ISSN 1846-6168
UDK 511.14

IRACIONALNOST NEKIH POZNATIH KONSTANTI

IRRATIONALITY OF SOME WELL KNOWN CONSTANTS

Predrag Vuković, Damira Keček, Martina Benković, Lucija Benko

Stručni rad

Sažetak: *U radu su predstavljeni dokazi iracionalnosti nekih poznatih konstanti. Na samom kraju rada je dana veza između pet najvažnijih matematičkih konstanti:* $0,1,\pi,e$ *i imaginarne jedinice* i *.*

Ključne riječi: *beskonačnost, razlomak, konstanta, iracionalan broj, metoda kontradikcije*

Proffesional paper

Abstract: *The paper presents proofs of the irrationality of some well known constants. At the end of this article the connection between five most important mathematical constants:* $0,1,\pi,e$ *and imaginary unit* i *is given.*

Keywords: *infinity, fraction, constant, irrational number, contradiction method*

1. UVOD

Sljedbenici učenja grčkog filozofa Pitagore, Pitagorejci, bili su uvjereni da se svaki broj može prikazati u obliku kvocijenta dva cijela broja, sve dok nisu pokušali izmjeriti hipotenuzu jednakokračnog pravokutnog trokuta. Činjenicu da se ona ne može zapisati kao omjer dva prirodna broja vrlo su teško prihvatili. Za detalje pogledati u [1].

Racionalan broj je onaj broj koji se može zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje su m,n cijeli brojevi i n nije jednak nuli. Skup racionalnih brojeva, koji se označava sa Q, je gust skup, tj. između bilo koja dva razlomka, bez obzira kako oni blizu bili, može se smjestiti beskonačno mnogo razlomaka. Racionalni brojevi unatoč svojoj gustoći ostavljaju „rupe“ duž brojevnog pravca. Te „rupe“ su točke koje ne odgovaraju racionalnim brojevima, već iracionalnim brojevima.

Iracionalan broj je, dakle, onaj broj koji nije racionalan. Skup iracionalnih brojeva označava se sa I . Riječ iracionalan dolazi od latinskih riječi *i* što znači *ne* i *ratio* što znači *omjer*. Richard Dedekind, njemački matematičar, definirao je 1872. godine skup realnih brojeva kao skup koji se dobiva upotpunjavanjem skupa racionalnih brojeva skupom iracionalnih brojeva. Matematičkim jezikom, ova se tvrdnja može zapisati kao $R=Q\cup I$, pri čemu su skupovi Q,I disjunktni, tj. vrijedi $Q\cap I=\varnothing$. Svaki realan broj može se prikazati u decimalnom zapisu (to je tzv. algebarski pristup skupu R). Postoje tri tipa decimalnog zapisa:

1. Decimalni zapis s konačno mnogo decimala, npr. $\frac{3}{20}=0,15$
2. Decimalni zapis s beskonačno mnogo decimala, koje se periodički ponavljaju, npr. $\frac{9}{11}=0,81818181...=0,\overline{81}$
3. Decimalni zapis sa beskonačno mnogo decimala koje se periodički ne ponavljaju (iracionalni brojevi), npr. $\sqrt{2}=1,41421...$

Decimalno predstavljanje realnih brojeva pokazuje da u svrhu mjerenja iracionalni brojevi nisu pretjerano korisni. Međutim, iracionalni brojevi se uvijek mogu približno odrediti pomoću nizu racionalnih približnih vrijednosti s željenom preciznošću. Navedena tvrdnja može se vidjeti na primjeru broja $\sqrt{2}$. Za detalje vidjeti npr. u [2].

Iracionalni brojevi i dokazivanje iracionalnosti bila je tema diplomskog rada [3] koji je pridonio izradi ovog članka.

2. METODE ZA DOKAZIVANJE IRACIONALNOSTI

Za dokazivanje iracionalnosti brojeva postoje kriteriji kao što su neperiodičnost decimalnih mjesta u decimalnom zapisu broja te racionalne nultočke polinoma. Međutim, navedeni kriteriji se ne mogu uvijek uočiti pa se za dokazivanje iracionalnosti koriste i neke druge metode. Jedna od njih je tzv. metoda kontradikcije.

2.1. Metoda kontradikcije

Metodom kontradikcije dokazat će se da broj $\sqrt{2}$ pripada skupu iracionalnih brojeva I. Budući da se ova metoda koristi kroz čitav rad, ovaj dokaz navodi se u cijelosti.

Dokaz: Pretpostavlja se da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, odnosno da je oblika $\frac{m}{n}$ pri čemu su m i n relativno prosti. (Relativno prosti brojevi su brojevi koji nemaju zajedničkih djelitelja osim broja 1.) Budući da vrijedi $I = R \setminus Q$, broj $\sqrt{2}$ je ili racionalan ili nije racionalan broj (dakle, iracionalan broj). Ukoliko se u dokazu dobije kontradikcija s početnom pretpostavkom, broj $\sqrt{2}$ je iracionalan. Kvadriranjem jednakosti

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \tag{1}$$

slijedi

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \tag{2}$$

odnosno

$$m^2 = 2n^2 \tag{3}$$

Broj m^2 je paran odakle slijedi da je i m paran broj. U suprotnom, iz $m = 2r+1$ slijedi $m^2 = 2(2r^2+2r)+1$, što je nemoguće (broj m^2 je paran). Uvrštavanjem $m = 2p$ u jednakost (3) slijedi

$$(2p)^2 = 2n^2 \tag{4}$$

odnosno

$$4p^2 = 2n^2 \tag{5}$$

pa je dijeljenjem (5) sa 2

$$2p^2 = n^2 \tag{6}$$

Slično kao za broj m, iz (6) može se zaključiti da je i n paran broj. Ako su i m i n parni brojevi, oni imaju zajedničkog djelitelja, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da su relativno prosti. Dakle, pretpostavka o broju $\sqrt{2}$ je pogrešna pa broj $\sqrt{2}$ pripada skupu iracionalnih brojeva.

2.2. Poznate iracionalne konstante

Poznate iracionalne konstante su broj e i broj π. Povijest broja π ide do drevnih vremena. Broj π pojavljuje se s problemom u geometriji (odnos opsega i promjera kruga). Podrijetlo broja e je manje jasno. Pretpostavlja se da ide natrag u 16. stoljeće kada je bio zabilježen izraz

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{7}$$

2.2.1. Broj e

Broj e jedan je od najznačajnijih brojeva u suvremenoj matematici. Leonhard Euler, švicarski matematičar, uveo je slovo e za bazu prirodnog logaritma (koji su prvi otkriveni jer se najlakše izračunavaju) pa se e zato i naziva Eulerov broj. Do desetog decimalnog mjesta, broj e iznosi:

$e \approx 2,71828182...$

Broj e je iracionalan. U nastavku je dan dokaz iracionalnosti broja e.

Dokaz: U dokazu iracionalnosti broja e koristi se tzv. Taylorov red. Neka je $I \subseteq R$ otvoreni interval i neka je $f : I \to R$ zadana funkcija koja ima na intervalu I derivacije proizvoljnog reda. Neka je $c \in I$. Red

$$\begin{aligned} &f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \\ &+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

naziva se Taylorov red funkcije f u točki c. O Taylorovom redu može se više pronaći u [4]. Za funkciju $f(x) = e^x, x \in R$ te za $c = 0$ i $I = R$ vrijedi $f^{(n)}(x) = e^x$ i $f^{(n)}(0) = 1$ pa je prema (8) pripadni Taylorov red za funkciju $f(x) = e^x$ jednak

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{9}$$

Za $x = 1$ formula (9) daje

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \tag{10}$$

Slijedi dokaz da je broj e iracionalan. Pretpostavlja se suprotno, tj. da je broj e racionalan. Tada se on može zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$ pri čemu su m i n prirodni brojevi. Tada je prema (10)

$$e=\frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots \qquad (11)$$

Množenjem jednakosti (11) s $n!$ slijedi

$$m(n-1)!=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+1+\frac{1}{n+1}+\cdots \qquad (12)$$

Lijeva strana jednakosti (12) je cijeli broj kao i svi pribrojnici na desnoj strani do broja 1. Svi članovi iza broja 1 su razlomci, a zbroj tih razlomaka je manji od zbroja geometrijskog reda (13)

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{n+1-1}=\frac{1}{n}<1 \qquad (13)$$

Dakle, desna strana jednakosti (12) jednaka je zbroju cijelog broja i pozitivnog broja manjeg od 1 što vodi na kontradikciju (lijeva strana jednakosti je cijeli broj, dok desna strana nije), odakle slijedi da je e iracionalan broj.

U nastavku se može vidjeti kako je baš broj e otkriven kao baza prirodnog logaritma i zašto se naziva "prirodnim" (vidi [5]).

U vrijeme otkrića logaritama (prva polovica 17. stoljeća) još nije bilo poznato potenciranje s razlomcima već su se promatrali isključivo pozitivni i cjelobrojni eksponenti. Promatranjem tabela potencija s cjelobrojnim eksponentima, poput tabele 1 s bazom 2 uočeno je sljedeće svojstvo: rezultat dobiven množenjem dva broja *x*-retka jednak je rezultatu dobivenom potenciranjem baze zbrojem odgovarajuća dva broja *y*-retka. Brojevi u *y*-retku za koje vrijedi navedeno svojstvo nazivaju se logaritmi.

Tabela 1. Cjelobrojne potencije s bazom 2

	0	1	2	3	4	5	6
	1	2	4	8	16	32	64

Problem se javio zbog velike razlike među x-evima i postavilo se pitanje kako dobiti finiju razdiobu x-eva (uz podsjetnik da još nije bilo poznato potenciranje razlomcima). Nepier i Bürgi istovremeno su se pozabavili tim pitanjem i zaključili da se najfinija razdioba dobiva uzimanjem broja 1 za bazu. Tada je Bürgi za bazu odabrao $1,0001$, a Nepier $0,9999999$.

Problem potenciranja velikim eksponentima, npr. $1,0001^{131}$, riješili su tako da su iskoristili prethodni rezultat i računali prirast do sljedećeg broja x. Dakle, ako je $x=1,0001^y$, oni traže Δx takav da je $x+\Delta x=1,0001^{y+1}$. U tom slučaju je

$\Delta x=(x+\Delta x)-x=1,0001^{y+1}-1,0001^y$, odnosno

$\Delta x=1,0001^y(1,0001-1)=\frac{x}{10000}$.

Jednostavni algoritam glasi: "pomakni zarez za četiri mjesta ulijevo i dobivenu vrijednost pribroji početnoj vrijednosti", a tabela (tabela 2) izgleda ovako:

Tabela 2. Tablica prirasta

y	x	Δx
0	1	0,0001
1	1,0001	0,00010001
2	1,00020001	0,000100020001
3	1,000300030001	itd.

Proporcionalnim umanjivanjem y-a (neka stare vrijednosti budu označene s $\bar{y}$) dobiva se nova tablica s $y=\frac{\bar{y}}{10^4}$ u kojoj i dalje vrijedi svojstvo logaritama. Sada je: $x=1,0001^{\bar{y}}=1,0001^{10000y}=\left(1,0001^{10000}\right)^y$

Nova logaritamska tablica ima bazu

$$1,0001^{10000}=\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\approx e$$

Odabirom baze još bliže broju 1, npr. $1+\frac{1}{10^{100}}$ i prijelazom na novu tablicu kao u gore opisanom postupku dobiva se još finija razdioba x-eva i bolja aproksimacija prirodnih logaritama.

2.2.2. Broj π

Matematička konstanta $\pi\approx 3,1415926535...$ često se koristi u matematici i fizici. Arhimed iz Sirakuze je računajući opseg krugu upisanih i opisanih mnogokuta, krećući od pravilnog šesterokuta do 96-erokuta, dao vrlo dobre ograde za broj π:

$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$, odnosno $\pi\approx 3,14185$. Arhimedova preciznost je zadivljujuća ako se uzme u obzir da nije poznavao simbol za nulu kao ni decimalni zapis. Arhimedovom metodom broj π je, između ostalih, izračunavao i Ludolf van Ceulen, njemačko-nizozemski matematičar. Prema spomenutim matematičarima, broj π poznat je i pod imenom Arhimedova konstanta te Ludolphov broj. U današnje vrijeme pomoću računala može se odrediti velik broj decimala broja π.

Dokaz da je broj π iracionalan je nešto teži. Postupak dokazivanja polazi od dokaza da je π^2 iracionalan broj, odakle onda slijedi da je i broj π iracionalan. Ova tvrdnja slijedi prema kontrapoziciji tj. ako A povlači B, onda negacija tvrdnje B povlači negaciju tvrdnje A. Obrnuto, iz dokaza iracionalnosti broja π ne može se zaključiti da je π^2 iracionalan. U potpoglavlju 2.1 dan je dokaz o iracionalnosti broja $\sqrt{2}$. Njegov kvadrat $(\sqrt{2})^2 = 2$ nije iracionalan broj, već racionalan. U nastavku slijedi dokaz o iracionalnosti broja π (vidi [6]).

Dokaz: U ovom dijelu dokaza potrebna je formula za parcijalnu integraciju. Poznato je da se ista može primijeniti više puta ukoliko su ispunjeni dovoljni uvjeti u svakom koraku. Neka su, dakle, f i g funkcije $(n+1)$ puta diferencijabilne na intervalu $[a,b]$ i neka su njihove derivacije $f^{(n+1)}$ i $g^{(n+1)}$ integrabilne. Tada se $(n+1)$-strukom parcijalnom integracijom dobiva formula:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g^{(n+1)}(x)dx &= \left[f(x)g^{(n)}(x)\right]_a^b - \\ &-\left[f'(x)g^{(n-1)}(x)\right]_a^b + \left[f''(x)g^{(n-2)}(x)\right]_a^b - \\ &-\cdots+(-1)^n\left[f^{(n)}(x)g(x)\right]_a^b - \\ &-(-1)^n\int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)dx\end{aligned} \tag{14}$$

Promatraju li se funkcije f i g na intervalu $[0,1]$, formula (14) prelazi u

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g^{(n+1)}(x)dx &= \left[f(x)g^{(n)}(x)\right]_0^1 - \\ &-\left[f'(x)g^{(n-1)}(x)\right]_0^1 + \left[f''(x)g^{(n-2)}(x)\right]_0^1 - \\ &-\cdots+(-1)^n\left[f^{(n)}(x)g(x)\right]_0^1 - \\ &-(-1)^n\int_0^1 f^{(n+1)}(x)g(x)dx\end{aligned} \tag{15}$$

Pod pretpostavkom da je $f(x)$ polinom n-tog stupnja, $f^{(n+1)}(x) = 0$ pa formula (15) prelazi u

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g^{(n+1)}(x)dx &= \left[f(x)g^{(n)}(x)\right]_0^1 - \\ &-\left[f'(x)g^{(n-1)}(x)\right]_0^1 + \left[f''(x)g^{(n-2)}(x)\right]_0^1 - \\ &-\cdots+(-1)^n\left[f^{(n)}(x)g(x)\right]_0^1\end{aligned} \tag{16}$$

odnosno nakon uvrštavanja granica poprima oblik

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g^{(n+1)}(x)dx &= f(1)g^{(n)}(1) - \\ &-f'(1)g^{(n-1)}(1)+\cdots+(-1)^n f^{(n)}(1)g(1) - \\ &-\left[\ f(0)g^{(n)}(0) - f'(0)g^{(n-1)}(0) + \right. \\ &\left. +\cdots+(-1)^n f^{(n)}(0)g(0)\ \right]\end{aligned} \tag{17}$$

Za dokaz iracionalnosti broja π^2 potrebna je i sljedeća tehnička lema koja se navodi bez dokaza:

Lema 1: Ako je $h(x)$ polinom sa cjelobrojnim koeficijentima, onda za polinom

$$f(x) = \frac{x^{m-1}h(x)}{(m-1)!},\ m \text{ cijeli broj, } m \geq 2 \tag{18}$$

vrijedi:

1. $f^{(s)}(0) = 0, s < m-1$,
2. $f^{(m-1)}(0) = h(0)$,
3. Koeficijenti polinoma $f^{(s)}(x), s \geq m$ su cjelobrojni i djeljivi s m.

U formulu (17) stavi se $n = 2r$, r paran, $f(x) = \dfrac{x^r(x-1)^r}{r!}$, $g(x) = \cos \pi x$.

Može se primijetiti da zbog parnog r slijedi

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (0,1) \tag{19}$$

Također vrijedi

$$\sin \pi x > 0 \text{ za } x \in (0,1) \tag{20}$$

Nadalje, funkcija $f(x) = \dfrac{x^r(x-1)^r}{r!}$ ima, uz zamjenu $m = r+1$ i $h(x) = (x-1)^r$, oblik (18) pa su stoga prema Lemi 1 $f(x)$ i sve derivacije od $f(x)$ cijeli brojevi za $x = 0$. Funkcija $\varphi(x) = f(x+1) = \dfrac{(x+1)^r x^r}{r!}$ i sve derivacije od $\varphi(x)$ su također prema Lemi 1 cijeli brojevi za $x = 0$. Općenito vrijedi: $\varphi^{(s)}(x) = f^{(s)}(x+1)$, odakle za $x = 0$ je $\varphi^{(s)}(0) = f^{(s)}(1)$. Stoga su $f(x)$ i njene derivacije i za $x = 1$ cijeli brojevi.

Nadalje vrijedi:

$$g^{(2s)}(x) = (-1)^s \pi^{2s} \cos \pi x \tag{21}$$

$$g^{(2s+1)}(x) = (-1)^{s+1}\pi^{2s+1}\sin \pi x \tag{22}$$

odnosno

$$g^{(2s)}(0) = (-1)^{s}\pi^{2s} \tag{23}$$

$$g^{(2s)}(1) = (-1)^{s+1}\pi^{2s} \tag{24}$$

$$g^{(2s+1)}(0) = g^{(2s+1)}(1) = 0 \tag{25}$$

Uzimajući u obzir formule (21) do (25), formula (17) glasi:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)\underbrace{(-1)^{r+1}}_{=-1}\pi^{2r+1}\sin \pi x dx = f(1)\underbrace{(-1)^{r+1}}_{=-1}\pi^{2r} - f'(1)\cdot \underbrace{g^{(2r-1)}(1)}_{=0} + f''(1)\underbrace{(-1)^{r}}_{=1}\pi^{2r-2} - \\
&- f'''(1)\cdot \underbrace{g^{(2r-3)}(1)}_{=0} + f^{(4)}(1)\underbrace{(-1)^{r-1}}_{=-1}\pi^{2r-4} - \cdots + f^{(2r-2)}(1)\underbrace{(-1)^{2}}_{=1}\pi^{2} + f^{(2r)}(1)\underbrace{(-1)^{1}}_{=-1}\pi^{0} - \\
&- f(0)(-1)^{r}\pi^{2r} + f'(0)\cdot \underbrace{g^{(2r-1)}(0)}_{=0} - f''(0)\underbrace{(-1)^{r-1}}_{=-1}\pi^{2r-2} + f'''(0)\cdot \underbrace{g^{(2r-3)}(0)}_{=0} - \\
&- f^{(4)}(0)\underbrace{(-1)^{r-2}}_{=1}\pi^{2r-4} + \cdots - f^{(2r-2)}(0)\underbrace{(-1)^{1}}_{=-1}\pi^{2} - f^{(2r)}(0)\underbrace{(-1)^{0}}_{=1}\pi^{0}
\end{aligned} \tag{26}$$

Pretpostavlja se da je π^2 racionalan, tj. da se može zapisati u obliku

$$\pi^2 = \frac{a}{b}, \tag{27}$$

gdje su a i b prirodni brojevi. Sređivanjem (26) te uvrštavanjem (27) u (26) dobiva se

$$\begin{aligned}
&-\frac{a^r}{b^r}\pi\int_0^1 f(x)\sin \pi x dx = -f(1)\frac{a^r}{b^r} + f''(1)\underbrace{(-1)^{r}}_{=1}\frac{a^{r-1}}{b^{r-1}} - f^{(4)}(1)\frac{a^{r-2}}{b^{r-2}} + \\
&+\cdots + f^{(2r-2)}(1)\frac{a}{b} - f^{(2r)}(1) - f(0)\frac{a^r}{b^r} + f''(0)\frac{a^{r-1}}{b^{r-1}} - f^{(4)}(0)\frac{a^{r-2}}{b^{r-2}} + \\
&+\cdots + f^{(2r-2)}(0)\frac{a}{b} - f^{(2r)}(0)
\end{aligned} \tag{28}$$

Množenjem (28) sa $-b^r$ i sređivanjem, dobiva se

$$\begin{aligned}
&a^r\pi\int_0^1 f(x)\sin x dx = a^r\left[f(1) + f(0)\right] - a^{r-1}\left[f''(1) + f''(0)\right] + \\
&+ a^{r-2}b^2\left[f^{(4)}(1) + f^{(4)}(0)\right] - \cdots - ab^{r-1}\left[f^{(2r-2)}(1) + f^{(2r-2)}(0)\right] + \\
&+ b^r\left[f^{(2r)}(1) + f^{(2r)}(0)\right]
\end{aligned} \tag{29}$$

Prema (19) i (20) može se zaključiti da je

$$\int_0^1 f(x)\sin \pi x dx > 0 \tag{30}$$

a kako su $f(x)$ i sve njene derivacije za $x = 0$ i $x = 1$ cijeli brojevi, to je desna strana od (29) cijeli broj koji je prema (30) pozitivan i barem jednak 1. Stoga je lijeva strana od (29) veća ili jednaka od 1, tj.

$$a^r\pi\int_0^1 f(x)\sin x dx \geq 1. \tag{31}$$

U nastavku slijedi ocjena integrala iz nejednakosti (31). Iz $x \in (0,1)$ i $(x-1)^r \in (0,1)$ (zbog parnog r) slijedi

$$f(x) < \frac{1}{r!}, \text{ za } x \in (0,1), \tag{32}$$

a zbog

$$0 < \sin \pi x \leq 1 \text{ za } x \in (0,1) \tag{33}$$

je

$$\int_0^1 f(x)\sin x dx < \int_0^1 \frac{1}{r!}dx = \frac{1}{r!} \tag{34}$$

Stoga je prema (34)

$$a^r\pi\int_0^1 f(x)\sin x dx < \pi\frac{a^r}{r!} \tag{35}$$

Obzirom da je $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{a^r}{r!} = 0$, odabirom r tako velikog da bude $\frac{a^r}{r!} < \frac{1}{\pi}$ dobiva se

$$a^r\pi\int_0^1 f(x)\sin x dx < 1, \tag{36}$$

što je u kontradikciji s nejednakosti (31) čime je dokaz gotov.

2.2.3. Još malo o e i π

Može se pokazati da, prema (8), Taylorov red funkcije $f(x) = \sin x$ za $c = 0$ glasi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{37}$$

a za funkciju $f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{38}$$

Uvrštavanjem kompleksne varijable ix, gdje je i imaginarna jedinica, umjesto varijable x u Taylorov red (9) funkcije $f(x)=e^x$ te izračunavanjem potencija od i dobiva se tzv. Eulerova formula

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1+\frac{ix}{1!}+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+\frac{i^4x^4}{4!}+\frac{i^5x^5}{5!}+\cdots \\ &= 1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\cdots \\ &= \underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)}_{=\cos x \text{ (prema (38))}}+\underbrace{\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)}_{=\sin x \text{ (prema (37))}}i \\ &= \cos x + i\sin x \end{aligned} \tag{39}$$

Za $x=\pi$ formula (39) prelazi u tzv. Eulerov identitet

$$e^{i\pi}+1=0 \tag{40}$$

koji prikazuje vezu između pet najvažnijih matematičkih konstanti: $0,1,\pi,e$ i imaginarne jedinice i te triju osnovnih matematičkih operacija (zbrajanja, množenja i potenciranja).

3. ZAKLJUČAK

Iracionalni brojevi imaju jednu vrlo zanimljivu karakteristiku. Nakon određenog decimalnog mjesta, npr. kod brojeva e i π, teško je zaključiti koja znamenka (od 0 do 9) slijedi. Beskonačno mnogo decimalnih mjesta kod iracionalnih brojeva, a ovdje je zapravo riječ o beskonačno malim veličinama, mogu se aproksimirati s određenom preciznošću. Tako se npr. nanotehnologija bavi s veličinama (tzv. nanometrima) koje su ljudskom oku nevidljive, a imaju ogromnu primjenu. Dakle, računala i ostala pomagala koja je izumio čovjek, rade s puno većom preciznošću nego što se to moglo i zamisliti. Možda se u matematičkim teorijama odmah ne vidi neki smisao, no one kad-tad dobivaju svoju primjenu.

4. LITERATURA

[1] Gleizer, G. I.: Povijest matematike za školu, Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.

[2] Keček D.; Vuković P.: Matematika 1, Veleučilište u Varaždinu, Varaždin, 2012.

[3] Benko, L.: Iracionalni brojevi, Diplomski rad, Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Odsjek u Čakovcu, 2010.

[4] Kurepa, S.: Matematička analiza, II dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1980.

[5] Krnić, L.; Šikić, Z.: Račun diferencijalni i integralni, I dio, Školska knjiga, 1992.

[6] Blanuša, D.: Viša matematika, II dio, drugi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965.

Kontakt autora:

Izv.prof.dr.sc. Predrag Vuković
Učiteljski fakultet Zagreb
Odsjek u Čakovcu
Dr. Ante Starčevića 55
40 000 Čakovec
predrag.vukovic@ufzg.hr

Damira Keček, dipl.ing.mat.
Sveučilište Sjever
Sveučilišni centar Varaždin
104. brigade 3
42 000 Varaždin
damira.kecek@unin.hr

Martina Benković, dipl.ing.mat.
Tehničko veleučilište u Zagrebu, vanjski suradnik
Vrbik 8
10 000 Zagreb
martina_benkovic@hotmail.com

Lucija Benko (student)
Učiteljski fakultet Zagreb
Odsjek u Čakovcu
Dr. Ante Starčevića 55
40 000 Čakovec
lucija.benko@gmail.com