Stručni rad
Prihvaćeno 27. 12. 2013.

Maria Čuljak

Izometrije u Escherovim radovima

Isometries in Escher's Work

ABSTRACT

For better understanding of M. C. Escher's tesselation graphics we provide an overview of planar isometries and classification of plane symmetry groups. Some of the plane symmetry groups are explained on prominent Escher's graphics.

Key words: Escher, isometries, tessellation, plane symmetry groups

MSC2010: 00A66, 05B45, 20H15, 51F15, 52C20

Izometrije u Escherovim radovima

SAŽETAK

U ovom članku dan je pregled izometrija ravnine i klasifikacija ravninskih grupa simetrija kao matematička podloga za razumijevanje "trikova" kojima se M. C. Escher služio prilikom stvaranja velikog broja svojih grafika. Razmatrat ćemo grupe simetrija na primjerima nekih od najpoznatijih Escherovih grafika.

Ključne riječi: Escher, izometrije, popločavanje, ravninske grupe simetrija

1 Uvod

Simetrija kao aspekt umjetnosti cijeni se i interpretira već stoljećima. Neki od ranijih umjetničkih radova koji su integrirali simetriju datiraju još iz doba antičkih kultura. Euklid se bavio simetrijom u desetoj knjizi svojih *Elemenata*, gdje definira kada su neke dvije figure simetrične. Nizozemski umjetnik-grafičar Maurits Cornelis Escher (1898.-1972.) ima zadivljujući umjetnički opus te je omiljen među matematičarima. Njegova osnovna inspiracija potiče od arabesknih ukrasa srednjovjekovne palače Alhambre u Španjolskoj. Impresivni opus obuhvaća, između ostalog, i 43 grafike koje Escher jednostavno naziva (npr. *Escher drawing no. 8*). Ta djela nastala su u razdoblju 1936.-1942. nakon čega je Escherova popularnost poprimila svjetske razmjere. Escherove grafike su predmet znanstvenih i stručnih radova matematičara, informatičara, grafičara, a kao vrsta popločavanja ravnine zanimljive su i u kristalografiji ([2]). U ovom radu, koji je nastao na osnovu studentskog seminara, otkrit ćemo tehniku kreiranja nekih njegovih grafika pomoću izometrija u euklidskoj ravnini. Na osnovu klasifikacije ravninskih grupa simetrija prepoznat ćemo grupe simetrija na primjerima. Neke Escherove grafike mogu se promatrati i u neeuklidskoj ravnini ([6]).

2 Definicije i svojstva izometrija

Na početku navodimo osnovne definicije i svojstva izometrija u euklidskoj ravnini E^2 ([3], [4], [5]).

Definicija 1 *Izometrija euklidske ravnine je svaka bijekcija $f : E^2 \to E^2$ ravnine na sebe koja čuva udaljenost točaka, tj. takva da je $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$ za sve točke A i B iz E^2.*

Svojstva izometrija u odnosu na kompoziciju funkcija:

Teorem 1

(i) Kompozicija izometrija f i g, $f \circ g$, je također izometrija.

(ii) Neka je f izometrija. Tada je njezin inverz f^{-1} također izometrija.

Definicija 2 *Kažemo da je izometrija involutorna ako je $f \circ f = id$ i $f \neq id$.*

Involutorna izometrija je sama sebi inverz.

Definicija 3 *Figura je svaki podskup od E^2.*

Za figuru F iz Euklidske ravnine E^2 kažemo da je *fiksna figura* izometrije f ako je f preslikava u nju samu, tj. ako je $f(F) = F$.

Svojstva izometrija u odnosu na fiksnu figuru:

Teorem 2 *Neka je f izometrija.*

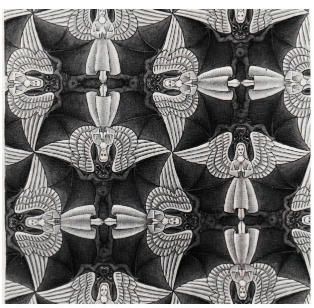
(i) Sjecište, ako postoji, dvaju različitih fiksnih pravaca od f je fiksna točka od f.

(ii) Spojnica dvaju fiksnih točaka od f je fiksni pravac od f.

(iii) Ako je f involutorna izometrija, onda kroz točku koja nije fiksna za f prolazi točno jedan fiksni pravac za f.

Definicija 4 *Involutorna izometrija kojoj su sve točke pravca a fiksne zove se osna simetrija s obzirom na pravac a, u oznaci s_a.*

Escher je u svojim grafikama koristio izometrije: osnu simetriju, translaciju, rotaciju i centralnu simetriju. Svojstvo tih izometrija je da se mogu definirati pomoću osne simetrije.



Slika 1: *Primjer simetrija na Escherovoj grafici (Angel and devil)*

Definicija 5 *Izometriju koja se može prikazati kao kompozicija $s_a \circ s_b$ dviju osnih simetrija s_a i s_b zovemo translacija ako su osi simetrije a i b paralelni pravci.*

Definicija 6 *Izometriju koja se može prikazati kao kompozicija $s_a \circ s_b$ dviju osnih simetrija s_a i s_b zovemo rotacija ako osi simetrije a i b nisu paralelni pravci.*

Definicija 7 *Centralna simetrija je rotacija $s_a \circ s_b$ za koju su osi simetrije a i b okomiti pravci.*

Definicija 8 *Izometrija koja se može prikazati u obliku kompozicije $s_g \circ s_b \circ s_a$, gdje je pravac g okomit na pravce a i b zove se klizna simetrija.*

Klizna simetrija je najzastupljenija u Escherovim grafikama.

Sljedeći teorem daje karakterizaciju nekih izometrija:

Teorem 3

(i) Svaka involutorna izometrija je ili osna ili centralna simetrija.

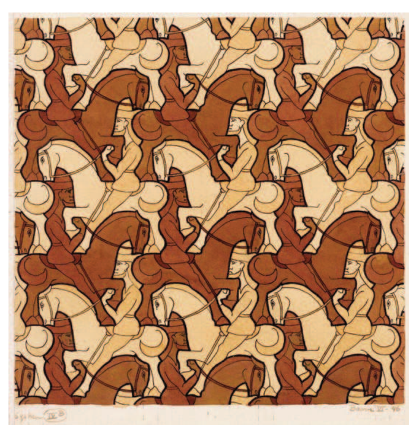
(ii) Kompozicija dviju rotacija je ili rotacija ili translacija.

(iii) Izometrija je klizna simetrija ako i samo ako se može predočiti u obliku kompozicije jedne osne i jedne centralne simetrije ili jedne centralne i jedne osne simetrije.

(iv) Svaka izometrija je ili translacija ili rotacija ili klizna simetrija.

Slika 2: *Primjer translacije na Escherovoj grafici*

Slika 3: *Primjer rotacije na Escherovoj grafici*



Slika 4: *Primjer klizne simetrije na Escherovoj grafici*

3 Grupe simetrija

Neka je $Iz(E^2)$ skup svih izometrija Euklidske ravnine E^2. Poznato je da je $Iz(E^2)$ zajedno s komponiranjem funkcija kao binarnom operacijom grupa izometrija, u oznaci $(Iz(E^2), \circ)$.

Teorem 4 *Neka je* $Iz(F) = \{f \in Iz(E^2) : f(F) = F\}$, *gdje je F figura Euklidske ravnine* E^2. *Tada je* $(Iz(F), \circ)$ *je grupa simetrija figure* F.

Kako bi u Escherovim grafikama prepoznali izometrije definiramo popločavanje.

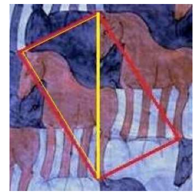
Definicija 9 *Popločavanje je razdioba (particija) ravnine na disjunktne skupove* H_i, $i \in \mathbb{N}$ *čija unija daje cijelu ravninu.*

• *Uzorak* u ravnini je figura, koja je u Escherovim grafikama oblika životinje. Uzorak preslikavamo u samog sebe i pomoću izometrija ravnine: rotacija, simetrija, kliznih simetrija, translacija.

• *Osnovni uzorak* je dio uzorka sa svojstvom da skup uzoraka u *grupi izometrija* prekriva ravninu. Drugim riječima, osnovnim uzorkom popločavamo ravninu.

• *Generirajuće područje* je dio osnovnog uzorka čije slike u grupi simetrija uzorka popločavaju ravninu.

Na slici 5 prikazan je uzorak konja, osnovni uzorak (crveni paralelogram) i generirajuće područje (žuti trokut).



Slika 5: *Primjer generirajućeg područja*

Sljedeći teorem daje klasifikaciju ravninskih grupa simetrija ([1], [8]). Dokaz je izostavljen i može se naći u [9].

Teorem 5 ***(Barlow, Fedorov, Schönflies-1891.)***

Postoji samo 17 *mogućih ravninskih grupa simetrija.*

Tih sedamnaest grupa poznate su i kao ravninske grupe kristalografije. Pomoću njih, kristalografi sistematiziraju kristale ([2]). Ravninske grupe simetrija odgovaraju sedamnaest načina popločavanja ravnine. U Escherovim grafikama se mogu razmatrati vrlo vješta i zanimljiva popločavanja.

Napomena 1 *Broj n označava stupanj rotacije. Rotacija za kut* $\frac{360^\circ}{n}$ *ima stupanj rotacije n.*

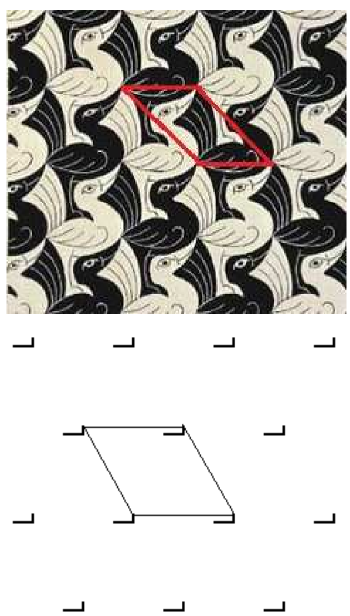
Naziv	**Osnovni uzorak**	**Stupanj rotacije**	**Klizna simetrija**	**Generirajuće područje uzorka**	**Značajke**
p1	paralelogram	1	/	cijela površina	translacija
p2	paralelogram	2	/	1/2 površine	4 rotacije za 180°
pm	četverokut	1	/	1/2	2 osne simetrije
pmm	četverokut	2	/	1/4	2 osne simetrije
pg	četverokut	1	da	1/2	
pgg	četverokut	2	da	1/4	
pmg	četverokut	2	da	1/4	osi simetrije su paralelne
cm	romb	1	da	1/2	
cmm	romb	2	da	1/4	osi simetrije su okomite
p4	kvadrat	4	/	1/4	
p4m	kvadrat	4	da	1/8	centar rotacije je na osi simetrije
p4g	kvadrat	4	da	1/8	centar rotacije nije na osi simetrije
p3	šesterokut	3	/	1/3	
p3m1	šesterokut	3	da	1/6	centar rotacije je na osi simetrije
p31m	šesterokut	3	da	1/6	
p6	šesterokut	6	/	1/6	
p6m	šesterokut	6	da	1/2	

Tablica 1: *Klasifikacija ravninskih grupa simetrija* (preuzeto iz [7])

4 Primjeri Escherovih grafika

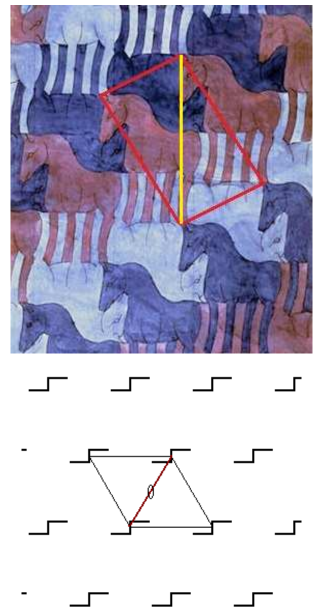
U ovom poglavlju detaljno razmatramo Escherove grafike. Poznavajući sustav 17 ravninskih grupa simetrija, Escher je otkrio svoj sistem ”grupirajućih pločica”. Njegove grafike popločavanja odgovaraju pet od sedamnaest Fedorovih grupa simetrija. Na sljedećim primjerima uzorci su likovi životinja.

Na slici 6, dan je primjer ravninske grupe simetrija $p1$ i detaljan prikaz svojstava ravninske grupe simetrija $p1$. Uzorak grafike je patka. Osnovni uzorak je paralelogram označen crvenom bojom. Generirajuće područje je ekvivalentno osnovnom uzorku. Osnovni uzorak se translatira u smjeru okomitom na stranice paralelograma. Dakle, radi se o translacijama paralelograma koje čine grupu s obzirom na kompoziciju. Kod detaljnog prikaza osnovni uzorak i generirajuće područje su paralelogram pomoću kojeg se generira (popločava ravnina) motiv oblika slova *L*.



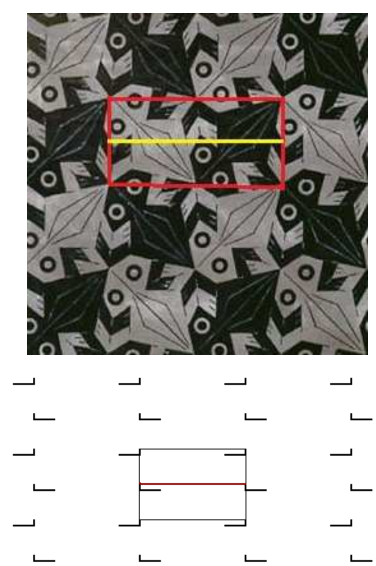
Slika 6: *Escher drawing no.* 128 *i vizualna reprezentacija* $p1$ *grupe simetrija*

Slika 7 predstavlja grupu simetrija $p2$. Osnovni uzorak je paralelogram označen crvenom bojom. Žutom bojom je istaknuto generirajuće područje osnovnog uzorka. Generirajuće područje se transformira rotacijom za 180° i zatim translatira u smjeru rubova osnovnog uzorka. Detaljnija reprezentacija dana je na istoj slici gdje je generiran motiv oblika slova *L*. Znak elipse označava rotaciju generirajućeg područja (u ovom slučaju radi se o $\frac{1}{2}$ površine osnovnog uzorka). Stupanj rotacije je 2, tj. rotacija za 180°.



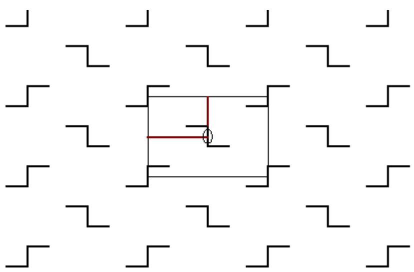
Slika 7: *Escher drawing no.* 8 *i vizualna reprezentacija* $p2$ *grupe simetrija*

Na slici 8 je Escherova grafika *Escher drawing no.* 109 s istaknutim osnovnim uzorkom crvene boje. Generirajuće područje uzorka je označeno žutom bojom. Vertikalno se translatira za $\frac{1}{2}$ duljine kraće stranice te se transformira kliznom simetrijom na lijevu i desnu stranu. Kod ravninske grupe simetrija *pg* generirajuće područje je $\frac{1}{2}$ površine osnovnog uzorka.



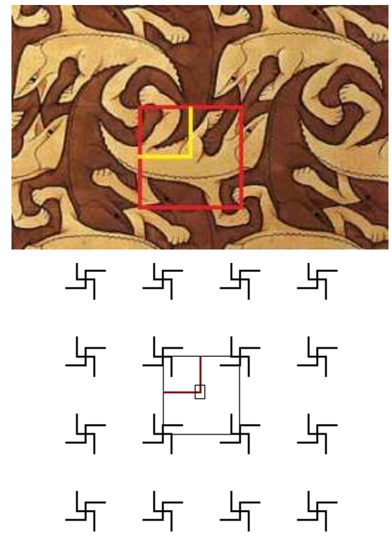
Slika 8: *Escher drawing no.* 109 *i vizualna reprezentacija pg grupe simetrija*

Slika 9 daje uvid u grupu simetrija *pgg*. Znak elipse označava rotaciju generirajućeg područja uzorka za 180°. Generirajuće područje je istaknuto crvenom bojom. Grupa *pgg* sadrži izometrije: rotaciju i kliznu simetriju. Generirajuće područje se rotira za 180° i zatim transformira vertikalno, kliznom simetrijom. Ova metoda slijedi iz Definicije 6, Definicije 8 i svojstva izometrija.



Slika 9: *Vizualna reprezentacija pgg grupe simetrija*

Slika 10 predstavlja grupu *p*4. Uzorak grafike je gušter. Crvenom bojom je označen osnovni uzorak, a žutom bojom generirajuće područje uzorka. Ravninska grupa simetrija *p*4 sadrži izometrije: rotaciju i translaciju. Na detaljnijoj reprezentaciji prikazan je manji četverokut koji (uz istaknuto generirajuće područje) označava rotaciju za 90°. Generirajuće područje se transformira rotacijom, tri puta, u smjeru kazaljke na satu. Zatim se translatira, vertikalno i horizontalno, za duljinu stranice osnovnog uzorka (kvadrat). Radi lakšeg razumijevanja ravninske grupe simetrija *p*4 koristi se i alternativni naziv, "grupa simetrija s obzirom na translaciju".



Slika 10: *Escher drawing no.* 15 *i vizualna reprezentacija p*4 *grupe simetrija*

Literatura

[1] W. BARLOW, Über die Die Geometrische Eigenschaften Homogener starrer Strukturen und ihre Anwendung auf Krystall, *Z. Kryst. Min.* **23**, 1-63 (1894).

[2] F. M. BRÜCKLER, *Kristali-simetrije*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb.

[3] M. GREENBERG, *Euclidean and non-euclidean geometries*, W. H. Freeman and Co., 1993.

[4] D. PALMAN, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[5] D. PALMAN, *Trokut i kružnica*, Element, Cityplace, Zagreb, 1994.

[6] M. POTTER, J. M. RIBANDO, Isometries, Tessellations and Escher, Oh My!, *American Journal of Undergraduate Research*, Vol. 3, No. 4, 2005.

[7] D. SCHATTSCHNEIDER, The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation, *The American Mathematical Monthly* **85** (6), 439-450 (1978).

[8] A. M. SCHÖNFLIES, Gruppen von Bewegungen, *Math. Ann.* **28** (3), 319-342 (1886).

[9] R. L. E. SCHWARZENBERGER, The 17 plane symmetry groups, *Mathematical Gazette* **58**, 123-131 (1974).

Maria Čuljak
culjakmaria1@gmail.com

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek
Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb