*

Definicija 2.2. *Odabir strategija* $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ *n igrača u nekoj igri* Γ *naziva se Nashova ravnoteža ako svaki igrač* i *odabire strategiju* s_i^*, *koja predstavlja njegov najbolji odgovor obzirom na odabir strategija ostalih igrača.*

Prirodna dva pitanja koja se nameću u ovom trenutnu i na koja ćemo pokušati dobiti odgovor su sljedeća:

1. Ima li svaka konačna igra Nashovu ravnotežu?
2. Ukoliko konačna igra ima Nashovu ravnotežu, je li ona nužno jedinstvena?

Da bi to razjasnili, promotrit ćemo sljedeće primjere.

Primjer 2. *Postoji li Nashova ravnoteža u Zatvorenikovoj dilemi? Ispišimo sve NO i Dore i Luke:*

Dora	*Luka*
NO_D(*Šutnja*)$= \{Izdaja\}$	NO_L(*Šutnja*)$= \{Izdaja\}$
$NO_D(Izdaja) = \{Izdaja\}$	$NO_L(Izdaja) = \{Izdaja\}$

U tablici isplata sa zvjezdicom su označeni NO i Dore i Luke:

		Luka			
		Šuti		*Izdaje*	
Dora	*Šuti*	-1	-1	-7	0^*
	Izdaje	0^*	-7	-3^*	-3^*

Kako smo ranije već detaljnije analizirali ovaj slučaj jasno je da je strategija $(Izdaja, Izdaja)$ *prema definiciji Nashova ravnoteža u ovoj igri.*
Ako ili jedan ili drugi igrač promijeni strategiju (odabere šutnju) ne može poboljšati svoju isplatu u odnosu na protivnika (ovdje je može samo pogoršati). Uočimo kako je to jedina ćelija u tablici u kojoj se nalaze NO i Dore i Luke.

Primjer 3. *Postoji li Nashova ravnoteža u igri* $2/3$ od prosjeka? *Primijetite da će Nashova ravnoteža u ovoj igri biti uspostavljena iterativnom eliminacijom podređenih strategija, što na kraju rezultira odabirom strategije igranja broja 1. Niti jedan igrač ne želi odstupiti od odabira broja 1, jer mu promjena strategije ne može poboljšati isplatu u odnosu na protivnika.*

Iako bi mogli zaključiti iz gornjih primjera kako postoji samo jedna Nashova ravnoteža u igri pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 4. *Promotrimo li tablicu iz Primjera 1 i označimo li Dorine i Lukine NO zvjezdicom dobit ćemo ovakvu tablicu.*

		Luka					
		L		*C*		*D*	
Dora	*G*	3	3	2^*	5^*	5^*	5^*
	S	4^*	4	2^*	1	2	6^*
	I	2	2	1	6^*	3	4

Kao i u prethodnom primjeru u tablici isplata lako je uočiti da u ovoj igri (G, C) *i* (G, D) *predstavljaju Nashovu ravnotežu. Odabir jednog ili drugog rješenja ovisi o vrsti igre, odnosno o interpretaciji isplata. Npr. ako rješenja gledamo u kontekstu novčane isplate tada bi logičan izbor bio* (G, D) *jer bi oba igrača dobili jednak iznos i bili bi zadovoljni.*

Sljedeći primjer zove se *Igra poslovnih partnera*.

Primjer 5. *Dora i Luka imaju tvrtku u zajedničkom vlasništvu. Profit tvrtke ovisi o radnom vremenu koji svaki od partnera provede na poslu. Profit tvrtke opisuje funkcija:* $P(D, L) = 4 \cdot (D + L + kDL)$*, pri čemu je D radno vrijeme Dore, a*

L radno vrijeme Luke, uz uvjet da maksimalno dnevno mogu raditi 4 *sata, D,L* $\in [0,4]$. *Broj k predstavlja sinergiju koja nastaje kroz zajednički rad,* $k \in [0, \frac{1}{4}]$. *Dora smatra kako je cijena njenog rada* D^2*, analogno tome Lukina cijena rada iznosi* L^2. *Svaki od partnera određuje svoje radno vrijeme, neovisno o izboru drugog partnera. Svatko od njih dvoje ima za cilj maksimizirati svoj dio tvrtkinog profita (koji se dijeli na dva jednaka dijela) obzirom na utrošeno radno vrijeme.*
Dakle, Dorina i Lukina isplata obzirom na postavljene uvjete podrazumijeva polovicu profita tvrtke, ali umanjenog za isplaćenu cijenu rada. Matematički zapisano Dorina isplata izgleda ovako: $u_D(D,L) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (D + L + kDL) - D^2 = 2(D + L + kDL) - D^2$, *a Lukina:* $u_L(D,L) = 2(D + L + kDL) - L^2$. *Ovdje ne možemo koristiti tablicu isplate jer se radi o skupu strategija koji nije konačan* ($S_D = S_L = [0,4]$). *Ovu igru analizirat ćemo koristeći funkcije NO. Neka* $\hat{L}$ *predstavlja Lukino radno vrijeme za koje Dora vjeruje da će ga Luka odraditi, tada Dorina isplata izgleda ovako:* $u_D(D,\hat{L}) = 2(D + \hat{L} + kD\hat{L}) - D^2$. *Dorin cilj je maksimizirati svoju isplatu. Kako imamo kvadratnu funkciju lako odredimo maksimum funkcije isplate (tjeme kvadratne funkcije) i on iznosi* $NO_D(\hat{L}) = 1 + k\hat{L}$. *Analogno Lukin NO glasi* $NO_L(\hat{D}) = 1 + k\hat{D}$. *Strateški odabir* (s_D^*, s_L^*) *gdje je* $s_D^* = NO_D(s_L^*)$ *i* $s_L^* = NO_L(s_D^*)$ *je rješenje koje tražimo, a do njega dolazimo rješavanjem sustava:*

$$\begin{aligned} s_D^* &= 1 + k \cdot s_L^* \\ s_L^* &= 1 + k \cdot s_D^*. \end{aligned}$$

Rješenja sustava su: $s_D^* = s_L^* = \frac{1}{1-k}$. *Ova igra ima jedinstvenu Nashovu ravnotežu u kojoj oba partnera trebaju utrošiti* $\frac{1}{1-k}$ *radnog vremena.*

Sljedećim primjerom demonstrirati ćemo da Nashova ravnoteža ne mora uvijek postojati.

Primjer 6. *Luka i Dora igraju igru* pokaži novčić. *Svatko ima jednu kovanicu od* 2 *kune. Svatko može odabrati* pismo *(P) ili* glavu *(G). Igra se tako da istovremeno oboje pokažu novčić. Ukoliko su oboje izabrali pismo ili su oboje izabrali glavu tada Dora dobije Lukine* 2 *kune, a ukoliko jedno odabere pismo, a drugo glavu tada Luka dobije Dorine* 2 *kune. Tablica isplata s NO oboje igrača izgleda ovako:*

		Luka			
		G		*P*	
Dora	*G*	2^*	-2	-2	2^*
	P	-2	2^*	2^*	-2

U tablici isplata uočimo kako niti u jednoj ćeliji nema dva NO. Zaključak je da ovdje nema Nashove ravnoteže kako se niti u jednoj ćeliji ne nalaze dva NO.

U prethodnom primjeru jasno je da **nema Nashove ravnoteže**. Svaki od igrača ovdje može pobijediti samo *na sreću* jer imaju pravo na odabir samo

jednog poteza koji im ne daje sigurnost pobjede. Iako u ovoj igri naizgled postoje samo dva izbora, *pismo* ili *glava*, postoji naime i treći izbor, a to je *bacanje novčića*. Dora svoj izbor može odrediti tako da baci novčić i da izabere upravo ono što pokaže sam novčić. Ako se dogodi *glava* Dora će odabrati *glavu*, u suprotnom njezin izbor bit će *pismo*. Prema tome Dora ima sada tri strategije na raspolaganju: *glava*, *pismo* ili *bacanje novčića* (strategija kojom ima jednake izglede i za dobitak i za gubitak). Strategija *bacanje novčića*, temeljena na vjerojatnosti, primjer je *mješovite strategije* o kojoj ćemo više govoriti u sljedećem poglavlju.
Strategije koje smo do sada opisivali u teoriji igara se nazivaju *čistim strategijama*.

3 Mješovita strategija i Nashova ravnoteža

Definicija 3.1. *Pretpostavimo da je $S_i = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ skup svih (čistih) strategija igrača* i. *Mješovita strategija igrača* i *je distribucija vjerojatnosti njegovih strategija. Drugim riječima, to je uređena m-torka realnih brojeva $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, pri čemu je p_k vjerojatnost igranja strategije s_k, $\forall k = 1, \ldots, m$, i pri čemu vrijedi: $0 \leq p_k \leq 1, \forall k = 1, \ldots, m$ i $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$.*

Napomena 3.1. *Svaka čista strategija nekog igrača uvijek se može tretirati kao mješovita strategija, ukoliko joj pridružimo vjerojatnost* 1*, a svim ostalim strategijama vjerojatnost* 0*. Dakle, čiste strategije su zapravo specijalni slučajevi mješovitih strategija.*

Na početku smo naglasili kako svaka igra osim igrača i strategije mora sadržavati i isplate. U igri u kojoj se igrač koristi mješovitom strategijom takve isplate nazivamo *očekivane isplate.*

Definicija 3.2. *Pretpostavimo da Dora igra mješovitu strategiju zadanu s $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, a neka Luka igra čistu strategiju $s_L \in S_L$. Tada Dorina* očekivana isplata *u odnosu na odabranu Lukinu strategiju iznosi:*

$$eu_D(p, s_L) = \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot u_i(s_k, s_L)$$

Drugim riječima, očekivana Dorina isplata za igranje mješovite strategije je težinski prosjek svih Dorinih čistih strategija u igri. Demonstrirajmo to sljedećim primjerom.

Primjer 7. *Luka i Dora dogovaraju izlazak u kino. Imaju dva filma koja mogu pogledati:* Zameo ih vjetar *(označiti ćemo ga sa Z) ili* Obračun kod O.K. Corrala *(označiti ćemo ga sa O). Oba filma igraju u isto vrijeme. Dora bi radije gledala* Zameo ih vjetar*, a Luka bi radije pogledao* Obračun kod O.K. Corrala. *Isto tako oboje bi radije pogledali film zajedno nego svatko za sebe. Neka tablica isplata izgleda ovako:*

		Luka			
		Z		*O*	
Dora	*Z*	2	1	0	0
	O	0	0	1	2

Pretpostavimo da Dora odabire Zameo ih vjetar *s vjerojatnošću* $\frac{4}{5}$*, a* Obračun kod O.K. Corrala *s vjerojatnošću* $\frac{1}{5}$*. Ukoliko Luka odabere* Zameo ih vjetar*, tada Dorina očekivana isplata prema definiciji 3.2 iznosi:*

$$eu_D(p, Z) = \tfrac{4}{5} \cdot u_D(Z, Z) + \tfrac{1}{5} \cdot u_D(O, Z) = \tfrac{4}{5} \cdot 2 + \tfrac{1}{5} \cdot 0 = \tfrac{8}{5}.$$

Ukoliko Lukin odabir bude Obračun kod O.K. Corrala*, Dorina očekivana isplata iznosi:*

$$eu_D(p, O) = \tfrac{4}{5} \cdot u_D(Z, O) + \tfrac{1}{5} \cdot u_D(O, O) = \tfrac{4}{5} \cdot 0 + \tfrac{1}{5} \cdot 1 = \tfrac{1}{5}.$$

Prethodni primjer predstavlja igru poznatiju pod nazivom *Bitka spolova*. Napomenimo da je jedan rad slične tematike objavljen u prošlom broju Osječkog matematičkog lista (D. Keček: Bitka spolova, OML, 13(1), 2013., 33–41). Pretpostavimo sada da svi igrači u nekoj igri igraju mješovitu strategiju i promotrimo sljedeću definiciju.

Definicija 3.3. *Pretpostavimo da i Dora i Luka igraju svoje mješovite strategije* $p_D = (p_1^D, p_2^D, \ldots, p_m^D)$ *i* $p_L = (p_1^L, p_2^L, \ldots, p_m^L)$*. Tada* očekivane isplate *jednog od igrača, recimo Dore, iznose:*

$$eu_D(p_D, p_L) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} p_k^D \cdot p_l^L \cdot u_D(s_k^D, s_l^L)$$

Primjer 8. *Pretpostavimo da u prethodnom primjeru i Luka igra mješovitu strategiju i to tako da odabire svaki film s vjerojatnošću* $1/2$*. Tada Dorina očekivana isplata iznosi:*
$eu_D(p, q) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} u_D(Z, Z) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} u_D(Z, O) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} u_D(O, Z) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} u_D(O, O) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{9}{10}.$
Ostavljamo zainteresiranom čitatelju da sâm izračuna Lukinu očekivanu isplatu u ovoj igri.

Definicija 3.4. *Neka* $p_i^* = (p_1, \ldots, p_m)$, $\forall i \in N = \{1, \ldots, n\}$*. Skup mješovitih strategija* $(p_1^*, p_2^*, \ldots p_n^*)$ *u konačnoj igri s* n *igrača naziva se Nashova ravnoteža ako, za svakog igrača i njegova mješovita strategija* p_i^* *predstavlja njegov najbolji odgovor s obzirom na odabir mješovitih strategija ostalih igrača.*

U primjeru 6 pokazali smo da ne mora svaka igra imati Nashovu ravnotežu u slučaju čistih strategija. Postoji li Nashova ravnoteža ako primijenimo mješovitu strategiju u spomenutom primjeru? Postoji li Nashova ravnoteža u svakoj igri s mješovitim strategijama? Odgovore daje sljedeći teorem o egzistenciji Nashove ravnoteže u slučaju kada igrači igraju mješovite strategije, koji ćemo samo navesti bez dokaza[6].

Teorem 3.1. *Svaka konačna igra* Γ, *u slučaju mješovitih strategija, ima Nashovu ravnotežu.*

Promotrimo ponovno primjer 6, ali ovoga puta u prisustvu mješovitih strategija.

Primjer 9. *Opis igre dan je u primjeru 6. Pretpostavimo da Dora koristi mješovitu strategiju na način da bira* G *s vjerojatnošću* p, *a* P *s vjerojatnošću* $1-p$. *Dorinu mješovitu strategiju označimo kao* $p^* = (p, 1-p)$. *Luka također igra mješovitu strategiju na način da bira* G *s vjerojatnošću* q, *a* P *s vjerojatnošću* $1-q$. *Lukinu mješovitu strategiju označimo kao* $q^* = (q, 1-q)$. *Tablica isplata ostaje nepromijenjena i izgleda ovako:*

Luka

		G	P	
Dora	G	$2 \quad -2$	$-2 \quad 2$	p
	P	$-2 \quad 2$	$2 \quad -2$	$1-p$
		q	$1-q$	

Prema teoremu 3.1 ova igra nužno mora imati Nashovu ravnotežu. Ostaje još samo pronaći vrijednosti za p^* *i* q^*. *Želimo li pronaći Nashovu ravnotežu za Doru, primijenit ćemo jedan mali trik: odredit ćemo Lukine očekivane isplate u terminima parametra p.*
$eu_L(G, p) = -2 \cdot p + 2 \cdot (1-p) = -2p + 2 - 2p = -4p + 2.$
$eu_L(P, p) = 2 \cdot p - 2 \cdot (1-p) = 2p - 2 + 2p = 4p - 2.$
Ukoliko izjednačimo dobivene rezultate, dobivamo:
$-4p + 2 = 4p - 2.$
Iz prethodne jednadžbe sada lako odredimo $p = \frac{1}{2} = 0.5$ *koji predstavlja Nashovu ravnotežu za Doru. Uočimo da bi u slučaju* $p > 0.5$ *Luka uvijek igrao P jer u tom slučaju vrijedi* $eu_L(P, p) > eu_L(G, p)$. *Isto tako, za* $p < 0.5$ *Luka bi opet imao jasan izbor* G. *Stoga je razumno da je u Dorinom interesu odrediti p takav da Luka nema jasan izbor koji mu donosi veću zaradu. Istim postupkom možemo odrediti vrijednost parametra* $q = \frac{1}{2}$, *tj. Nashovu ravnotežu za Luku. Dakle, Nashova ravnoteža u ovoj igri je uređeni par* $(p^*_, q^*) = ((0.5, 0.5), (0.5, 0.5))$.

U prethodnom primjeru je tablica isplata bila simetrična za oba igrača. Stoga je već od samog početka Nashova ravnoteža za $p = q = 0.5$ bila

[6]Dokaz se bazira na Kakutanijevom teoremu o fiksnoj točki, a opisan je u [5].

poprilično jasna. Promotrimo stoga sljedeći primjer s nesimetričnim isplatama.

Primjer 10. *Dora i Luka igraju tenis. Dora servira lopticu i ima dvije mogućnosti: servirati na Lukinu lijevu stranu* L *s vjerojatnošću* p *ili na njegovu desnu stranu* D. *Luka* hvata *servis tako što odabire svoju lijevu stranu* l *s vjerojatnošću* q *ili desnu stranu* d. *Dorinu mješovitu strategiju označimo* $p^* = (p, 1-p)$*, a Lukinu* $q^* = (q, 1-q)$*. Tablica isplata izgleda ovako:*

Luka

Dora	*l*		*d*		
L	50	50	80	20	p
D	90	10	20	80	$1-p$
	q		$1-q$		

Može se lako uočiti kako ovdje nema Nashove ravnoteže u igri sa čistim strategijama. Kao i u prethodnom primjeru, prema teoremu 3.1, u prisustvu mješovitih strategija Nashova ravnoteža nužno postoji. Da bi ju odredili, odredimo prvo Lukine očekivane isplate u terminima parametra p*.*
$eu_L(l,p) = 50 \cdot p + 10 \cdot (1-p) = 50p + 10 - 10p = 40p + 10.$
$eu_L(d,p) = 20 \cdot p + 80 \cdot (1-p) = 20p + 80 - 80p = -60p + 80.$
Izjednačimo dobivene rezultate, jer Dora ne želi odrediti p koji bi omogućio Luki jasan izbor strane hvatanja servisa, i dobijemo:
$40p + 10 = -60p + 80.$
Iz prethodne jednadžbe sada lako odredimo $p = \frac{7}{10} = 0.7$ *koji nam predstavlja Nashovu ravnotežu za Doru, tj.* $p^* = (0.7, 0.3)$*. Prema dobivenom rezultatu, Dora bi svakako trebala* 70% *svojih servisa odigrati na Lukinu lijevu stranu. Za Luku, prvo odredimo Dorine očekivane isplate.*
$eu_D(L,q) = 50 \cdot q + 80 \cdot (1-q) = 50q + 80 - 80q = -30q + 80.$
$eu_D(D,q) = 90 \cdot q + 20 \cdot (1-q) = 90q + 20 - 20q = 70q + 20.$
Izjednačimo dobivene rezultate:
$-30q + 80 = 70q + 20.$
Iz prethodne jednadžbe odredimo $q = \frac{6}{10} = 0.6$ *koji nam predstavlja Nashovu ravnotežu za Luku, tj.* $q^* = (0.6, 0.4)$*. Prema dobivenom rezultatu, Luka bi svakako trebao* 60% *servisa* hvatati *na svoju lijevu stranu. Nashova ravnoteža u ovoj igri je uređeni par* $(p^*, q^*) = ((0.7, 0.3), (0.6, 0.4))$*.*

4 Zaključak

Konfliktne situacije (igre) dio su svakodnevice, kako u privatnom tako i u javnom životu. Teorija igara svojim teorijskim pristupom nastoji objektivno opisati, objasniti i riješiti svaki konflikt. Koncept Nashove ravnoteže jedan je od najboljih i najpravednijih rješenja koje teorija igara poznaje. Nashova ravnoteža možda nije najbolje rješenje za pojedinca, ali je svakako optimalno rješenje za sve koji sudjeluju u konfliktu.

Literatura

[1] P.K. Dutta, *Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press, Massachusetts, 1999.

[2] I.K. Geckil, P.L. Anderson, *Applied game theory and strategic behavior*, Chapman and Hall/CRC, 2010.

[3] R. Gibbons, *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, 1992.

[4] D. Korkut, R. Kopal, *Teorija igara - Praktična primjena u poslovanju*, Lider Press d.d., Zagreb, 2011.

[5] H. Peters, *Game Theory A Multi-Leveled Approach*, Springer, 2008.

[6] B. Polak, *Game Theory*, on-line lectures by Yale University, Stanford School of Engineering, http://oyc.yale.edu/economics/econ-159.