Osječki matematički list 13 (2013), 165-187

Stirlingovi brojevi

Boris Dokić *

Sažetak

U matematici postoji mnogo specifičnih brojeva kao što su na primjer Fibonaccijevi brojevi, Mersenneovi brojevi, Catalanovi brojevi, Bernoullijevi brojevi i slično. Mnogi od tih brojeva su detaljno proučeni i postoje radovi koji se bave njihovim svojstvima. Takvi su i Stirlingovi brojevi koje ćemo kroz ovaj članak pobliže upoznati. Definirat ćemo Stirlingove brojeve prve i druge vrste, objasniti kako se oni mogu računati te pokazati neke od relacija koje za njih vrijede.

Ključne riječi: *Stirlingov broj prve vrste, Stirlingov broj druge vrste, ciklus, permutacija, particija, podskup, skup, binomni koeficijenti*

Stirling numbers

Abstract

There are many specific numbers in mathematics, i.e. Fibonacci numbers, Mersenne numbers, Catalan numbers, Bernoulli numbers and so on. Many of these numbers are studied in detail and there are many papers about their properties. Stirling numbers are an example of that kind of numbers. We are going to say something about them in this article. We will define Stirling numbers of first and second kind and explain how we can calculate with them. We will also show some relations which hold for them.

Keywords: *Stirling number of first kind, Stirling number of second kind, cycle, permutation, partition, subset, set, binomial coefficients*

*student Odjela za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Gajev trg 6, HR-31 000 Osijek, *email: bd.dokic@gmail.com*

1 Uvod

Kombinatorika se kao grana matematike detaljnije uči u srednjim školama. U okviru tog gradiva se uče binomni koeficijenti koji su neizostavni za nastavak upoznavanja s osnovnim kombinatornim principima prebrojavanja (varijacijama, permutacijama i kombinacijama). Primjena binomnih koeficijenata je stoga uveliko rasprostranjena te je za njih dokazan poprilične broj svojstava.

Osim binomnih koeficijenata, koji pripadaju posebnoj vrsti brojeva, postoji još mnogo različitih brojeva koje možemo svrstati u neku skupinu po nekim zajedničkim svojstvima. Tako na primjer, već od najranijeg doticaja s matematikom učimo za parne i neparne brojeve, kvadrati i kubovi brojeva su također jedna posebna kategorija brojeva. Osim tih jednostavnijih, postoje i neke malo složenije vrste brojeva kao što su Fibbonaccijevi, Catalanovi, Mersenovi, harmonijski, Bernoullijevi i drugi brojevi.

Blaise Pascal (1623-1662) *francuski matematičar, fizičar i filozof*

Uz sve ove navedene brojeve, mi ćemo se pozabaviti posebnom skupinom brojeva koju zovemo Stirlingovi[1] brojevi. Upravo ovi brojevi imaju dosta sličnosti s binomnim koeficijentima jer kao što binommni koeficijenti tvore Pascalov trokut brojeva (tablica 1), tako i Stirlingovi brojevi formiraju trokute brojeva, a osim toga, za njih vrijedi mnoštvo relacija i neke od njih su vrlo slične onima koje poznajemo i za binomne koeficijente.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Tablica 1: Pascalov trokut

[1]James Stirling (1692-1770) - škotski matematičar

2 Stirlingovi brojevi

Stirlingovi brojevi su odavno poznati brojevi i imaju dugu povijest, a vrlo često ih možemo sresti u raznim primjenama u matematičkim disciplinama. Oni se dijele na Stirlingove brojeve prve vrste i Stirlingove brojeve druge vrste o kojima ćemo mi nešto više reći odmah u nastavku. Njihova pojava je najčešća u kombinatorici i u teoriji vjerojatnosti pa su tako kroz povijest često proučavani iako se nije uvijek navodilo njihovo ime.

Mađarski matematičar Charles Jordan 1939. u svojoj knjizi *Calculus of Finite Differences* detaljno opisuje Stirlingove brojeve i iznosi rezultate vezane uz njih. Na taj način su Stirlingovi brojevi dobili puno značajniju ulogu u matematici. Zanimljiv je i citat iz navedene knjige:

> *Stirlingovi brojevi su od najveće koristi u matematičkoj analizi. Ipak, to nije bilo u potpunosti prepoznato; brojevi su bili zanemareni i rijetko korišteni. To je upravo zbog činjenice da su ih različiti autori uvodili pod različitim imenima i oznakama, bez spominjanja da je riječ o istim brojevima. Stirlingovi brojevi su jednako važni, ako ne i važniji od Bernoullijevih; oni bi trebali zauzeti središnju poziciju u matematičkoj analizi konačnih diferencija.*

2.1 Stirlingovi brojevi prve vrste

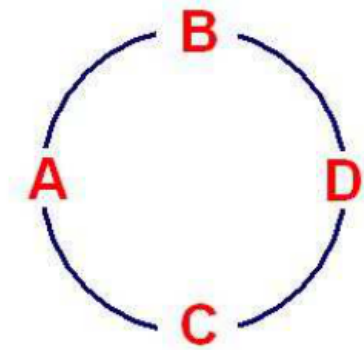
Za početak ćemo krenuti od Stirlingovih brojeva prve vrste, koji su nešto slabije u uporabi, ali imaju značajna svojstva. No prije nego kažemo kakvi su to brojevi i što označavaju trebamo se upoznati s pojmom *ciklusa*. U kombinatorici često prebrojavamo načine kako nešto možemo napraviti te kakav sve razmještaj promatranih elemenata može biti pod nekim uvjetima. Ciklus predstavlja takav razmještaj u kome je bitan isključivo redoslijed elemenata, tj. u ciklusu nam nije bitno koji je element prvi, koji drugi, i tako dalje, već nas samo zanima poredak elemenata.

To zapravo znači da za svaki odabrani element ciklusa kao početni, ukoliko idemo redom po elementima, imamo isti poredak elemenata jer su „prvi" i „zadnji" element ciklusa međusobno povezani.

Sam ciklus i njegove elemente ćemo u nastavku označavati unutar uglatih zagrada, a same elemente ciklusa ćemo odvajati zarezom.

Ako bismo na primjer imali skup koji se sastoji od elemenata A, B, C, D, onda bismo mogli imati ciklus [A, B, D, C], ali taj ciklus je jednak ciklusima

- [B, D, C, A],



Slika 1: Primjer ciklusa s 4 elementa

- [D, C, A, B],
- [C, A, B, D]

pa u sva četiri slučaja govorimo o istom ciklusu jer je poredak elemenata jednak bez obzira na početni element. Na slici 1 možemo vidjeti ilustraciju tog ciklusa i jasno je sa slike da koji god element uzmemo za početni i ukoliko se krećemo u smjeru kretanja kazaljke na satu imamo isti ciklus.

Primjer 1. *Na koliko načina može šestero ljudi sjesti na šest mjesta za okruglim stolom? Dva razmještaja smatramo istim ukoliko se jedan može dobiti iz drugog rotacijom.*

Rješenje. Prvo odaberemo jedno mjesto (jednu stolicu) te na nju postavimo jednu osobu. Nije nam bitno koju ćemo stolicu odabrati jer imamo okrugli stol, ali je bitno koga ćemo odabrati. Prvu osobu možemo odabrati na 6 načina (s obzirom da ih sveukupno ima 6). Potom ćemo do prve osobe postaviti drugu osobu (krećemo se u pozitivnom smjeru - smjer obrnut smjeru kazaljke na satu). Drugu osobu možemo odabrati na 5 načina. Slično bismo dalje odabirali i postavljali osobe na 4, 3, 2 i 1 način. To bi značilo da imamo sveukupno $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ načina da razmjestimo šest osoba oko stola. Međutim, treba primijetiti da se ovdje radi o ciklusu jer su sve stolice oko stola jednake, a mi smo proizvoljno krenuli od jedne. To znači da će nam se ovisno o stolici ponavljati isti razmještaj. Npr. ako osobe označimo slovima A, B, C, D, E, F onda će nam gornjim načinom biti ubrojani razmještaji $[A, B, C, D, E, F]$, $[B, C, D, E, F, A]$, $[C, D, E, F, A, B]$,

$[D,E,F,A,B,C]$, $[E,F,A,B,C,D]$, $[F,A,B,C,D,E]$, a tu je riječ o istom razmještaju jer iste osobe sjede jedna do druge. Zbog toga vidimo da će sveukupan broj načina biti

$$\frac{6!}{6} = \frac{6\cdot 5!}{6} = 5!. \qquad \blacktriangleleft$$

Općenito, kada imamo n ljudi koje treba posjesti za okrugli stol to možemo uraditi na $(n-1)!$ načina jer je riječ o ciklusu.

Sada kada smo pojasnili što su ciklusi, uvodimo i Stirlingove brojeve prve vrste. Oni nam govore na koliko načina možemo n elemenata poredati u k ciklusa. Označavamo ih s

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad c(n,k),$$

pri čemu su $n,k \in \mathbb{N}_0$.

Primjer 2. *Neka je dan skup $\{1,2,3,4,5\}$. Koliko imamo 4 ciklusa ovakvog skupa?*

Rješenje. Dan nam je skup od 5 elemenata i tražimo sve poretke ovih elemenata koristeći 4 ciklusa. Ispišimo ih redom:

$$\begin{array}{ll}
[1]\ [2]\ [3]\ [4,5], & [1]\ [4]\ [5]\ [2,3], \\
[1]\ [2]\ [4]\ [3,5], & [2]\ [3]\ [4]\ [1,5], \\
[1]\ [2]\ [5]\ [3,4], & [2]\ [3]\ [5]\ [1,4], \\
[1]\ [3]\ [4]\ [2,5], & [2]\ [4]\ [5]\ [1,3], \\
[1]\ [3]\ [5]\ [2,4], & [3]\ [4]\ [5]\ [1,2].
\end{array}$$

Kao što možemo vidjeti, broj svih načina da skup od 5 elemenata poredamo u 4 ciklusa jednak je 10. Po načinu na koji smo definirali problem, vidimo da je ovo zapravo Stirlingov broj prve vrste

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{tj.} \qquad c(5,4). \qquad \blacktriangleleft$$

Primjedba 2.1. *Stirlingov broj prve vrste govori o broju načina kako skup rastavljamo na točno određeni broj ciklusa pa se još ponekad naziva i Stirlingov ciklički broj. Upravo iz tog razloga i koristimo oznaku $\left[{n \atop k}\right]$ jer elemente ciklusa inače prikazujemo unutar uglatih zagrada kako smo već i napomenuli.*

Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 3. *Neka imamo 8 perli i tri identična komada žice. Na koliko načina možemo napraviti tri narukvice, ako je poznato da svaka narukvica treba imati barem jednu perlu?*

Rješenje. Sastavljanje narukvice od perli je sastavljanje jednog ciklusa od barem jednog elementa. Nas zanimaju svi 3-ciklusi jer želimo napraviti točno tri narukvice. Odgovor na naše pitanje je Stirlingov broj prve vrste $\left[{8 \atop 3}\right]$. ◀

U gornjem primjeru smo rekli rješenje u obliku Stirlingovog broja prve vrste, ali nismo dali eksplicitnu vrijednost. Ako bismo pokušali napamet nabrajati moguće načine brzo bismo uvidjeli da ih ima znatno više nego u primjeru 2 pa bi nam ispisivanje svih mogućnosti predugo trajalo. Jasno je da ne možemo uvijek ručno brojati sve takve cikluse te ćemo stoga koristiti rekurzivnu relaciju za njihovo računanje koju ćemo iskazati u teoremu. Prije teorema ćemo još reći iznose Stirlingovih brojeva prve vrste za neke specijalne slučajeve:

- $\underline{0 \leq n < k}$

  U ovom slučaju imamo problem određivanja broja načina da skup od n članova prikažemo uz pomoć k ciklusa. Najjednostavniji ciklus je ciklus od samo jednog elementa (još se zove i *1-ciklus* ili *trivijalni ciklus*). Kako u našem slučaju trebamo više ciklusa nego što imamo elemenata očigledno je da i sve kada bismo uzimali 1-cikluse ne bismo n-člani skup mogli prikazati pomoću k ciklusa. Stoga zaključujemo

$$\left[{n \atop k}\right] = 0, \qquad 0 \leq n < k.$$

- $\underline{n = k}$

  Imamo skup od n članova i želimo ga prikazati uz pomoć n ciklusa. Jasno je da to možemo napraviti samo na jedan način i to tako da svaki element čini 1-ciklus. Stoga zaključujemo

$$\left[{n \atop n}\right] = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Trebamo još reći da po dogovoru uzimamo i da je

$$\left[{0 \atop 0}\right] = 1.$$

Sada ćemo iskazati i dokazati relaciju koja omogućuje računanje i ostalih Stirlingovih brojeva prve vrste.

n	$\left[{n \atop 0}\right]$	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$	$\left[{n \atop 7}\right]$	$\left[{n \atop 8}\right]$	$\left[{n \atop 9}\right]$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Tablica 2: Stirlingov trokut za cikluse

Teorem 2.1. *[Osnovna rekurzija za $\left[{n \atop k}\right]$] Za $k,\ n\ \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \tag{1}$$

Dokaz. Uzmimo neki n-člani skup i fiksirajmo neki njegov proizvoljni element x. On sam za sebe čini trivijalni ciklus, a kako cijeli skup želimo podijeliti u k ciklusa, to znači da imamo $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ načina da to napravimo.

U ovom slučaju smo promotrili sve k-cikluse u kojima x čini trivijalni ciklus. Ostaje nam još prebrojati cikluse u kojima je i element x, a takvi ciklusi su duljine ≥ 2.

U tu svrhu možemo promotriti preostalih $n-1$ elemenata i prebrojati načine da njih postavimo u k ciklusa, tj. imamo $\left[{n-1 \atop k}\right]$ načina da to napravimo. Kada smo to napravili, vidimo da x možemo staviti iza svakog elementa u bilo kojem ciklusu, pa to u konačnici znači da sveukupno imamo $(n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$ načina za pravljenje takvih ciklusa.

Zbrajanjem dobivamo traženu relaciju. □

Na osnovu dokazane relacije, uvrštavanjem poznatih vrijednosti, možemo dobiti Stirlingove brojeve prve vrste. Neke od njih ćemo prikazati u **Stirlingovom trokutu za cikluse**. U tablici 2 možemo vidjeti koje su vrijednosti Stirlingovih brojeva prve vrste za slučajeve kada n i k idu od 0 do 9. Kao što za binomne koeficijente imamo Pascalov trokut, tako imamo i za Stirlingove brojeve prve vrste.

Primjedba 2.2. *Sada kada imamo tablicu i formulu za izračunavanje možemo odgovoriti i točnom brojkom na primjer s perlama i tri narukvice. Ukupno imamo* 13132 *načina da napravimo tri narukvice od* 8 *perli i tri identična komada žice jer je*

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = 13132.$$

Ukoliko bismo zbrajali elemente u retku dobili bismo broj svih načina za rastav n-članog skupa na cikluse. Tako bismo za $n = 0$ i $n = 1$ dobili 1, za $n = 2$ rezultat bi bio 2, za $n = 3$ zbroj je 6, za $n = 4$ je 24, za $n = 5$ je rezultat 120...Uočimo da su dobiveni rezultati jednaki $n!$, a može se dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!.$$

Ovaj rezultat nije slučajan. Naime, svakoj permutaciji skupa odgovara neki ciklički poredak i obratno. To ćemo ilustrirati sljedećim primjerom.

Primjer 4. *Neka je zadan skup* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Odredite ciklički poredak koji odgovara permutaciji koja 123456 *prebaci u* 235614. *Koliki je u tom slučaju k i koliko takvih k-ciklusa postoji?*

b) Odredite permutaciju koja je ekvivalentna cikličkom rasporedu

$$[1, 6]\ [2, 4, 5]\ [3].$$

Rješenje. a) Imamo permutaciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, a ciklička struktura se dobiva iz činjenice da:

i) 1 se mijenja s 2, pa se mijenja s 3, pa s 5 i dolazi na svoje originalno mjesto te zbog toga imamo ciklus $[1, 2, 3, 5]$

ii) 4 se zamijeni sa 6 i dolazi na originalno mjesto pa imamo ciklus $[4, 6]$.

U konačnici imamo da je ciklički poredak koji odgovara početnoj permutaciji dan izrazom

$$[1, 2, 3, 5]\ [4, 6].$$

U ovom slučaju je $k = 2$, a odgovor na posljednje pitanje je Stirlingov broj prve vrste

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 274.$$

b) Imamo ciklički poredak $[1,6]\ [2,4,5]\ [3]$ pa krenemo obratnim redoslijedom od prošlog slučaja, tj.

   i) uzmemo prvi ciklus $[1,6]$ te nam on kaže da se 1 zamijeni sa 6 pa imamo
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & ? & ? & ? & ? & 1 \end{pmatrix},$$

   ii) zatim uzimamo drugi ciklus $[2,4,5]$ te iz njega iščitavamo da 2 ide na mjesto 4, pa se mijenja s 5 pa to upišemo i imamo
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & ? & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

   iii) na kraju nam ostaje 1-ciklus sačinjen od broja 3, a on se ne mijenja te dobivamo kao rezultat permutaciju oblika
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀

Ilustrirali smo kako iz permutacije možemo dobiti jedinstveni ciklički poredak koji joj odgovara, ali i obratno, da iz cikličkog poretka možemo dobiti jedinstvenu permutaciju, a to zapravo znači da imamo 1-1 korespondenciju između permutiranja i cikličkih poredaka nekog skupa.

Primjer 5. *Na koliko načina možemo smjestiti* 4 *djeteta i* 5 *odraslih osoba za dva identična okrugla stola tako da svaki stol ima barem jednu odraslu osobu i barem jedno dijete?*

Rješenje. Stolovi su identični tako da ne pravimo razliku među njima. Problem svodimo na dva potproblema (promatramo zasebno smještanje djece, a zasebno smještanje odraslih). Konačni rezultat će biti produkt rezultata ova dva potproblema. Broj načina kako smjestiti 4 djeteta za dva identična okrugla stola odgovara Stirlingovom broju prve vrste $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$. Analogno, broj načina smještanja 5 odraslih osoba za dva identična okrugla stola jednak je $\left[{5 \atop 2}\right] = 55$. Sveukupno imamo $11 \cdot 55 = 605$ načina da smjestimo osobe za dva stola pod zadanim uvjetima. ◀

2.2 Stirlingovi brojevi druge vrste

Ovi brojevi se češće pojavljuju u praksi nego Stirlingovi brojevi prve vrste. No prije nego se upoznamo s njima moramo objasniti pojam *particije skupa*. *Particija n-članog skupa* je familija *nepraznih disjunktnih* podskupova koji u uniji daju cijeli n-člani skup. To zapravo znači da pod *k-particijom* podrazumijevamo svaku particiju n-članog skupa kojoj je:

- broj podskupova jednak k
- podskupovi su međusobno disjunktni
- podskupovi u uniji daju n-člani skup.

Pogledajmo na primjeru što to znači.

Primjer 6. *Bacamo simetrični novčić tri puta. Ispišite sve mogućnosti prema tome koja se strana okrenula u svakom bacanju. Napravite particiju svih mogućnosti na način da svaki podskup bude sastavljen od elemenata u kojima se isto puta pojavila glava.*

Rješenje. Bacanje simetričnog novčića znači da imamo dva jednako moguća ishoda - glava (G) i pismo (P). Kako novčić bacamo tri puta to znači da možemo formirati skup svih mogućih ishoda A na sljedeći način

$$A = \{GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP\}.$$

Sada trebamo napraviti particiju tog skupa i to tako da podskupovi budu sačinjeni od elemenata u kojima ima jednak broj glava. Kako imamo tri bacanja možemo imati tri, dvije, jednu ili nijednu glavu. Nazovimo stoga podskupove s A_3, A_2, A_1, A_0 pri čemu nam indeks podskupa govori koliko se glava pojavilo. Imamo $A_3 = \{GGG\}$, $A_2 = \{GGP, GPG, PGG\}$, $A_1 = \{GPP, PGP, PPG\}$ i $A_0 = \{PPP\}$. Uočimo da je

$$A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j,\ i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Također, vidimo da je

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$$

pa smo napravili jednu particiju skupa A. ◀

Sada kada smo objasnili pojam particije možemo prijeći na brojeve. *Stirlingov broj druge vrste* s parametrima n i k zapravo predstavlja broj koji govori koliko postoji k-particija n-članog skupa. U našem primjeru smo imali jednu 4-particiju skupa (jer smo osnovni skup A rastavili na 4 disjunktna podskupa koja u uniji daju cijeli skup).

Ilustrativno, mogli bismo Stirlingov broj druge vrste opisati kao broj načina da se n **različitih** kuglica stavi u k **jednakih** kutija, pri čemu niti jedna

kutija ne smije ostati prazna.
I za njih postoje razne oznake, a najčešće se koriste oznake

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \qquad \text{ili} \qquad S(n,k),$$

pri čemu su $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Primjer 7. *Neka je dan skup $\{a, b, c, d\}$. Koliko je 2-članih particija ovakvog skupa?*

Rješenje. Dan nam je skup od 4 člana i tražimo sve dvočlane particije. Ispišimo ih redom:

$$\begin{array}{ll} \{a,b,c\} \cup \{d\} & \{a,b\} \cup \{c,d\} \\ \{a,b,d\} \cup \{c\} & \{a,c\} \cup \{b,d\} \\ \{a,c,d\} \cup \{b\} & \{a,d\} \cup \{b,c\} \\ \{b,c,d\} \cup \{a\} & \end{array}$$

Kao što možemo vidjeti, broj ovakvih particija jednak je 7. Po načinu na koji smo definirali, vidimo da je ovo zapravo Stirlingov broj druge vrste

$$\left\{ {4 \atop 2} \right\} \qquad \text{tj.} \qquad S(4,2).$$

◀

Primjedba 2.3. *Kako smo mogli vidjeti, Stirlingov broj druge vrste govori o broju particija skupa pa se još ponekad naziva i Stirlingov particijski broj. Upravo iz tog razloga je i lako zapamtiti oznaku $\left\{ {n \atop k} \right\}$ jer elemente skupova i podskupova inače prikazujemo unutar vitičastih zagrada.*

Primjedba 2.4. *Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ čitamo „n povrh k", a Stirlingov broj 1. vrste $\left[{n \atop k} \right]$ smo rekli da čitamo „n ciklus k". Stirlingov broj 2. vrste $\left\{ {n \atop k} \right\}$ često se čita „n podskup k".*

Primjer 8. *Na koliko načina možemo 8 raznobojnih kuglica razmjestiti u 3 kutije tako da nijedna kutija ne ostane prazna?*

Rješenje. Imamo skup od 8 različitih kuglica i trebamo ih rasporediti na tri dijela tako da u svakom dijelu bude barem jedna. Drugim riječima, trebamo odrediti sve 3-člane particije takvog skupa. Pa očito će rješenje ovog primjera biti Stirlingov broj druge vrste

$$\left\{ {8 \atop 3} \right\}.$$

◀

U primjeru 7 smo vidjeli slučaj kada smo prebrojavanjem dobili jedan Stirlingov broj druge vrste. Postavlja se pitanje kako računati Stirlingove brojeve druge vrste? Naravno da ne želimo uvijek brojati broj svih particija jer bi nam to bilo nepraktično, a u slučaju velikih skupova i vrlo mukotrpno.

Upravo zbog toga, koristi se relacija pomoću koje se može izračunati traženi broj particija. Prije nego iskažemo i dokažemo teorem koji nam o tom govori, pogledajmo neke specijalne slučajeve broja $\left\{ {n \atop k} \right\}$:

- $\underline{0 \leq n < k}$

  Ovdje trebamo n-člani skup prikazati pomoću k-particija. Ukoliko bismo ovaj problem promatrali kao stavljanje n označenih kuglica u k kutija, vidjeli bismo da ne bismo mogli svih k kutija popuniti. Barem jedna kutija bi u tom slučaju bila prazna te n-člani skup ne bismo mogli prikazati k-particijom. Zaključujemo

  $$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0, \qquad 0 \leq n < k.$$

- <u>n=k</u>

  Ukoliko su n i k jednaki prirodni brojevi, onda kroz primjer kutija i kuglica opet možemo vrlo jednostavno zaključiti na koliko načina možemo napraviti particije te dobivamo

  $$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Ukoliko uzmemo $n = 0$ imamo

  $$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1.$$

U tom slučaju imamo prazan skup pa bi to zapravo značilo da nas zanima na koliko načina možemo njega particionirati pomoću 0 nepraznih podskupova. Dogovorno uzimamo da postoji točno jedan takav način.

- <u>k=0</u>

  Zanima nas broj svih 0-članih particija skupa od n elemenata. Ukoliko uzmemo da je $n \in \mathbb{N}$, očito je da nemamo niti jednu particiju, te je

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- <u>k=1</u>

  Zanima nas broj svih jednočlanih particija n-članog skupa. Očito je da postoji samo jedna takva particija i to je upravo početni cijeli skup. (Zamislimo skup $\{a, b, c, d\}$ koji smo imali u primjeru 7. Njega želimo prikazati kao 1-particiju. Jasno je da je to taj skup sam i da ne možemo formirati niti jednu drugu particiju skupa od samo jednog podskupa, a da sadrži sve elemente.) Zaključujemo

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- <u>k=2</u>

  Pogledajmo koliko iznosi $\left\{ {n \atop 2} \right\}$, pri čemu uzimamo da je $n \geq k$. U tom slučaju nam je dovoljno prebrojati koliko postoji podskupova n-članog skupa, a drugi podskup koji s njim daje 2-particiju nas ne zanima pošto njega dobijemo kao komplement prvog podskupa na cijelom n-članom skupu.

  Znamo da je broj svih podskupova n-članog skupa jednak 2^n. Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [4, str. 48.]. Od broja svih tih podskupova oduzimamo 2 (jer je u podskupove uračunat prazan skup i cijeli skup od n članova).

  Npr. uzmemo već spominjani skup $\{a, b, c, d\}$ i prebrojavanjem svih mogućih podskupova imali bismo i prazan skup i taj skup i podskupove $\{a\}, \{b, c, d\}, ...$ Komplement skupa $\{a\}$ na skupu $\{a, b, c, d\}$ je skup $\{b, c, d\}$ i obratno. Samim tim, možemo vidjeti da bi se u tom slučaju radilo o istoj 2-particiji. Tako bismo dobili za svaki podskup pa zbog toga dijelimo sve s 2.

Dolazimo do zaključka da vrijedi

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1.$$

Vidjeli smo neke posebne slučajeve, a općenito ćemo Stirlingove brojeve moći računati koristeći sljedeći rezultat:

Teorem 2.2. *[Osnovna rekurzija za $\left\{ {\mathbf{n} \atop \mathbf{k}} \right\}$] Za k, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Dokaz. Neka je skup A n-člani skup i uzmimo neki proizvoljni element tog skupa, kojeg ćemo označiti s x. Mi želimo skup A podijeliti u k blokova, a kako je $x \in A$, to znači da $\{x\}$ možemo gledati kao zasebni blok, pa ostatak skupa A možemo particionirati na $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ načina.

Osim toga, imamo još jednu vrstu particija, a to su oni u kojima je x u bloku s drugim elementima iz skupa $A \backslash \{x\}$. Takvih k-particija imamo $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$, a x možemo ubaciti u neki od blokova na k načina pa imamo $k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ takvih particija.

Sveukupno imamo $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$, što je i trebalo dokazati. □

Analogno binomnim koeficijentima i Stirlingovim brojevima prve vrste i za Stirlingove brojeve druge vrste imamo **Stirlingov trokut za particije**. Njega možemo vidjeti u tablici 3.

Primjedba 2.5. *Iz tablice možemo očitati i rješenje za primjer* 8. *Ukupno ima* 966 *načina da* 8 *raznobojnih kuglica smjestimo u* 3 *jednake kutije.*

Primjer 9. *Imamo* 10 *različitih razglednica i želimo ih sve podijeliti, ali tako da svaki od naših* 6 *prijatelja dobije barem jednu. Na koliko načina to možemo napraviti?*

Rješenje. Skup $\{R_1, R_2, \ldots, R_{10}\}$ želimo rastaviti u 6 blokova. Iz svake takve particije imamo 6! načina da podijelimo razglednice (to imamo jer razlikujemo prijatelje), a broj svih particija ćemo dobiti kao Stirlingov broj druge vrste

$$\left\{ {10 \atop 6} \right\} = \left\{ {9 \atop 5} \right\} + 6 \left\{ {9 \atop 6} \right\} = 6951 + 6 \cdot 2646 = 22827.$$

n	$\left\{ {n \atop 0} \right\}$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}$	$\left\{ {n \atop 5} \right\}$	$\left\{ {n \atop 6} \right\}$	$\left\{ {n \atop 7} \right\}$	$\left\{ {n \atop 8} \right\}$	$\left\{ {n \atop 9} \right\}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Tablica 3: Stirlingov trokut za particije

Sada još pomnožimo broj svih particija sa svim mogućim načinima slanja i dobijemo konačno da postoji 16 435 440 načina da podijelimo 10 različitih razglednica tako da svaki od 6 prijatelja dobije barem jednu. ◀

Eric Temple Bell
(1883.-1960.)
američki matematičar

Ukoliko bismo zbrojili sve particije nekog n-članog skupa, dobili bismo broj B_n koji nazivamo Bellov broj

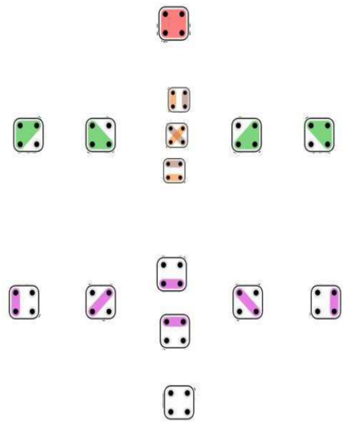
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}, \quad n \geq 1.$$

Ako se opet vratimo na tablicu 3 i zbrojimo sve vrijednosti nekog retka, za odabrani n smo dobili broj svih particija, odnosno, dobili smo Bellov broj kojeg smo gornjom formulom i definirali.

Možemo i grafički prikazati Bellove brojeve. Na slici 2 moguće je vidjeti sve particije 4-članog skupa.
Obojene točkice zajedno su u podskupu pa tako imamo samo *jednu* 1-particiju, *sedam* 2-particija, *šest* 3-particija i *jednu* 4-particiju.
To su ujedno i ilustracije Stirlingovih brojeva

$$\left\{ {4 \atop 1} \right\} = 1, \left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7, \left\{ {4 \atop 3} \right\} = 6, \left\{ {4 \atop 4} \right\} = 1.$$

Ako to sve zbrojimo dobijemo Bellov broj $B_4 = 15$.



Slika 2: Grafički prikaz svih particija 4-članog skupa

Analogno tome, na slici 3 imamo prikazane sve particije 5-članog skupa.

U gornjem redu imamo *jednu* 5-particiju, u drugom *deset* 4-particija, u trećem retku imamo *dvadeset pet* 3-particija, u četvrtom *petnaest* 2-particija te u posljednjem retku imamo *jednu* 1-particiju 5-članog skupa.

Zbrojimo li sve vrijednosti dobivamo Bellov broj $B_5 = 52$.

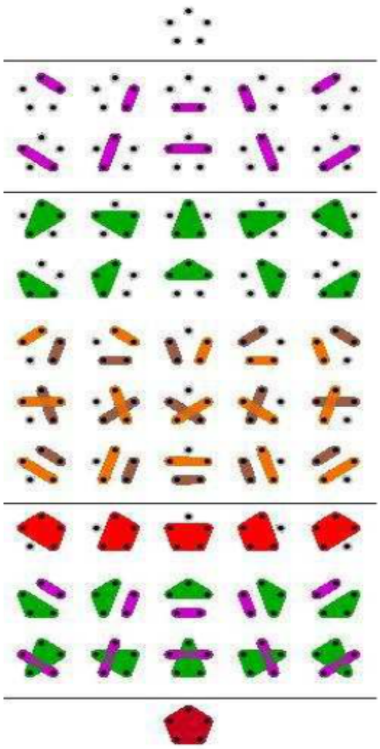
Primjer 10. *Na koliko načina možemo* 8 *raznobojnih kuglica smjestiti u* 3 *identične kutije?*

Rješenje. Prije nego započnemo s rješavanjem, osvrnimo se na primjer 8 i uočimo razliku. U ovom primjeru nemamo naglašeno da nijedna kutija ne smije ostati prazna. Zbog toga ćemo ovaj problem promatrati kroz 1-particije, 2-particije i 3-particije. Konačan rezultat će biti zbroj tri Stirlingova broja, tj.

$$\sum_{i=1}^{3} \left\{ {8 \atop i} \right\} = \left\{ {8 \atop 1} \right\} + \left\{ {8 \atop 2} \right\} + \left\{ {8 \atop 3} \right\} = 1 + 127 + 966 = 1094.$$

◀

Da smo u prošlom primjeru imali identičnih kutija koliko i kuglica očito bi nam rješenje bio Bellov broj B_8.



Slika 3: Grafički prikaz svih particija 5-članog skupa

Bellovi brojevi mogu se računati i rekurzivno preko binomnih koeficijenata. Taj rezultat iskazujemo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.1. *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Dokaz ove propozicije nećemo iznositi, a moguće ga je pronaći u [4, str. 103.].

Rekli smo da se Stirlingovi brojevi, osim u kombinatorici, vrlo često pojavljuju i u vjerojatnosti. Evo stoga jedan takav primjer.

Primjer 11. *Jedna vrsta žitnih pahuljica u svakom svom pakiranju ima jednu od tri različite nagrade. Vjerojatnost pojavljivanja svake od nagrada je jednaka (iznosi*

$\frac{1}{3}$). *Kolika je vjerojatnost da imamo barem jednu od sve tri nagrade nakon što smo otvorili 5 pakiranja žitnih pahuljica?*

Rješenje. Vjerojatnost nekog događaja definiramo kao omjer broja povoljnih i broja mogućih događaja. Broj mogućih događaja je 3^5 jer otvaramo 5 pakiranja i u svakom pakiranju je nezavisno od prethodnog ili idućeg moguće pronaći 3 različite nagrade (pa je ukupno $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$ mogućih ishoda). Broj svih povoljnih ishoda ćemo izračunati kao broj svih 3-particija 5-članog skupa (jer svaka od tri nagrade treba biti zastupljena barem jednom). To znači da je broj povoljnih ishoda jednak $\left\{ {5 \atop 3} \right\}$. Vjerojatnost da imamo barem jednu od svake nagrade nakon otvaranja 5 pakiranja je

$$\frac{\left\{ {5 \atop 3} \right\}}{3^5} = \frac{25}{243} \approx 0.10288.$$

◀

2.3 Neka svojstva Stirlingovih brojeva 1. i 2. vrste

Već i samim pogledom na tablice 2 i 3 moguće je vidjeti da je

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}, \ \forall k, n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

To je vrlo jednostavno i protumačiti kroz činjenicu da svaki neprazni podskup (kakve imamo u Stirlingovih brojeva druge vrste) odgovara barem jednom od poredaka u ciklusu.

U izrazu (2) jednakost vrijedi samo u slučajevima $k = n$ i $k = n - 1$, jer u prvom slučaju imamo trivijalne cikluse, a u drugom samo 2-ciklus i trivijalne cikluse, a svaki trivijalni ciklus i 2-ciklus odgovaraju i broju podskupova. Iskazano formulama, imamo

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}.$$

Može se pokazati kako Stirlingovi brojevi imaju veze s potencijama. Prije nego iskažemo te relacije prisjetimo se da padajuće potencije definiramo

$$x^{\underline{n}} := x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1)), \qquad x^{\underline{0}} := 1, \tag{3}$$

a rastuće potencije definiramo

$$x^{\overline{n}} := x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1)), \qquad x^{\overline{0}} := 1. \tag{4}$$

Sada ćemo pokazati na koji način su padajuće i rastuće potencije povezane sa Stirlingovim brojevima.

Propozicija 2.2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}. \tag{5}$$

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po n.

1° <u>BAZA INDUKCIJE</u>
Ukoliko uvrstimo $n = 0$ imamo

$$x^0 = \left\{ 0 \atop 0 \right\} x^{\underline{0}}$$

$$1 = x^{\underline{0}}.$$

Analogno, ukoliko uzmemo $n = 1$ imat ćemo

$$x^1 = \left\{ 1 \atop 0 \right\} x^{\underline{0}} + \left\{ 1 \atop 1 \right\} x^{\underline{1}} \quad \Rightarrow \quad x^{\underline{1}} = x.$$

2° <u>PRETPOSTAVKA INDUKCIJE</u>
Pretpostavimo da (5) vrijedi za brojeve manje ili jednake $n - 1$.

3° <u>KORAK INDUKCIJE</u>
Trebamo pokazati da tvrdnja vrijedi i za n. Iz izraza (3) možemo dobiti da vrijedi

$$x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x - k) \Rightarrow x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}}.$$

Koristeći tu jednakost imamo

$$x^n = x \cdot x^{n-1} = x \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ n-1 \atop k \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ n-1 \atop k \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ n-1 \atop k \right\} k x^{\underline{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ n-1 \atop k \right\} k x^{\underline{k}} - \underbrace{\left\{ n-1 \atop n \right\} n x^{\underline{n}}}_{=0} + \underbrace{\left\{ n-1 \atop 0 \right\} \cdot 0 \cdot x^{\underline{0}}}_{=0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\} \right) x^{\underline{k}}.$$

Primjenom teorema 2.2 dobivamo

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}.$$

$\square$

Koristeći rezultate gornje propozicije, možemo bilo koju običnu potenciju zapisati u terminima padajućih potencija, pa tako imamo:

$$\begin{array}{lclclclclcl}
x^0 & = & x^{\underline{0}} & & & & & & & & \\
x^1 & = & x^{\underline{1}} & & & & & & & & \\
x^2 & = & x^{\underline{2}} & + & x^{\underline{1}} & & & & & & \\
x^3 & = & x^{\underline{3}} & + & 3x^{\underline{2}} & + & x^{\underline{1}} & & & & \\
x^4 & = & x^{\underline{4}} & + & 6x^{\underline{3}} & + & 7x^{\underline{2}} & + & x^{\underline{1}} & & \\
x^5 & = & x^{\underline{5}} & + & 10x^{\underline{4}} & + & 25x^{\underline{3}} & + & 15x^{\underline{2}} & + & x^{\underline{1}}.
\end{array}$$

Mogli bismo isto ovo dobiti i pomoću rastućih potencija ako bismo u formulu ubacili izraz $(-1)^{n-k}$, te bi formula izgledala ovako:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}.$$

To je posljedica činjenice da vrijedi formula

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}.$$

Pogledajmo sada vezu Stirlingovih brojeva prve vrste s rastućim potencijama.

Propozicija 2.3. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k. \tag{6}$$

Dokaz. Dokazujemo indukcijom po n.

1° <u>BAZA INDUKCIJE</u>

Ukoliko uvrstimo $n = 0$ imamo

$$x^{\overline{0}} = \left[{0 \atop 0} \right] x^0 \Rightarrow 1 = 1$$

Analogno, ukoliko uzmemo $n = 1$ imat ćemo

$$x^{\overline{1}} = \left[{1 \atop 0} \right] x^0 + \left[{1 \atop 1} \right] x^1 \Rightarrow x = x.$$

2° <u>PRETPOSTAVKA INDUKCIJE</u>

Pretpostavimo da (6) vrijedi za brojeve manje ili jednake $n - 1$.

3° KORAK INDUKCIJE

Trebamo pokazati da tvrdnja vrijedi i za n. Iz izraza (4) možemo dobiti da vrijedi
$$x^{\overline{k}} = x^{\overline{k-1}}(x+k-1). \tag{7}$$
Koristeći rezultat teorema 2.1 imamo

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k$$

$$= x \cdot \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{k-1} + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$= x \cdot x^{\overline{n-1}} + (n-1) \cdot x^{\overline{n-1}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) \overset{(4)}{=} x^{\overline{n}}.$$

$\square$

Kao i u prethodnom slučaju, mogli bismo iskoristiti dobiveni rezultat te pomoću njega prikazati rastuće potencije pa bismo dobili:

$$\begin{array}{lllllllllll}
x^{\overline{0}} & = & x^0 \\
x^{\overline{1}} & = & x^1 \\
x^{\overline{2}} & = & x^2 & + & x^1 \\
x^{\overline{3}} & = & x^3 & + & 3x^2 & + & 2x^1 \\
x^{\overline{4}} & = & x^4 & + & 6x^3 & + & 11x^2 & + & 6x^1 \\
x^{\overline{5}} & = & x^5 & + & 10x^4 & + & 35x^3 & + & 50x^2 & + & 24x^1.
\end{array}$$

Koristeći formulu između rastućih i padajućih potencija dobili bismo da vrijedi i formula
$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k.$$
Ono što možemo uočiti je sličnost formula (5) i (6) s dobro poznatom formulom kod binomnih koeficijenata

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

pa na taj način ponovno možemo povezati binomne koeficijente s ovim specijalnim brojevima, kao i u slučaju Pascalovog, odnosno Stirlingovih trokuta.

Pregled nekih drugih rezultata i relacija za Stirlingove brojeve prve i druge vrste moguće je pronaći u [2, str. 264, 265], a mi ćemo za kraj spomenuti još jedan zanimljiv odnos između Stirlingovih brojeva prve i druge vrste i to na skupu $\mathbb{Z}$.

Ako bismo željeli proširiti Stirlingove brojeve na skup cijelih brojeva, morali bismo uvesti dodatne pretpostavke i to

$$\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0,\ \forall k \neq 0; \qquad \begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} = 0,\ \forall k \neq 0;$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0,\ \forall n \neq 0; \qquad \begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 0,\ \forall n \neq 0;$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0, \quad n < k; \qquad \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = 0,\ n < k.$$

Ovako prošireni, Stirlingovi brojevi pokazuju zanimljivo svojstvo, koje nazivamo *svojstvo recipročnosti*, tj. vrijede formule

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k \\ -n \end{Bmatrix}, \quad k,\, n\, \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ -n \end{bmatrix}, \quad k,\, n\, \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Odnos brojeva prema svojstvu recipročnosti može se vidjeti u tablicama 4 i 5.

Na ovaj način smo uspjeli formulom povezati ova dva tipa Stirlingovih brojeva. U praksi se najviše koriste relacije za izračunavanje Stirlingovih brojeva, koje smo u vidu teorema iskazali i dokazali.

n	$\begin{bmatrix} n \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$
−5	1										
−4	10	1									
−3	25	6	1								
−2	15	7	3	1							
−1	1	1	1	1	1						
0	0	0	0	0	0	1					
1	0	0	0	0	0	0	1				
2	0	0	0	0	0	0	1	1			
3	0	0	0	0	0	0	2	3	1		
4	0	0	0	0	0	0	6	11	6	1	
5	0	0	0	0	0	0	24	50	35	10	1

Tablica 4: Recipročnost Stirlingovih brojeva prema formuli 8

n	$\left\{ {n \atop -5} \right\}$	$\left\{ {n \atop -4} \right\}$	$\left\{ {n \atop -3} \right\}$	$\left\{ {n \atop -2} \right\}$	$\left\{ {n \atop -1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 0} \right\}$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}$	$\left\{ {n \atop 5} \right\}$
−5	1										
−4	10	1									
−3	35	6	1								
−2	50	11	3	1							
−1	24	6	2	1	1						
0	0	0	0	0	0	1					
1	0	0	0	0	0	0	1				
2	0	0	0	0	0	0	1	1			
3	0	0	0	0	0	0	1	3	1		
4	0	0	0	0	0	0	1	7	6	1	
5	0	0	0	0	0	0	1	15	25	10	1

Tablica 5: Recipročnost Stirlingovih brojeva prema formuli 9

Literatura

[1] L. Comtet, *Advanced combinatorics*, D. Reidel, Boston, 1974.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley, Boston, 2003.

[3] C. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York, 1950.

[4] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.