

Primljen / Received: 22.11.2013.

Ispravljen / Corrected: 13.3.2014.

Prihvaćen / Accepted: 28.4.2014.

Dostupno online / Available online: 10.5.2014.

# Oscilacije vodnih masa u vodnoj komori generičkog oblika

Autor:



Doc. dr. sc. **Vanja Travaš**, dipl.ing.grad.  
Sveučilište u Rijeci  
Građevinski fakultet  
[vanja.travas@uniri.hr](mailto:vanja.travas@uniri.hr)

Prethodno priopćenje

**Vanja Travaš**

## Oscilacije vodnih masa u vodnoj komori generičkog oblika

Numerički modeli zasad se najčešće koriste u svrhu prognoziranja oscilacija vodnih masa u sustavu akumulacija – dovodni tunel – vodna komora. Pritom, neovisno o usvojenoj metodi diskretizacije vladajućih jednadžbi, najčešće se susreće da su ti modeli razvijeni pod pretpostavkom da je vodna komora okarakterizirana kružnim i konstantnim poprečnim presjekom. Da bi se zaobišla ta ograničavajuća pretpostavka, predložen je numerički algoritam kojim se mogu analizirati oscilacije razine vode u vodnoj komori općenitog oblika.

**Ključne riječi:**

hidraulički tranzijenti, metoda konačnih razlika, nestacionarno strujanje, oscilacije vodnih masa, vodna komora

Preliminary note

**Vanja Travaš**

## Water mass oscillations in a generic surge chamber

Numerical models are currently most often used to simulate water mass oscillations inside the system formed of the reservoir, pressure tunnel, and surge chamber. At the same time, regardless of the method used for discretisation of governing equations, the numerical models are most often developed under assumption that the surge chamber is characterized by the constant and circular cross section. To omit this restrictive assumption, a numerical algorithm is proposed to enable analysis of water level oscillations in a generic surge chamber.

**Key words:**

hydraulic transients, finite difference method, unsteady flow, water mass oscillations, surge chamber

Vorherige Mitteilung

**Vanja Travaš**

## Schwingungen von Wassermassen in Wasserkammern generischer Form

Die Anwendung numerischer Modelle ist derzeit weit verbreitet zur Simulation der Schwingungen von Wassermassen innerhalb des Systems Akkumulation – Versorgungstunnel – Wasserkammer. Gleichzeitig werden die numerischen Modelle oft, unabhängig von der angewandten Methode zur Diskretisierung der entsprechenden Gleichungen, unter der Annahme entwickelt, dass die Wasserkammer durch einen konstanten, kreisförmigen Querschnitt charakterisiert werden kann. Um diese einschränkende Voraussetzung zu umgehen, ist ein numerischer Algorithmus vorgeschlagen, der die Analyse von Schwingungen des Wasserstandes in Wasserkammern generischer Form ermöglicht.

**Schlüsselwörter:**

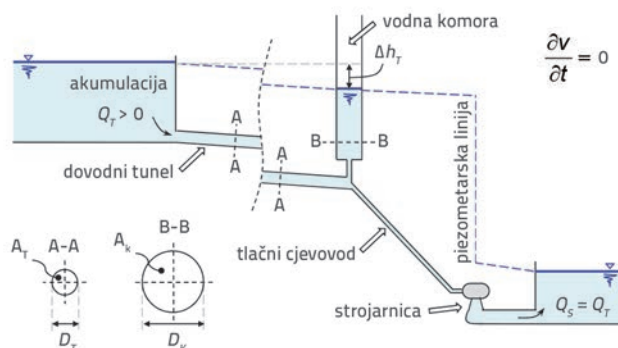
hydraulische Transienten, Finite-Differenzen-Methode, nichtstationäre Strömung, Schwingung von Wassermassen, Wasserkammer

## 1. Uvod

Vodne komore se mogu svrstati u grupu najvažnijih funkcionalnih elemenata visokotlačnih hidroenergetskih postrojenja. Za karakteristično visokotlačno hidroenergetsko postrojenje (slika 1.) uloga se vodne komore očituje u vremenu trajanja hidrauličkih tranzijenata, odnosno u vremenu unutar kojeg se iz jednog stacionarnog stanja prelazi u drugo stacionarno stanje definirano različitim protokom u sustavu. Potreba za izmjenom protoka u sustavu slijedi iz trenutnog zahtjeva za proizvodnjom električne energije te se vrši putem zatvarača na ulazu u strojarnici. S obzirom na navedeno, mogu se prepoznati dva osnovna tipa regulacije protokom: (i) smanjenje trenutnog protoka na neku unaprijed definiranu vrijednost te (ii) povećanje protoka na neku unaprijed definiranu vrijednost.

U tim situacijama mogu se prepoznati dva ekstremna slučaja, a to su: (i) uključivanje hidroenergetskog postrojenja iz neaktivnog stanja u stanje rada s maksimalnim odnosno instaliranim protokom te (ii) isključivanje hidroenergetskog postrojenja iz stanja rada definiranim instaliranim protokom.

Navedena dva scenarija uključivanja i isključivanja hidroenergetskog postrojenja uzrokuju najnepovoljnije uvjete toka unutar kojih se može prepoznati važnost vodnih komora. Pritom, osim očite potrebe za adekvatnim dimenzijama, uloga vodne komore poprima puni smisao adekvatnim izborom njene prostorne dispozicije u odnosu na ostale funkcionalne elemente hidroenergetskih postrojenja. Na taj način nužno je da se komora nalazi na kraju dovodnog tunela, tj. na spoju dovodnog tunela i tlačnog cjevovoda (slika 1.).



Slika 1. Prostorna dispozicija funkcionalnih elemenata visokotlačnog hidroenergetskog postrojenja

Za unaprijed zadane geometrijske, kinematičke i dinamičke karakteristike toka, jedan od zadataka hidrauličke analize je predvidjeti rezultirajuću vremensku promjenu razine vode u vodnoj komori. Između ostalog, ishod takve analize koristi se u procesu dimenzioniranja vodne komore, unutar kojeg treba odabrati geometriju komore koja će spriječiti prelijevanje

vode za vrijeme pojavljivanja maksimalnih oscilacija te usisavanje zraka u dovodni tunel i tlačni cjevovod za vrijeme pojavljivanja minimalnih oscilacija. U posljednjih nekoliko desetljeća u te se svrhe najčešće primjenjuju numeričke metode kojima se za zadane početne i rubne uvjete rezultirajući sustav vladajućih diferencijalnih jednažbi rješava aproksimativno. Problematici aproksimativnog rješavanja takvog sustava može se pristupiti na različite načine te se tako može istaknuti recentno korištenje metode konačnih elemenata [1], ali i uobičajeno korištenje metode konačnih razlika [2, 3]. Pritom, ne samo u okviru navedene literature već i šire [4-8], ono što se najčešće može evidentirati kao zajedničko u ovim različitim pristupima jest pretpostavka da se oscilacije razine vode zbivaju u vodnoj komori konstantnog i kružnog poprečnog presjeka, odnosno u *cilindričnoj vodnoj komori*. U svrhu isključivanja te restriktivne pretpostavke te generaliziranja proračunske sheme za prognozu oscilacija u vodnoj komori općenitog oblika, u radu je predložena numerička shema koja se zbog svoje jednostavnosti može primijeniti neovisno o usvojenoj metodologiji numeričkog rješavanja sustava vladajućih jednažbi.

## 2. Teorijski model oscilacija

Sva daljnja razmatranja provedena su pod pretpostavkom da masa vode u visokotlačnom sustavu tvori neprekinutu cjelinu, odnosno da vrijede uvjeti koji opravdavaju tumačenje toka kroz prizmu hipoteze kontinuuma [3]. Naime, iako se za tok kapljevina u tlačnim sustavima ova pretpostavka najčešće unaprijed usvaja valjanom, te ne iziskuje posebno naglašavanje, u razmatranim okolnostima postoje slučajevi unutar kojih pretpostavka kontinuuma nije opravdana. Okolnosti u kojima primjena hipoteza kontinuuma nije opravdana mogu nastati za slučaj naglog otvaranja zatvarača, kada uslijed relativno naglog porasta brzine toka tlak vode padne na tlak vodenih para. Ako su preduvjeti za to osigurani, manifestirat će se *prekid vodnog stupca* [9] te za modeliranja ovakvih pojava treba nadopuniti osnovni sustav jednažbi s adekvatnim konstitutivnim vezama koje uvode promjenu faze odnosno agregatnog stanja vode [10].

### 2.1. Dinamička jednažba

Uz privremeno zanemarivanje utjecaja viskoznosti, Eulerova jednažba [3] može se koristiti kako bi se definirala Bernoullijeva jednažba za nestacionarno strujanje. Uz naknadno uvažavanje utjecaja trenja, putem uvođenja Darcy-Weisbachove jednažbe, dobivena jednažba definira energetska jednakost između udaljenih čestica vode koje se u nestacionarnom toku nalaze na istoj strujnici u hidroenergetskom postrojenju. Za česticu vode na površini vode u akumulaciji i za česticu vode na površini vode u vodnoj komori može se pisati



poznata, rješavanje jednadžbe (7) nije jednostavno kao u slučaju jednadžbe (6), jer će podizanje ili opadanje razine  $dz_K$  u vremenu  $dt$  biti ovisno o trenutačnoj razini vode u vodnoj komori.

### 3. Integracija jednadžbe kontinuiteta

Numeričko modeliranje procesa oscilacija razine vode u vodnoj komori generičkog oblika zahtijevat će adekvatnu integraciju jednadžbe kontinuiteta (7). U tu se svrhu u nastavku predlažu dvije metode:

- *direktna* ili egzaktna i
- *inkrementalna* ili aproksimativna.

Pritom, kako bi se pratila vremenska promjenjivost varijabli od interesa, u nastavku rada sve će relevantne veličine, koje su ovisne o proteklom vremenu, biti asocirane na pripadajuća vremenska stanja primjenom diskretne vremenske koordinate  $n$ . Vremenski period između dvije susjedne koordinate  $n$  i  $n+1$  definira vremenski inkrement  $\Delta t$ .

#### 3.1. Direktna integracija

U svrhu rješavanja jednadžbe (7) provodi se separacija varijabli

$$A_K(z_K) dz_K = (Q_T - Q_S) dt. \quad (8)$$

Integracija desne strane jednadžbe se provodi za vremenski interval  $\Delta t$ , definiran početnim trenutačkom  $t^{(n)}$  i krajnjim  $t^{(n+1)}$ . Integracija lijeve strane se provodi između granica definiranih početnom razinom vode  $z_K^{(n)}$  u trenutačku  $t^{(n)}$  i nepoznatom razinom vode  $z_K^{(n+1)}$  u trenutačku  $t^{(n+1)}$ . Sukladno navedenom, može se pisati

$$\int_{z_K^{(n)}}^{z_K^{(n+1)}} A_K(z_K) dz_K = \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} (Q_T - Q_S) dt. \quad (9)$$

Uz pretpostavku da je vremenski korak  $\Delta t$  dovoljno mali, tako da se protoci  $Q_T$  i  $Q_S$  mogu smatrati konstantnim unutar  $\Delta t$ , desna strana jednadžbe (9) definirat će volumen vode  $\Delta V$  koji u periodu  $\Delta t$  puni ili prazni vodnu komoru (10).

$$\Delta V = (Q_T^{(n)} - Q_S^{(n)}) \Delta t \quad (10)$$

Za unaprijed poznatu razliku protoka  $(Q_T^{(n)} - Q_S^{(n)})$  i geometriju vodne komore  $A_K(z_K)$ , jednadžbe (9) i (10) definiraju jednakost

$$\Delta V = \int_{z_K^{(n)}}^{z_K^{(n+1)}} A_K(z_K) dz_K, \quad (11)$$

u kojoj je gornja granica integrala na desnoj strani nepoznata razina vode  $z_K^{(n+1)}$ . U svrhu kvantifikacije ove veličine, potrebno je pozvati se na Newton-Laibnizovu formulu koja definira osnovnu vezu između diferencijalnog i integralnog računa u obliku

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (12)$$

u kojoj je  $F(x)$  primitivna funkcija funkcije  $f(x)$  sa svojstvom  $dF/dx=f(x)$ . S obzirom na to da je funkcija  $A_K(z_K)$  unaprijed poznata, te je tako poznata i njena derivacija, koristeći vezu (12), jednadžbu (11) je moguće napisati u obliku

$$\Delta V = A_{pr}(z_K^{(n+1)}) - A_{pr}(z_K^{(n)}), \quad (13)$$

u kojem je funkcija  $A_{pr}(z_K)$  primitivna funkcija funkcije  $A_K(z_K)$  definirana sa  $dA_{pr}/dz_K=A_K(z_K)$ . Članovi desne strane jednadžbe (13) na taj su način određeni integracijom funkcije  $A_K(z_K)$ . Pritom, numeričku vrijednost funkcije  $A_{pr}(z_K)$  poprimiti će samo drugi član desne strane, jer je za njega poznata razina  $z_K^{(n)}$ , dok će se prvi član desne strane izraziti pomoću nepoznate veličine  $z_K^{(n+1)}$ . Budući da je volumen vode  $\Delta V$  poznat (10), jednadžba (13) sada se može riješiti po nepoznatoj razini  $z_K^{(n+1)}$  te na taj način odrediti promjenu razine vode nastale za promjenu volumena vode  $\Delta V$  u vodnoj komori nepravilnog oblika.

Iako se na opisani način može uspostaviti izravna veza između promjene volumena vode s promjenom razine vode u vodnoj komori, računalna implementacija ove metode je manje atraktivna jer iziskuje simboličnu integraciju funkcije  $A_K(z_K)$ . Štoviše, treba i primijetiti da se u praktične svrhe najčešće koriste vodne komore s lokalnom izmjenom geometrije, i to na mjestima u kojima se izvode prošireni segmenti u svrhu reguliranja oscilacija razine vode nastalih u vremenu uključivanja i isključivanja hidroenergetskog postrojenja (npr. raščlanjene vodne komore). Zbog toga je funkcija  $A_K(z_K)$  najčešće okarakterizirana lokalnim prekidom, što dodatno otežava računalnu implementaciju ove metode jer iziskuje simbolično integriranje nepravog integrala druge vrste. Sve navedeno opravdava razvoj numeričke sheme koja je u nastavku opisana.

#### 3.2. Inkrementalna integracija

Kako bi se izbjegle poteškoće računalne implementacije direktne integracije jednadžbe (7), uvodi se inkrementalna metoda bazirana na ideji da se integral na desnoj strani jednadžbe (11) zamijeni sumom konačnog broja doprinosa članova desne strane. Drugim riječima, u svakom vremenskom inkrementu  $\Delta t$  će se volumen vode  $\Delta V_K=(Q_T-Q_S)\Delta t$ , koji puni ili prazni vodnu komoru, podijeliti na niz jednakih dijelova  $\Delta V_{K_i}$ . Nakon toga se kroz seriju računskih koraka svaki doprinos  $\Delta V_{K_i}$  upušta ili ispušta iz vodne komore, a pripadajuće inkrementalne promjene u razini vode  $\pm \Delta z_{K_i}$  se određuju pod pretpostavkom da svaki volumen  $\Delta V_{K_i}$  puni ili prazni prostor vodne komore konstantnog poprečnog presjeka  $A_{K_i}$ . U tom slučaju je inkrementalnu promjenu  $\pm \Delta z_{K_i}$  jednostavno odrediti u obliku  $\Delta V_{K_i}/A_{K_i}$ . Pritom, kako bi se uzela u obzir eventualna promjena u geometriji vodne komore, površina poprečnog presjeka  $A_{K_i}$  se u svakom proračunskom koraku ažurira i usvaja

jednakom poprečnoj površini zadane vodne komore  $A_K(z_K)$  na dosegnutoj razini vode  $z_K$ . Porastom broja inkrementalnih doprinosa  $\Delta V_K$  raste točnost proračuna, a u slučaju da broj inkrementalnih doprinosa  $\Delta V_K$  teži u beskonačno, opisano definira integral iz jednadžbe (11).

Opisana procedura će se u nastavku definirati u obliku algoritma. U prvom redu treba primijetiti da u navedenoj interpretaciji progresivno punjenje ili pražnjenje komore ne treba shvatiti kao fizikalni događaj već kao proračunsku shemu. Naime, sukcesivno superponiranje inkrementalnih promjena  $\pm \Delta z_K$  ne odvija se u vremenu trajanja oscilacija već u trenutačku odnosno na početku vremenskog inkrementa  $\Delta t$ . Iz tog razloga se ovi proračunski koraci moraju shvatiti kao inkrementi nekog pseudo odnosno fiktivnog vremena. Terminologija je prikladna jer, osim navedenog, opisana procedura ne uključuje pojavnost inercijalnih sila, a samim time i realno vrijeme.

Za neki vremenski inkrement  $\Delta t$ , broj fiktivnih vremenskih koraka  $n\Delta t_{fiktivno}$  unutar kojih će se superponirati inkrementalni doprinosi  $\pm \Delta z_K$ , definirat će inkrement volumena koji puni ili prazni vodnu komoru

$$\Delta V_K = \frac{(Q_T - Q_S) \Delta t}{n \Delta t_{fiktivno}} \quad (14)$$

Ako se sa  $k$  označi redni broj fiktivnog vremenskog koraka, za prvi korak  $k=1$  inkrementalna će promjena razine  $\pm \Delta z_K$  iznositi

$$\Delta z_K ({}^k z_K) = \frac{\Delta V_K}{A_K ({}^k z_K)}, \quad (15)$$

gdje je  ${}^k z_K$  definirana poznata razina vode u komori tj. razina vode na početku vremenskog koraka  $\Delta t$  od koje započinje proračun. U idućem proračunskom koraku  $k+1$  razina će vode  ${}^{k+1} z_K$  biti definirana sa

$${}^{k+1} z_K = {}^k z_K + \Delta z_K ({}^k z_K). \quad (16)$$

Na ovaj način je definirana ciklička proračunska shema u kojoj svaki ciklus završava ažuriranjem rednog broja proračunskog koraka

$$k = k+1 \quad (17)$$

nakon čega započinje novi ciklus rješavanjem jednadžbi (15) i (16). Postupak se ponavlja sve dok primjenom jednadžbe (17) nije ispunjen uvjet  $k=n\Delta t_{fiktivno}$ . Drugim riječima, razina vode u vodnoj komori  $z_K^{(n+1)}$  bit će na kraju vremenskog intervala  $\Delta t$  jednaka razini  ${}^k z_K$  kada  $k = n\Delta t_{fiktivno}$ .

## 4. Numerički algoritam

Inkrementalna integracija jednadžbe kontinuiteta objedinit će se dinamičkom jednadžbom kako bi se formirao proračunski algoritam za računalnu simulaciju oscilacija razine vode u vodnoj komori općenitog oblika. Direktna integracija jednadžbe kontinuiteta (13) neće se razmatrati zbog prije spomenutih poteškoća.

### 4.1. Definiranje početnih uvjeta

Početni uvjeti definiraju iznos varijabli  $z_K^{(n)}$  i  $Q_T^{(n)}$  na početku prvog vremenskog koraka  $\Delta t$  u trenutačku  $n = 1$ . Ako se početnim uvjetima želi definirati neko stacionarno stanje toka u kojem je  $Q_S > 0$ , valja primijetiti da u tu svrhu treba provesti preliminarni proračun u kojem je za zadanu geometriju toka i protok  $Q_S$  potrebno odrediti gubitke visinskog tlaka  $\Delta h_T$  (slika 2.) ispod ulaza u vodnu komoru. Naime, u stacionarnim uvjetima toka se vodna komora može interpretirati kao piezometer u kojem razina vode  $z_K^{(n)}$  odgovara visinskom tlaku  $h_A - \Delta h_T$  na kraju dovodnog tunela. S druge strane, za neoperativno stanje hidroenergetskog postrojenja je zadavanje početnih uvjeta trivijalno jer je u tom slučaju protok  $Q_T^{(n)} = 0$  i nema odstupanja  $z_K^{(n)}$  od razine vode u akumulaciji  $h_A$ . Iz tog razloga je proračun oscilacija prikladno započeti za slučaj uključivanja hidroenergetskog postrojenja, iz neoperativnog stanja, te nakon što se oscilacije potpuno priguše, proračunane vrijednosti  $z_K$  i  $Q_T$  usvojiti kao početne uvjete za analizu oscilacija nastalih pri isključivanju hidroenergetskog postrojenja.

### 4.2. Definiranje rubnog uvjeta

Rubni uvjet definira dinamiku izmjene protočne površine  $A_S^{(n)}$  na turbinama te se zadaje u obliku funkcije stupnja otvorenosti zatvarača  $\beta$  definirane omjerom

$$\beta = \frac{A_S}{A_S^{(0)}}, \quad (18)$$

u kojem  $A_S$  označava trenutačnu protočnu površinu u profilu zatvarača, a  $A_S^{(0)}$  definira protočnu površinu otvorenog zatvarača. Stupanj otvorenosti zatvarača utjecat će na protok  $Q_S$ . U svrhu uspostavljanja ove funkcionalne zavisnosti, pretpostavit će se da se gubici energije na dionici tlačnog cjevovoda i u strojarnici mogu zanemariti. U tom slučaju se protok  $Q_S$  u profilu zatvarača može izračunati iz Torricellijeve jednadžbe u obliku

$$Q_S = c_p \beta A_S^{(0)} \sqrt{2g(\Delta h_s + z_K)}, \quad (19)$$

u kojem  $c_p$  označava koeficijent protoka te  $\Delta h_s$  visinsku razliku između razine vode u akumulaciji  $h_A$  i razine vode na izlazu iz strojarnice  $h_s$  u neoperativnom stanju hidroenergetskog postrojenja. Treba primijetiti da će se neovisno o zadanoj dinamici zatvaranja ili otvaranja zasuna protok  $Q_S$  mijenjati i na račun toga što će razina u vodnoj komori oscilirati u vremenu. Iz tog razloga se visinski tlak pod korijenom (19) mijenja u skladu s ostvarenom promjenom razine vode u komori. Ovisno o zadanoj dinamici promjene stupnja  $\beta$ , istim rubnim uvjetom se mogu simulirati događaji puštanja postrojenja u pogon jednako kao i događaj isključenja postrojenja iz pogona. Osim toga, rubni uvjet omogućuje i modeliranje tranzitnog procesa putem kojeg se iz zadanog stacionarnog stanja prelazi u drugo stacionarno stanje (npr. povećavanje broja turbina u pogonu).

### 4.3. Implemetacija numeričkog algoritma

U nastavku će se prikazana metoda integracije jednadžbe kontinuiteta koristiti kako bi se formirao proračunski algoritam za računarsku simulaciju tranzijentnog stanja toka. Proračunski algoritam započinje definiranjem vremenskog inkrementa  $\Delta t$  na način da se prognozirani period oscilacija [2, 3, 4] podijeli na veći broj inkremenata. Broj vremenskih koraka ovisi o izboru vremena unutar kojeg će se razmatrati proces osciliranja. S obzirom na značajku analize, potrebno je definirati i prikladne početne uvjete zadavajući varijable  $z_K^{(n)}$ ,  $Q_T^{(n)}$  i  $Q_K^{(n)}$  na početku prvoga vremenskog koraka u trenutačku  $n$ . Za zadane početne uvjete se numeričkim algoritmom razmatra tranzitno stanje na osnovi kojeg se doseže protok u strojarnici zadanim rubnim uvjetom. Pritom, rubni uvjet se zadaje funkcijom vremenske promjene stupnja otvorenosti zatvarača (18). Funkcija se zadaje inkrementalno, odnosno vrijednost stupnja otvorenosti se definira na početku svakog vremenskog inkrementa  $n$  u obliku

$$\beta^{(n)} = \frac{A_S^{(n)}}{A_S^{(0)}} \tag{20}$$

Imajući definirane geometrijske karakteristike tlačnog sustava te početne i rubne uvjete, računalna simulacija oscilacija slijedi iz narednog numeričkog algoritma. Redoslijed izlaganja jednadžbi prati redoslijed njihova rješavanja. U prvom redu se za tekući vremenski korak  $n$  definira protok na turbinama u obliku

$$Q_S^{(n)} = c_p \beta^{(n)} A_S^{(0)} \sqrt{2g(\Delta h_S + z_K^{(n)})} \tag{21}$$

Razlika poznatog protoka u dovodnom tunelu  $Q_T^{(n)}$  i protoka iz jednadžbe (21) definira protok  $Q_K^{(n)}$  koji u vremenskom koraku  $\Delta t$  puni ili prazni vodnu komoru. U svrhu proračuna rezultirajuće izmjene u razini vode, definira se volumen vode

$$\Delta V_K^{(n)} = \frac{(Q_T^{(n)} - Q_S^{(n)}) \Delta t}{n \Delta t_{fiktivno}} \tag{22}$$

u kojem  $n \Delta t_{fiktivno}$  predstavlja broj fiktivnih vremenskih koraka pomoću kojih će se provoditi cikličke izmjene u razini vode. Izbor broja  $n \Delta t_{fiktivno}$  može bitno utjecati na rezultate oscilacija razine vode u vodnim komorama nepravilnog oblika te iz tog razloga iziskuje prikladno zadavanje. U tu svrhu treba primijetiti da  $n \Delta t_{fiktivno}$  može varirati između vremenskih koraka. Ova činjenica omogućuje da se  $n \Delta t_{fiktivno}$  poveća ili smanji po potrebi, i to ovisno o volumenu vode  $\Delta V = (Q_T - Q_S) \Delta t$  koji u vremenskom koraku  $\Delta t$  puni ili prazni vodnu komoru. Dakle, za veće iznose volumena  $\Delta V$  trebat će usvojiti veći broj koraka  $n \Delta t_{fiktivno}$ . Mogućnost sukcesivne izmjene veličine  $n \Delta t_{fiktivno}$  potiče na ideju da se umjesto zadavanja ove neintuitivne veličine zadaje volumen vode  $\Delta V_K$  s kojim će se progresivno puniti ili prazniti vodna komora. Naime, ako se razmotri jednadžba kontinuiteta (22), iz poznatog volumena vode  $\Delta V$  na početku vremenskog koraka  $n$  i zadanog volumena  $\Delta V_K$

slijedi  $n \Delta t_{fiktivno} = \Delta V / \Delta V_K$ . Na taj se način problem zadavanja nefizikalne veličine  $n \Delta t_{fiktivno}$  zaobišao zadavajući veličinu  $\Delta V_K$  koja se može geometrijski interpretirati i staviti u relativni odnos s volumenom vodne komore.

Inicijalizacija proračuna se provodi na način da se brojač fiktivnih vremenskih koraka  $k$  postavi jednakim 1 te da se za polaznu razinu vode u komori  $z_K^{(n+1)}$  usvoji trenutačna razina vode  $z_K^{(n)}$ . Inkrementalna promjena razine vode  $\pm \Delta z_K$  se određuje u skladu s jednadžbom

$$\Delta z_K \left( z_K^{(n+1)} \right) = \frac{\Delta V_K^{(n)}}{A_K \left( z_K^{(n+1)} \right)} \tag{23}$$

te se koristi u svrhu korekcije trenutačne razine vode primjenom jednadžbe

$$z_K^{(k+1)} = z_K^{(n+1)} + \Delta z_K \left( z_K^{(n+1)} \right) \tag{24}$$

Prije nego li se postupak ponovi za sljedeći fiktivni vremenski korak, treba ga ažurirati

$$k = k + 1 \tag{25}$$

Postupak definiran jednadžbama (23), (24) i (25) tim se redom ponavlja sve dok se ne dosegne uvjet  $k = n \Delta t_{fiktivno}$ . Ishod ovog algoritma je razina vode u vodnoj komori  $z_K^{(n+1)}$  na kraju vremenskog intervala  $\Delta t$ . Dobivena razina definira gradijent tlaka između krajeva dovodnog tunela, te se iz tog razloga koristi u dinamičkoj jednadžbi za definiranje protoka u dovodnom tunelu  $Q_T^{(n+1)}$ . Pritom, osim nastalog gradijenta tlaka, brzina toka u dovodnom tunelu  $v_T$  ovisit će i o otporima koji se javljaju uzduž tunela. U svrhu kvantifikacije nastalih otpora, izračunava se Reynoldsov broj  $Re^{(n)}$  na početku vremenskog koraka  $\Delta t$ , prema omjeru

$$Re^{(n)} = \frac{\rho v_T^{(n)} D_T}{\mu} \tag{26}$$

u kojem je  $\mu$  dinamički koeficijent viskoznosti,  $\rho$  gustoća vode te  $v_T^{(n)}$  brzina toka određena sa  $Q_T^{(n)} / A_T$ . Za turbulentnog strujanja, Darcyjev koeficijent  $\lambda$  se može odrediti Colebrookovom jednadžbom [14] ili eksplicitnom aproksimacijom njenih rezultata prema jednadžbi [15]

$$\lambda^{(n)} = \left( -1.8 \log \left( \frac{6.9}{Re^{(n)}} + \left( \frac{\varepsilon_T / D_T}{3.7} \right)^{1.11} \right) \right)^{-2} \tag{27}$$

u kojoj je  $\varepsilon_T$  apsolutna pogonska hrapavost stijenki dovodnog tunela. S obzirom na činjenicu da će za slučaj zatvaranja zasuna brzina  $v_T$  mijenjati smjer strujanja tijekom oscilacija vodenih masa, u nekom će trenutku tok u dovodnom tunelu prijeći iz turbulentnog u laminarni režim [16]. U takvim okolnostima se  $\lambda^{(n)}$  može odrediti omjerom  $64 / Re^{(n)}$ . Osim linijskih gubitaka, treba se odrediti i koeficijent lokalnih gubitaka  $\xi_p^{(n)}$  na ulazu u vodnu komoru [17]. Pritom, ako se kao prigušivač koristi hidraulička dioda [11], potrebno je razlikovati iznos koeficijenta  $\xi_p^{(n)}$  ovisno o smjeru strujanja. Iz tog razloga

se najprije pristupa izračunu protoka  $Q_K^{(n)}$  koji puni ili prazni vodnu komoru

$$Q_K^{(n)} = Q_T^{(n)} - Q_S^{(n)}, \quad (28)$$

te se nakon toga definira pripadajući lokalni koeficijent gubitaka (29).

$$\xi_P^{(n)} = \begin{cases} \xi_{ulaz} & \text{ako } Q_K^{(n)} > 0 \\ \xi_{izlaz} & \text{ako } Q_K^{(n)} \leq 0 \end{cases} \quad (29)$$

Definirani koeficijenti gubitaka (27) i (29) i ostvarena razina vode  $z_K^{(n+1)}$  služe kako bi se odredio protok  $Q_T^{(n+1)}$  na kraju vremenskog koraka  $\Delta t$ . U tu svrhu se lijeva strana jednadžbe (5) može aproksimirati diferencijom unaprijed [2], čime se dobiva eksplicitna aproksimacija protoka  $Q_T^{(n+1)}$  u obliku

$$Q_T^{(n+1)} = Q_T^{(n)} + \Delta t \left( \frac{g A_T}{L_T} \left( -\frac{z_K^{(n+1)} + z_K^{(n)}}{2} - \xi_P^{(n)} \frac{Q_K^{(n)} |Q_K^{(n)}|}{2g A_p^2} \right) - \frac{2\lambda^{(n)}}{\pi D_T^5} Q_T^{(n)} |Q_T^{(n)}| \right). \quad (30)$$

Svaki vremenski korak  $n\Delta t$  završava ažuriranjem brojača

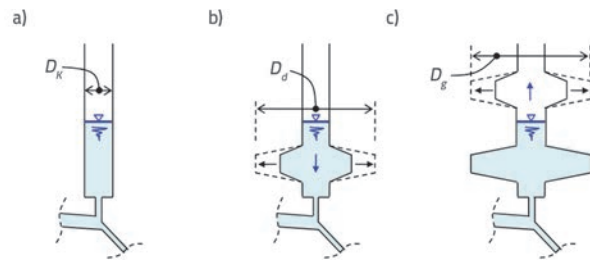
$$n = n + 1 \quad (31)$$

te se postupak definiran od jednadžbe (21) do jednadžbe (31) ponavlja sve dok se ne dosegne stacionarno stanje toka, odnosno dok razlika između  $z_K$  u dva susjedna vremenska inkrementa ne postane manja od neke unaprijed definirane tolerancije.

## 5. Numerički primjer

Kako bi se u vremenu uključivanja hidroenergetskog postrojenja minimizirao nepoželjan učinak oscilacija razine u vodnoj komori na rad turbina, te smanjila potrebna visina komore u vremenu oscilacija nastalih isključivanjem postrojenja, najčešće se koriste raščlanjene vodne komore. Upravljanje oscilacijama nastalih u ovim operativnim stanjima uz pomoć raščlanjenih komora provodi se tako da se adekvatno dimenzioniraju dva proširenja. Donje proširenje, promjera  $D_d(z_K)$ , ima zadatak regulirati oscilacije nastale prilikom aktiviranja postrojenja, a gornje proširenje  $D_g(z_K)$  ima zadatak reducirati maksimalnu kotu podizanja razine vode u vodnoj komori za slučaj isključivanja postrojenja. Promjene poprečnog presjeka vodne komore definirane su funkcijom  $A_K(z_K)$ , koja se zadaje s obzirom na razinu vode u akumulaciji. Raščlanjeni tip vodne komore primijenit će se radi izrade numeričkih primjera. Pritom će se za zadane geometrijske i kinematičke karakteristike toka numeričkim primjerom prikazati postupak dimenzioniranja vodne komore. U tu svrhu će se u prvom redu provesti parametarska analiza oscilacija za slučaj puštanja hidroenergetskog postrojenja u rad te će se nakon toga pristupiti dimenzioniranju gornjeg proširenja vodne komore kako bi se minimizirala potreba za

visinom vodne komore. Postupak analize oscilacije definiran je na slici 3.



Slika 3. Postupak dimenzioniranja vodne komore: a) definiranje početne geometrije cilindričnom vodom komorom promjera  $D_K = 4$  m; b) postupno proširivanje donjeg dijela (promjera  $D_d$ ) za reguliranje oscilacija  $z_K$  nastalih nakon uključivanja hidroenergetskog postrojenja; c) postupno proširivanje gornjeg dijela (promjera  $D_g$ ) za reguliranje oscilacija  $z_K$  nastalih nakon isključivanja hidroenergetskog postrojenja

Geometrija hidroenergetskog postrojenja je definirana sljedećim veličinama: duljina dovodnog tunela  $L_T = 6000$  m, promjer dovodnog tunela  $D_T = 3$  m, apsolutna hrapavost dovodnog tunela  $\varepsilon_T = 3$  mm, promjer protočne površine na turbinama  $D_s = 0.6$  m te statička razina između razine vode u akumulaciji i na izlazu iz strojarne  $h_s = 180$  m. Inicijalni promjer vodne komore je  $D_K = 4$  m te mora biti odabran tako da udovolji uvjetu stabilnih oscilacija [18, 19]. Oscilacije razine vode u vodnoj komori definirat će se obzirom na referentnu ravninu zadanu razinom vode u akumulaciji. Spoj vodne komore i dovodnog tunela se s obzirom na tu ravninu nalazi na koti -10 m. Za slučaj naglog uključivanja hidro-energetskog postrojenja, analizom oscilacija treba provjeriti opasnost od usisavanja zraka u dovodni tunel.

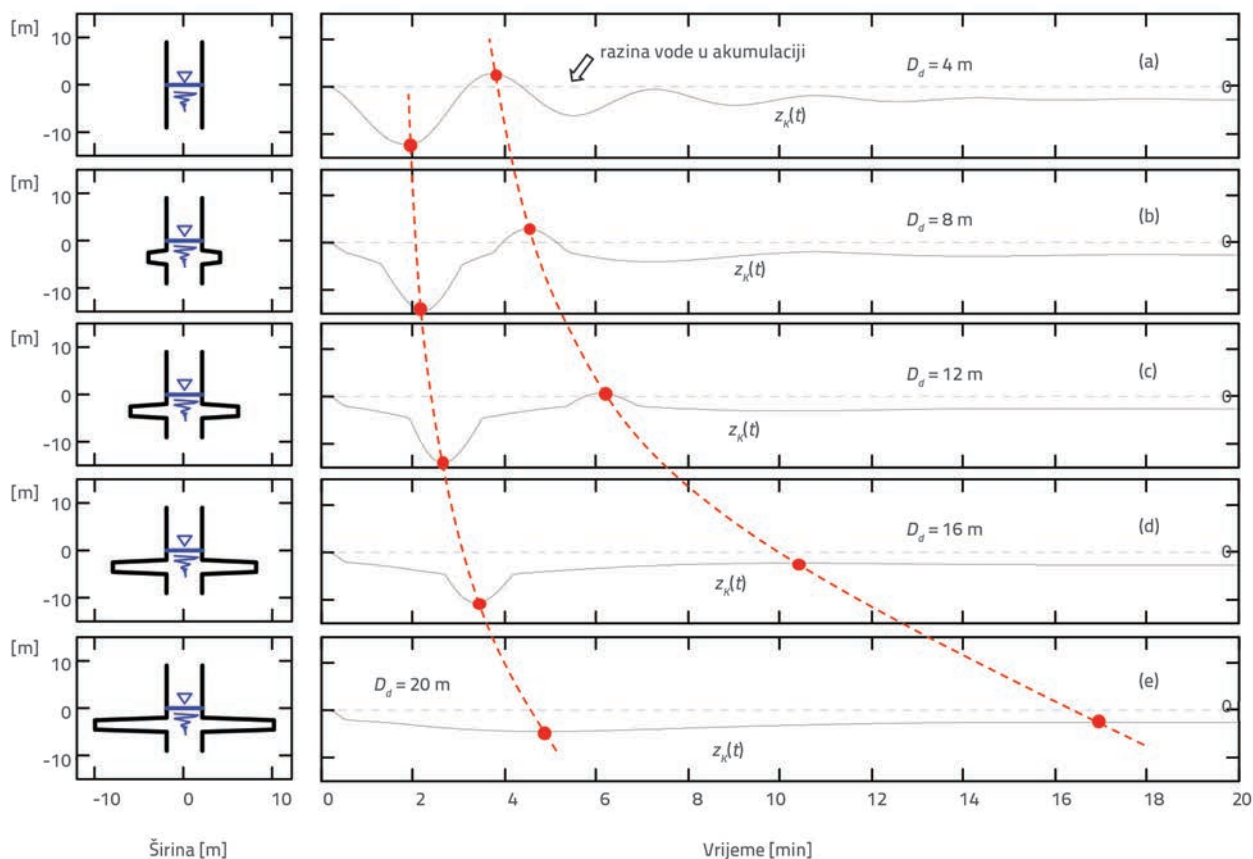
Treba napomenuti da izbor vremenskog koraka utječe na rezultate proračuna te stoga  $\Delta t$  treba pažljivo odabrati [2]. Načelno vrijedi pravilo da s redukcijom vremenskog koraka  $\Delta t$  raste točnost rezultata. Pritom, istovremeno je ovaj trend popraćen redukcijom efikasnosti proračuna te se tako problem definiranja vremenskog koraka  $\Delta t$  rješava kompromisom. Najčešće se  $\Delta t$  definira kao postotak perioda oscilacija  $T$ . Za slučaj da se radi o cilindričnoj vodnoj komori, period oscilacija  $T$  je moguće unaprijed odrediti [7], pa se za isti slučaj  $\Delta t$  najčešće definira omjerom  $T/m$ , gdje je  $m$  parametar veći od 20 [2]. Pritom, kako za vodne komore općenitog oblika nije moguće unaprijed odrediti period oscilacija, potrebno je usvojiti isti koncept ali s većim iznosom parametra  $m$ . Dakle, u prvom redu se vodna komora općenitog oblika aproksimira cilindričnom vodom komorom te se za nju odredi  $T$  i nakon toga  $\Delta t$  kao omjer  $T/m$ . Pritom je više numeričkih analiza provedenih za vodne komore različitih oblika pokazalo da  $m > 200$  dovodi do rezultata zadovoljavajuće točnosti. Na ovaj se način odredio  $\Delta t$  za iduće primjere, i to u iznosu od 0,59 s. Numerički primjeri koji slijede izrađeni su primjenom već prikazanog numeričkog algoritma koji se u tu svrhu implementirao u računalni paket MathCAD 15 [20].

### 5.1. Analiza oscilacija za slučaj $dQ_S/dt > 0$

Uključivanje hidroenergetskog postrojenja u rad definirat će se linearnim uvećavanjem stupnja otvorenosti zatvarača  $\beta$  (20) od vrijednosti 0, u trenutačku  $t = 0$  s, do vrijednosti 1 u trenutačku  $t = 120$  s. Dimenzioniranje vodne komore će se provesti na način da se amplitude nastalih oscilacija reduciraju postupnim proširivanjem donjeg proširenja vodne komore. Od inicijalnog promjera  $D_K = 4$  m, donje proširenje definirano promjerom  $D_d$  će se progresivno uvećavati inkrementom uvećanja  $\Delta D_d = 4$  m. Proširenje je trapeznog poprečnog presjeka s visinom od 3 m na obodu komore i visinom od 2 m na drugom kraju. Mjereći od spoja komore i dovodnog tunela, horizontalna os simetrije proširenja se nalazi na visini od 5,5 m. Rezultirajuće vremenske oscilacije razine vode u vodnoj komori su za navedene slučajeve prikazane na slici 4. Progresivnim uvećavanjem promjera  $D_d$  opadaju amplitude oscilacija te se povećavaju periodi (vremenski razmak susjednih maksimuma i minimuma oscilacija se progresivno povećava, što je prikazano crvenom linijom). Provedenim proračunom je utvrđeno da donje proširenje s promjerom  $D_d = 20$  m (slika 4e) u potpunosti umanjuje amplitude osciliranja te time ide u prilog nesmetanom radu turbina. Suprotno tome, u slučaju da se proširenje usvoji jednakim promjeru vodne komore,  $D_d = D_K$ , predviđa

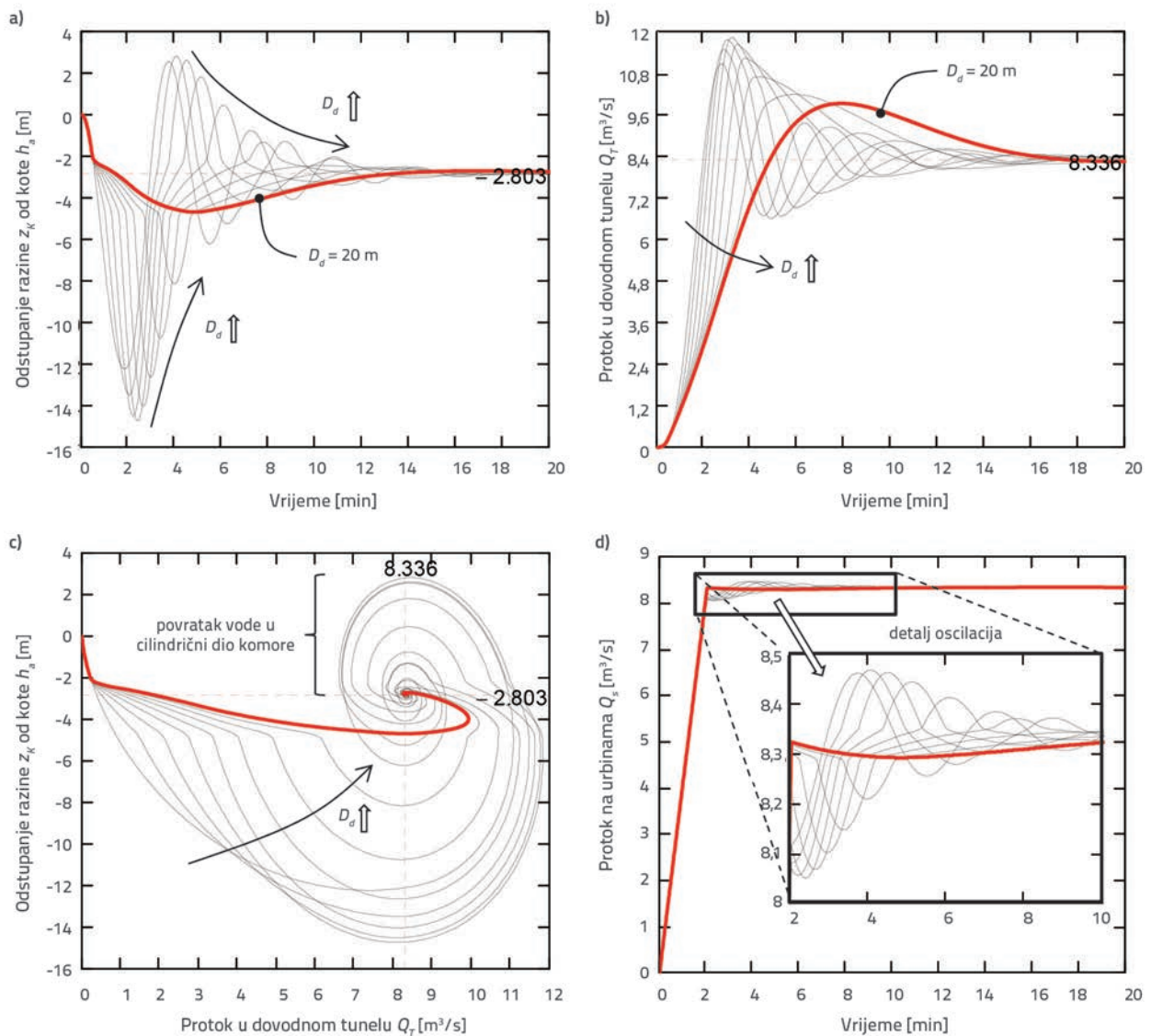
se usisavanje zraka u dovodni tunel i u tlačni cjevovod, što se evidentiralo sniženjem razine vode ispod ulaza u vodnu komoru (slika 4a). Treba primijetiti da proširenje donjeg djela vodne komore utječe i na period osciliranja, što je na slici 4 prikazano crvenom linijom koja spaja susjedne maksimume i minimume oscilacija.

U svrhu evidentiranja utjecaja progresivnog povećanja promjera  $D_d$  na ostale parametre toka, na slici 5, su prikazani: a) detalj oscilacija razine vode  $z_K$ , b) detalj oscilacija protoka  $Q_T$  u dovodnom tunelu, c) fazni portret dinamičkog sustava te d) detalj oscilacija protoka  $Q_S$  na turbinama. Crvena linija na dijagramima prikazuje rezultate dobivene za najveći promjer  $D_d$  donjeg proširenja vodne komore ( $D_d = 20$  m) koji u prikladnoj mjeri reducira amplitudu oscilacija. Faznim portretom, definiranim koordinatnim osima  $z_K$  i  $Q_T$ , želi se upozoriti na dinamiku prilaska stacionarnom stanju koji je za sve slučajeve isti i definiran točkom u kojoj se krivulje dobivene za različite promjere  $D_d$  susreću (slika 5c). Naime, crvenom linijom je izdvojen slučaj za maksimalno ispitano proširenje  $D_d$  u kojem se točka stacionarnosti dosegne bez većih odstupanja u protoku  $Q_T$  i razini  $z_K$ . Na slici 5d je prikazana promjena protoka  $Q_S$  na turbinama. Iako je protočna površina  $A_S$  na turbinama zadana dinamikom promjene stupnja otvorenosti  $\beta(20)$ , protok na turbinama ovisit će i o promjeni razine vode u vodnoj komori (21). To je razlog zašto se rezultati protoka  $Q_S$  prikazuju u obliku



Slika 4. Za slučaj uključivanja hidroenergetskog postrojenja prikazana je ovisnost oscilacija  $z_K(t)$  o promjeru donjeg proširenja vodne komore





Slika 5. Rezultati parametarske analize za slučaj uključivanja hidroenergetskog postrojenja: a) oscilacije putem kojih razina  $z_k$  prilazi stacionarnoj vrijednosti, b) oscilacije putem kojih protok u dovodnom tunelu  $Q_T$  prilazi stacionarnoj vrijednosti, c) fazni portret disipativnih oscilacija te d) oscilacije putem kojih protok  $Q_S$  prilazi protoku definiranom stupnjem otvorenosti zatvarača

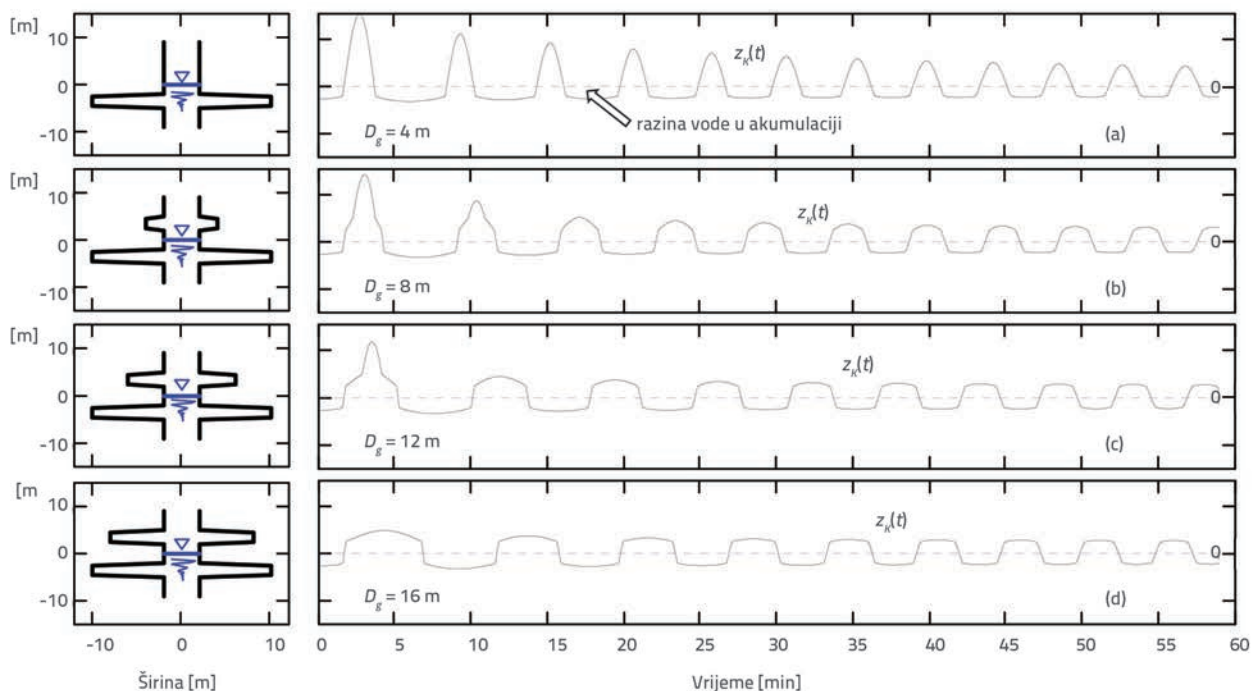
oscilacija oko vrijednosti stacionarnog protoka definiranim završnim stupnjem otvorenosti zasuna. Ova informacija može poslužiti da se razmotri rad regulatora protoka na turbinama.

## 5.2. Analiza oscilacija za slučaj $dQ_S/dt < 0$

Prethodnim primjerom se ustanovila potrebna širina donjeg proširenja vodne komore te se utvrdila razina vode u vodnoj komori  $z_k = -2,8$  m i protok  $Q_T = 8,33$   $m^3/s$  čime je definiran stacionarni režim rada hidroenergetskog postrojenja (slika 5.a i 5.b). U nastavku će se provesti dimenzioniranje gornjeg proširenja vodne komore, zadanim promjerom  $D_g$  i to za slučaj da se stupanj otvorenosti zatvarača  $\beta$  linearno reducira od vrijednosti 1 u  $t = 0$  s do vrijednosti 0 u  $t = 160$  s. Kao i prije,

oscilacije razine vode u vodnoj komori  $z_k$  će se za definirani scenarij isključenja hidroenergetskog postrojenja razmatrati za različite promjere gornjeg proširenja. Kao i u prethodnom slučaju, proširenje je trapeznog poprečnog presjeka s jednom visinom od 3 m i jednom od 2 m. Mjereći od razine vode u akumulaciji, os simetrije poprečnog presjeka proširenja se nalazi na visini od 3,5 m. Počevši od iznosa  $D_g = D_{gr}$  promjer trapeznog proširenja  $D_g$  će se progresivno uvećavati s inkrementom  $\Delta D_g = 4$  m. Polazna geometrija vodne komore je definirana zadnjom ispitanom varijantom iz prethodnog primjera (slika 4.e). Rezultati oscilacija razine  $z_k$  su prikazani na slici 6.

Za polaznu geometriju vodne komore, rezultati oscilacija evidentno pokazuju da će definirana dinamika zatvaranja



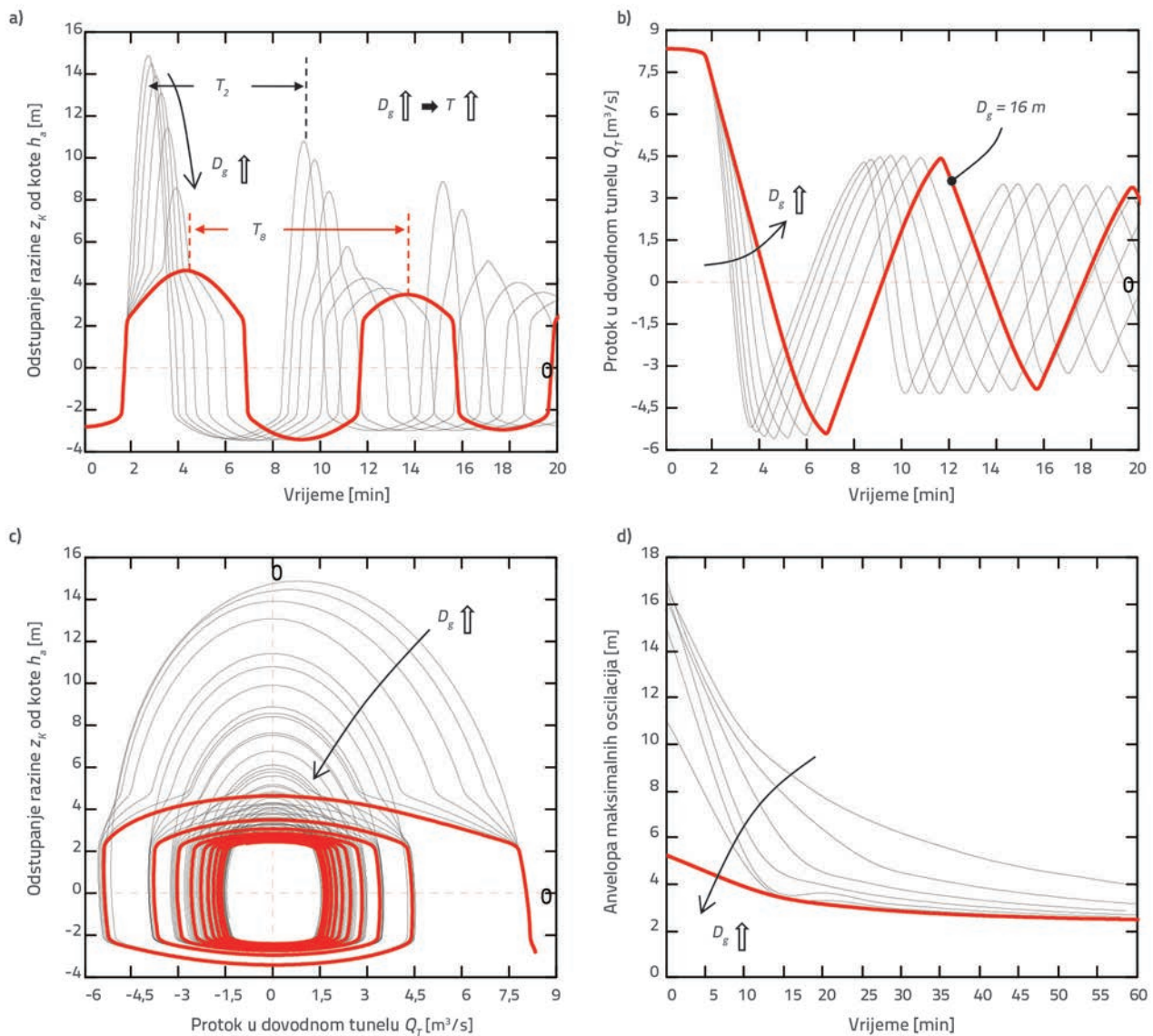
Slika 6. Za slučaj isključivanja hidroenergetskog postrojenja prikazana je ovisnost oscilacija  $z_k(t)$  o promjeru gornjeg proširenja vodne komore

uzrokovati prelijevanje vode iz komore (slika 6.a). Pritom, povećavajući promjer  $D_g$  ustanovila se stanovita redukcija u maksimalnoj amplitudi te isto tako (slika 6.b) i utjecaj promjene geometrije vodne komore na dijagram  $z_k(t)$ . Utjecaj promjene geometrije na nastale oscilacije još je izraženiji u idućem primjeru (slika 6.c). Promjer  $D_g$  kojim se spriječilo prelijevanje vode definiran je u zadnjem primjeru (slika 6.d). Za taj slučaj se može primijetiti i kako zadana geometrija vodne komore utječe i na postupno opadanje perioda oscilacija.

Na slici 7. prikazani su rezultati ostalih relevantnih veličina, dobiveni za isti raspon ispitanih promjera  $D_g$ , ali s dvostrukim brojem inkrementalnih uvećanja ( $\Delta D_g = 2$  m). Crvena linija na dijagramima pokazuje rezultate dobivene za najveći promjer  $D_g$  gornjeg proširenja vodne komore ( $D_g = 18$  m). Slika 7.a prikazuje detalj oscilacija razina vode  $z_k$  u vremenu od 20 min, u kojem se može primijetiti utjecaj geometrije komore na fazni pomak oscilacija. Slika 7.b prikazuje detalj oscilacija protoka  $Q_T$  u dovodnom tunelu. Slično kao i prije (slika 5.c), prikazani fazni portret oscilacija (slika 7.c) upućuje na dinamiku prilaska neoperativnom stanju postrojenja u kojem je  $z_k = 0$  i  $Q_T = 0$ . Pritom, crvena linija prikazuje izmjenu veličina  $z_k$  i  $Q_T$  za slučaj maksimalnog promjera  $D_g$  te se u tom slučaju primjećuje značajno opadanje utjecaja prigušenja, evidentirano sve manjim odmakom između susjednih petlji crvene krivulje koja prilazi ishodištu koordinatnog sustava. Opadanje utjecaja disipativnih sila trenja je vidljivo i na slici 7.d u kojoj su prikazane anvelope maksimalnih oscilacija za period od 60 min.

## 5. Zaključak

Za karakteristično visokotlačno hidroenergetsko postrojenje i definiranu dinamiku promjene protoka u strojarnici, u radu je prikazan postupak modeliranja popratnih oscilacija razine vode u vodnoj komori općenitog oblika. U tu je svrhu razvijena metoda inkrementalne integracije jednadžbe kontinuiteta. Metoda se temelji na ideji da se ulazak vode u vodnu komoru ili izlazak iz nje simulira serijom fiktivnih vremenskih stanja. Na taj se način volumen vode  $\Delta V$ , koji u jednom vremenskom inkrementu puni ili prazni vodnu komoru, dijeli na konačan broj jednakih dijelova  $\Delta V_k$ . Svaki volumni dio  $\Delta V_k$  se potom upušta u vodnu komoru ili se ispušta iz nje te se pripadajuća izmjena u razini vode  $\Delta z_k$  izračunava pod pretpostavkom da je vodna komora konstantnog poprečnog presjeka. Pritom, poprečni presjek vodne komore se za tekući volumni dio  $\Delta V_k$  usvaja jednakim poprečnim presjekom zadane vodne komore, i to na visini na kojoj se trenutačno nalazi razina vode. Progresivno dodavanje ili oduzimanje volumena  $\Delta V_k$  popraćeno je progresivnim korekcijama u razini vode u vodnoj komori. Definiirajući razinu vode u vodnoj komori, protok se u dovodnom tunelu uz prisutnost relevantnih lokalnih i linijskih gubitaka odredio diskretizirajući dinamičku jednadžbu metodom konačnih razlika. U svrhu izrade numeričkih primjena, rezultirajući numerički algoritam se implementirao u programskom paketu MathCAD 15. Numerički primjeri su provedeni na način da se prikaže postupak dimenzioniranja raščlanjene vodne komore te uključuju slučajeve osciliranja



Slika 7. Rezultati parametarske analize za slučaj isključivanja hidroenergetskog postrojenja: a) oscilacije putem kojih razina  $z_k$  prilazi razini vode u akumulaciji  $h_a$ ; b) oscilacije putem kojih protok u dovodnom tunelu  $Q_r$  prilazi stanju definiranom mirovanjem vode; c) fazni portret disipativnih oscilacija; d) anvelope maksimalnih oscilacija

razine vode koji se javljaju nakon uključivanja i isključivanja hidroenergetskog postrojenja. Osim očite jednostavnosti, koja se očituje u smislu računalnog implementiranja metode,

za razliku od direktne integracije, metoda nudi mogućnost praćenja oscilacija u vodnoj komori općenitog pa i vrlo kompleksnog oblika.

## LITERATURA

- [1] Amara, L., Berreksi, A. & Abdoune, K.: Computation of mass oscillations in a surge tank by finite element technique, Larhyss Journal, ISSN 1112-3680, n° 15, pp. 139-149, 2013.
- [2] Ivetić, M.V.: Računska hidraulika - Tečenje u cevima, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1995.
- [3] Agroskin, I.I., Dimitrijević, G.T. & Pikalov, F.I.: Hidraulika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- [4] Raus, H.: Tehnička hidraulika, Građevinska knjiga, Beograd, 1969.
- [5] Jaeger, C.: A review of surge tank stability criteria, Annual Meeting of The A.S.M.E., 1959, doi:10.1115/1.3662744

- [6] Wei, J.P.: Influence of large oscillations on stability of simple surge tank, Master Thesis of Applied Science in the Department of Civil Engineering, University of British Columbia, 1963.
- [7] Moghaddam, M.A.: Analysis and design of a simple surge tank, IJE Transactions A: Basics, Vol. 17, No. 4, pp. 339-345, 2004.
- [8] Calamak, M., Bozkus, Z.: Numerical investigation of operation levels in a surge tank of small hydropower plant, 10th International Congress on advances in civil engineering, Ankara, 2012.
- [9] Bergant, A. & Simpson, A.R.: Development of a generalised set of pipeline water hammer and column separation equations, Research Report No. R149, University of Adelaide, Dept. of civil and environmental engineering, 1997.
- [10] Brunone, B., Golia, U. & Greco, M.: Some remarks on the momentum equation for fast transients, Int. Meeting on hydraulic transients with column separation, 9th and last round table of the IAHR Group, 1992.
- [11] Bartolić, I., Berbić, J. & Gjetvaj, G.: Hidraulička dioda kao asimetrični prigušivač, Hrvatske vode 21 (85), pp. 235-242, 2013.
- [12] Chaudhry, M.H.: Applied hydraulic transients, Second ed. Van Nostrand Reinhold Co., New York, N.Y., 1987.
- [13] Wylie, E.B. & Streeter, V.L.: Fluid transients in systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [14] Colebrook, C.F.: Turbulent flows in pipes with particular reference to the transition region between smooth and rough pipe laws, J. Inst. Civil Engng., London, 1939.
- [15] Haaland, S.: Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent flow, J. Fluids Engng. 105, pp. 89-90, 1983., doi:10.1115/1.3240948
- [16] Moghaddam, M.A.: Numerical investigation on transient incompressible fluid flow, 5th WSEAS Int. Conf. on Fluid Mechanics (FLUIDS'08) Acapulco, Mexico, pp. 25-27, 2008.
- [17] Daily, W., Hankey, W. Olive, R. & Jordan, J.: Resistance coefficients for accelerated and decelerated flows through smooth tubes and orifices, Transactions of ASME, pp. 1071-1077, 1956.
- [18] Nabi, G., Rehman, H., Kashif, M. & Tariq, M.: Hydraulic transient analysis of surge tanks: Case study of Satpara and Golen Gol Hydropower projects in Pakistan, Pak. J. Engg. & Appl. Sci., Vol. 8, pp. 34-48, 2011.
- [19] Thoma, D.: Zur Theorie des wasserschlosses bei selbsttaetig geregelten turbinenanlagen, Oldenburg, Munchen, Germany, 1910.
- [20] Mathsoft, Mathcad Plus 5.0 - User's guide. Mathsoft Inc., Cambridge, MA, 1993.