

Helena Vlasnović*
Maja Cindrić**

RAZUMIJEVANJE GEOMETRIJSKIH POJMOVA I RAZVITAK GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA UČENIKA NIŽIH RAZREDA OSNOVNE ŠKOLE PREMA VAN HIELEOVOJ TEORIJI

Sažetak: *Van Hieleova teorija o razvoju geometrijskog mišljenja pretpostavlja razine učeničkog mišljenja u području geometrije koje ne ovise o godinama starosti učenika. Ovaj rad ukratko predstavlja van Hieleovu teoriju o razvoju geometrijskog mišljenja i geometrijske sadržaje koji se uče u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole, a koji pogoduju tom razvoju. Prema van Hieleovoj teoriji učenici primjerenim aktivnostima razvijaju svoje geometrijsko mišljenje i napreduju po razinama. Rad predstavlja i istraživanje provedeno među 316 učenika nižih razreda osnovne škole kojim se želi ustvrditi napreduju li učenici prema van Hieleovim razinama kroz prva četiri razreda osnovne škole.*

Ključne riječi: *geometrijsko mišljenje, van Hieleova teorija, van Hieleovi nivoi.*

1. Uvod

Kroz učenje geometrije učenici uče analizirati karakteristike i odnose geometrijskih likova i tijela, crtaju geometrijske likove prema nastavnikovim nputcima, usvajaju elementarne pojmove iz područja geometrije nižih razreda osnovne škole, a da često ne mogu sa sigurnošću prepoznati trokut ako se nalazi u položaju koji nije uobičajen. Učenici s velikom sigurnošću crtaju okomite pravce ako je jedan od pravaca paralelan s donjim rubom papira, no čim je početni pravac u drugačijem položaju, crtanje njemu okomitog pravca postaje zahtjevno. Samo poznavanje postupka crtanja okomitih pravaca postaje upitno. Znanje geometrije ne svodi se samo na poznavanje određenih postupaka i prepoznavanja likova ako su u standardnom položaju; u konačnici, kao i svaki drugi koncept, dobiva na punini i vrijednosti tek uspostavom poveznica različitih aspekata koncepta. Građenje i manipulacija mentalnog prikaza dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika i percipiranje objekata iz različitih perspektiva važan

je aspekt geometrijskog mišljenja. Geometrija je prirodno mjesto i učinkovito sredstvo za razvoj učeničkog rasuđivanja i vještina argumentiranja, što posebice dolazi do izražaja pri dokazima stavova (teorema) u srednjoj školi. Geometrijsko modeliranje i prostorno razumijevanje potrebno je učenicima da bi interpretirali i opisali fizički okoliš i može biti važan alat u rješavanju problema.

Znanja iz geometrije koja djeca imaju prije polaska u školu treba proširivati istraživanjima, ispitivanjem i analizom oblika predmeta u okolini i struktura u razredu. Učenici bi trebali znati koristiti se znanjem o geometrijskim oblicima i strukturama da bi postali vještiji u opisivanju, reprezentaciji i snalaženju u vlastitom okolišu. Za kvalitetno razumijevanje i usvajanje geometrijskih pojmova učenici bi morali znati prikazivati dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike crtanjem, konstrukcijama kockicama, dramatizacijom i riječima. Trebali bi istražiti oblike dekompozicijom (rastavljanjem i sastavljanjem novih oblika). Njihovo znanje o smjeru i poziciji trebalo bi biti oplemenjeno upotrebom govornog jezika da bi se locirali objekti. Geometrija pruža učenicima aspekt matematičkog mišljenja koje je različito od svijeta brojeva, ali i povezano s njime. Kako učenicima postaju poznati likovi, tijela, lokacije, transformacije i kako razvijaju prostorno razmišljanje, uređuje se temelj za razumijevanje ne samo prostornog svijeta, već i drugih tema u matematici i umjetnosti, znanosti, i socijalnim istraživanjima (Razel i Eylon, 1991).

Upotrebljavajući konkretne modele, crteže i (kompjuterski) program za dinamičnu geometriju, učenici se mogu aktivno angažirati u geometrijskim problemskim situacijama. U dobro organiziranim aktivnostima, s odgovarajućim alatom i uz učiteljevu podršku učenici mogu donositi i istraživati pretpostavke o geometriji i mogu razvijati geometrijske koncepte od najranijih godina školovanja. Geometrija je više od definicije; bit je u opisivanju odnosa i razumijevanju. Prema mišljenju mnogih teoretičara dječje razumijevanje geometrijskih pojmova i koncepata prolazi kroz razrede, od neformalnog do formalnog mišljenja (Burger i Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes i Tischler, 1988; Senk, 1989; van Hiele, 1986).

2. Geometrijski sadržaji u matematici nižih razreda osnovne škole

Povijesno gledajući, kroz nastavu matematike u hrvatskim školama geometrijskim sadržajima posvećivalo se malo vremena. Sami nastavnici nisu bili sigurni u kojoj mjeri postoji potreba i važnost za usvajanjem geometrijskih sadržaja. To je ostavilo posljedice i na današnje poimanje geometrije, no suvremeni matematički kurikuli počeli su isticati njezinu važnost. Geometrija može osigurati potpunije razumijevanje svijeta. Geometrija se može pronaći u strukturi sunčanog sustava, u geološkim formacijama, u stijenama i kristalima, u biljkama i cvijeću, čak i u životinjama. Također, veći dio našeg okruženja (umjetnost,

arhitektura, auti, mehanizmi i općenito sve što ljudi kreiraju) ima elemente geometrijske forme. Učenički rad na geometrijskim sadržajima, posebice ako im se pristupa problemski i istraživački, može učenicima pomoći u razvijanju logičkog zaključivanja i rješavanju nekih algebarskih i aritmetičkih problema. Razvijanje prostornog zora važan je oblik rješavanja problema, a rješavanje problema jedan je od glavnih temelja učenja matematike. Geometrija igra ključnu ulogu u učenju drugih područja matematike. Na primjer, koncepti razlomaka povezani su s geometrijom, omjer i razmjeri direktno su povezani s geometrijskim konceptima sličnosti i, naravno, mjerenja. Mnogo ljudi svakodnevno koristi geometrijske spoznaje; različiti znanstvenici, arhitekti i umjetnici, inženjeri, geodeti – a to su samo neke profesije koje se konstantno koriste geometrijskim znanjem. Svakodnevno geometrija pomaže pri gradnji ograde, dizajniranju kućice za psa, planiranju vrta, uređenju dnevnog boravka i sl.

Dualnost u pristupu obrazovanju u Republici Hrvatskoj definira s jedne strane sadržaje prema obrazovnom predmetu (*Nastavni plan i program*, 2006), a s druge strane učeničke kompetencije za pojedini ciklus i pojedino područje (Nacionalni okvirni kurikulum, 2010). Geometrijski sadržaji u nižim razredima osnovne škole kreću od geometrijskih tijela, ploha, crta, geometrijskih likova, preko poimanja dužine, pravca i polupravca, kružnice i kruga, do analiziranja trokuta, pravokutnika i kvadrata. Sami sadržaji ne daju uvid u strukturu i različite načine dječjih razumijevanja i poimanja tih geometrijskih sadržaja. Nasuprot definiranju sadržaja, *Nacionalni okvirni kurikulum* definira različite razine usvajanja tih sadržaja kod učenika. Tako se u NOK-u pod klasom kompetencija „Oblik i prostor“ navodi da će učenici nakon završene prve razine obrazovanja moći opisati položaj i smjer upotrebom svoje orijentacije i jednostavnih koordinata (npr. kvadratna mreža), prepoznati, imenovati, izgraditi, opisati, usporediti i razvrstati crte, plohe te jednostavne dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike i njihove dijelove, skicirati jednostavne ravninske oblike te ih nacrtati služeći se geometrijskim priborom, prepoznati i prikazati jednostavne ravninske i prostorne oblike u različitim položajima, istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih i prostornih oblika rabeći stvarne materijale, prepoznati osnovne geometrijske oblike u svakodnevnomu životu. Da bi nastavnik mogao kod učenika razviti navedene kompetencije, mora biti svjestan učeničkih mogućnosti, njihova neformalnog poimanja prostora i oblika. Osobe s osjećajem za prostor imaju osjećaja za geometrijske aspekte svojeg okruženja i oblike sastavljene od objekata u okolišu. Mnogi ljudi kažu da nisu osobito dobri s oblicima ili da imaju loš osjećaj za prostor. Ipak, iskustvo rada s oblicima i rada na prostornim odnosima, kada se kontinuirano provodi, može razvijati osjećaj za prostor. Bez geometrijskog iskustva većina ljudi ne napreduje u stjecanju osjećaja za prostor. Zadaća je nastavnika oblikovanje nastavnih sadržaja i nastavnih materijala za

poučavanje geometrijskih sadržaja i razvoj kompetencija iz klase oblik i prostor, a to je moguće jedino uz dobro razumijevanje učeničkih mogućnosti i njihovih neformalnih znanja i kompetencija. Naše istraživanje dat će uvid u neke aspekte učeničkih poimanja geometrijskih sadržaja, ovisno o uzrastu učenika, s aspekta razvoja geometrijskog mišljenja prema van Hieleovoj teoriji.

3. Van Hieleova teorija

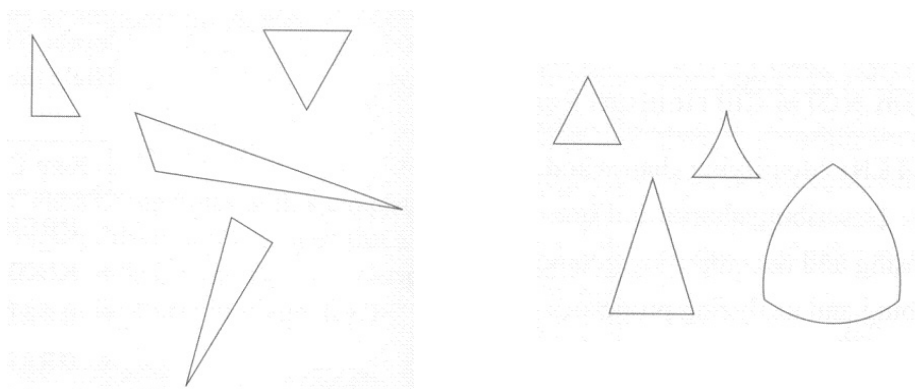
Nizozemac Pierre van Hiele, koji je doktorirao 1957. godine na fakultetu u Utrechtu u Nizozemskoj, u svojoj doktorskoj disertaciji i u članku koji je izašao dvije godine ranije iznio je teoriju o razinama mišljenja kroz koje se prolazi pri učenju geometrije. Njegova teorija objašnjava zašto velik broj učenika ima problema u učenju geometrije, posebice s izvođenjem formalnih dokaza, i daje nekoliko prijedloga kako izbjeći ove probleme. Ta se teorija bazira na ideji da postoji pet razina mišljenja kroz koje se prolazi na putu ka stjecanju sposobnosti izvođenja formalnih dokaza te razumijevanja i geometrije koja ne pripada euklidskoj geometriji. Na svakoj sljedećoj razini usvajaju se nova znanja, a da bi se dosegla sljedeća razina, potrebno je usvojiti prethodnu. To zavisi isključivo o razumijevanju određenog gradiva i percepciji cjelokupnog koncepta, a ne samo o usvajanju činjeničnog znanja. Također, životna dob ne utječe na prijelaz na sljedeću razinu. Postoje ljudi koji su ostali na početnom nivou tijekom cijelog života usprkos prolasku kroz školski sustav unutar kojeg su obrađivani geometrijski sadržaji (van Hiele, 1986). Van Hiele u svom radu objašnjava što smatra razinama mišljenja navodeći razgovor koji su vodile njegove dvije kćeri (8 i 9 godina) o mišljenju. Njihovo pitanje bilo je: „Ako si budan, jesi li zaposlen mišljenjem?“ „Ne“, jedna je rekla, „mogu hodati kroz šumu i vidjeti stabla i sve druge lijepe stvari, ali ja ne razmišljam da vidim stabla. Vidim paprat, i vidim ih bez razmišljanja.“ Druga je rekla: „Onda znači da si mislila, ili si znala da si u šumi i da vidiš stabla, ali nisi se koristila riječima.“

Hans Freudenthal, ugledni nizozemski matematičar i nastavnik, složio se s takvim stavom i komentirao da mišljenje bez riječi nije mišljenje (van Hiele, 1986). Prema van Hieleovim razinama geometrijskog mišljenja, „najniža“ je vizualna razina, koja počinje neverbalnim mišljenjem. Na vizualnoj razini mišljenja oblici se sude po izgledu. Djeca tvrde da je neki lik kvadrat jer vide da je to kvadrat ili: „To je pravokutnik jer izgleda kao kutija“. Na sljedećoj razini, opisnoj, oblici su nositelji svojih svojstava. Oblik se više ne prosuđuje zato „što izgleda kao nešto“, već zato što ima određena svojstva. Na primjer, jednakostraničan trokut ima svojstva kao što su: tri stranice; sve stranice jednake; tri jednaka kuta; i simetrija. Na ovoj razini jezik je važan za opisivanje oblika. Međutim, na deskriptivnoj razini svojstva nisu još logički poredana, tako da trokut s jednakim stranicama nije nužno onaj s jednakim kutovima. Na sljedećoj razini, razini neformalne

dedukcije, svojstva su logički poredana. Izvodimo zaključak o svojstvima jednoga iz drugoga; jedno svojstvo prethodi ili slijedi iz drugog svojstva. Učenici se koriste svojstvima koja već znaju kako bi formulirali definicije, na primjer, za kvadrate, pravokutnike i jednakostranične trokute, i onda se koriste tim definicijama da bi shvatili odnose, kao što je objašnjavanje zašto su svi kvadrati pravokutnici ili zašto je zbroj kutova svakog trokuta 180° . Međutim, na ovoj razini unutarnje značenje dedukcije, kao što je uloga aksioma, definicija, teorema i njihovih obrata, ne razumije se. Najistaknutije svojstvo van Hieleove teorije upravo je hijerarhija od pet razina načina razumijevanja prostornih ideja. Svaka od pet razina opisuje proces razmišljanja korišten u geometrijskom kontekstu. Razine opisuju kako netko razmišlja i o kojim tipovima geometrijskih ideja netko razmišlja, prije nego koliko netko znanja ima. Kako netko napreduje s jedne razine na drugu, objekt njegova geometrijskog mišljenja mijenja se. Prema van Hieleovoj teoriji, razine su geometrijskog mišljenja: vizualizacija, analiza, neformalna dedukcija, dedukcija i strogost (Čižmešija, Svedrec, Radović, Soucie, 2010). Budući da je tema ovog rada razvoj geometrijskog mišljenja učenika u nižim razredima osnovne škole, vrlo kratko ćemo se zadržati na višim razinama geometrijskog mišljenja, razini dedukcije i razini strogosti, a detaljnije opisati razinu vizualizacije, analize i neformalne dedukcije.

Razina vizualizacije počinje „neverbalnim mišljenjem“. Oblici se sude po izgledu i generalno se gledaju kao „cjelina“, prije nego što im se razlikuju dijelovi. Iako djeca počnu upotrebljavati osnovna imena za oblike, često ne nude objašnjenje ili ne povezuju oblik sa sličnim objektima. Izgled oblika učenicima definira sam taj oblik. Ovo se može usporediti sa sposobnošću male djece da prepoznaju neke riječi na viđenje, a ne da razumiju kako pojedinačna slova zvuče i kako se spajaju da bi tvorila riječi.

Učenici koji razmišljaju na ovoj razini mogu mjeriti i čak razgovarati o svojstvima oblika, ali o ovim svojstvima ne razmišljaju eksplicitno. Budući da je izgled dominantan na ovoj razini, izgled može nadvladati svojstva tog oblika. Na primjer, kvadrat koji je rotiran tako da su mu sve stranice na kutu od 45° na vertikali učenicima na razini vizualizacije to možda neće biti kvadrat. Učenici će na ovoj razini sortirati i klasificirati oblike na temelju holističke percepcije objekta – „Stavljam ove skupa jer svi izgledaju slično“. Dijete čije je razmišljanje na razini vizualizacije prepoznaje određene oblike holistički, bez obraćanja pažnje na komponente tog lika. Npr. pravokutnik prepoznaje jer liči na vrata, a da pritom ne uočava četiri prava kuta i dva para jednakih paralelnih stranica. Na ovom nivou dijete ignorira relevantna obilježja geometrijskih oblika, kao što su pravi kut ili paralelne stranice, dok zapaža orijentaciju lika na papiru. Tako će za dijete pravokutnik biti samo onaj koji stoji uspravno, no, ako mu promijenimo položaj, dijete će tvrditi da se ne radi o pravokutniku.

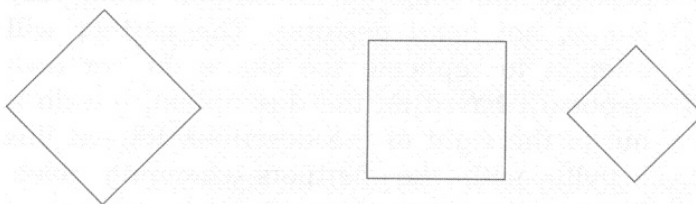


Slika 1 – Likovi koje djeca na razini vizualizacije percipiraju kao trokute (lijevo), trokuti koje djeca na razini vizualizacije ne percipiraju kao trokute (desno) (prema Musser, 2007)

Dijete čije razmišljanje je holističko klasificira pod trokute likove prikazane na lijevoj strani slike 1, dok za trokute na desnoj strani slike 1 tvrdi da nisu trokuti. Dijete ne uočava zaobljenost stranica, već mu cijela slika djeluje „trokutasto“.

Na razini analize djeca mogu identificirati i opisati dijelove i svojstva oblika. Na primjer, jednakostraničan trokut može se razlikovati od drugih trokuta jer ima tri jednake stranice, jednake kutove i simetričan je. Djeca trebaju razviti odgovarajući jezik koji odgovara formalnim geometrijskim pojmovima. Međutim, na ovoj razini svojstva nisu logički posložena, što znači da djeca ne percipiraju osnovne odnose među svojstvima. Tako, kod jednakostraničnog trokuta na primjer, ne razumiju da, ako trokut ima tri jednake stranice, to znači da mora imati i tri jednaka kuta. Učenici na razini analize lakše uzimaju u obzir sve oblike unutar jedne klase nego pojedinačni oblik. Umjesto pričanja o jednom pravokutniku (koji se uzme kao primjer), moguće je pričati o svim pravokutnicima. Fokusiranjem na klasu oblika, učenici su u mogućnosti razmišljati o tome što pravokutnika čini pravokutnikom (četiri stranice, suprotne stranice paralelne, suprotne stranice jednake duljine, četiri prava kuta, podudarne dijagonale, itd.). Nebitna svojstva (veličina ili orijentacija) padaju u pozadinu. Na ovoj razini učenici počinju shvaćati da kolekcija oblika ide zajedno zbog svojih svojstava. Ideje o individualnim oblicima sada se mogu generalizirati na sve oblike koji odgovaraju toj klasi. Ako oblik pripada određenoj klasi, kao što su kocke, ima odgovarajuća svojstva klase. „Sve kocke imaju šest jednakih stranica, i svaka od tih stranica je kvadrat.“ Ova svojstva bila su obuhvaćena na razini vizualizacije. Učenici koji operiraju na razini analize mogu navesti sva svojstva kvadrata, pravokutnika, paralelograma, ali ne vide da su to međusobne potklase, da su svi kvadrati pravokutnici, a svi pravokutnici paralelogrami. U definiranju oblika učenici na razini analize navode

svojstava oblika koje znaju. Dijete se na ovom nivou fokusira analitički na dijelove lika, kao što su stranice i kutovi. Komponentama lika i njihovim svojstvima dijete se koristi za opisivanje i karakterizaciju lika. Dijete razlikuje relevantna svojstva lika od irelevantnih svojstava. Dijete također zna da rotacija kvadrata neće promijeniti taj kvadrat. Sljedeća ilustracija prikazuje kvadrat koji prema holističkom razmišljanju učenika nije kvadrat jer je rotiran, te slike kvadrata koje dijete u analitičkoj fazi smatra kvadratima.

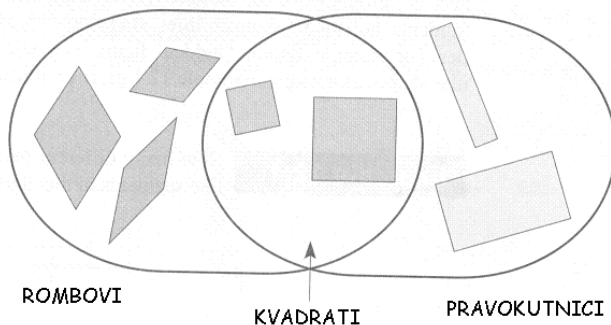


Slika 2 – Kvadrat koji prema holističkom razmišljanju učenika nije kvadrat (lijevo) te slike kvadrata koje dijete u analitičkoj fazi smatra kvadratima (desno) (prema Musser, 2007)

Ono što dijete u ovoj fazi ne razumije i u čemu često radi pogreške jesu veze i generalizacija likova. Tako će za kvadrat reći da nije pravokutnik i ne uočava zajednička obilježja kvadrata, pravokutnika, romba, romboida.

Na razini neformalne dedukcije učenici mogu logički poredati svojstva oblika. Učenici mogu vidjeti da jedno svojstvo prethodi ili slijedi iz drugog, i iz toga mogu izvesti jedno svojstvo iz drugog. Mogu primijeniti ono što već znaju kako bi objasnili odnose među oblicima i kako bi formulirali definicije. Na primjer, mogu objasniti zašto su svi kvadrati pravokutnici: „Ako su sva četiri kuta prava, oblik mora biti pravokutnik. Ako je kvadrat, svi kutovi su pravi. Ako je kvadrat, mora biti pravokutnik“. S većom sposobnošću povezivanja u „ako-onda“ shvaćanja, oblici se mogu klasificirati korištenjem minimalnog broja karakteristika. Na primjer, četiri jednake stranice i barem jedan pravi kut može biti dovoljan da se definira kvadrat. Pravokutnici su paralelogrami s pravim kutovima. Promatranja idu iznad samih svojstava i počinju se fokusirati na logičkim argumentima o svojstvima. Iako neformalna dedukcija kao ova formira osnovu formalne dedukcije, uloga aksioma, definicija, teorema i njihovih obrata ne razumije se. Učenici na razini neformalne dedukcije moći će pratiti i cijeniti neformalan deduktivan argument o oblicima i njihovim svojstvima. „Dokazi“ mogu biti intuitivniji nego rigorozno deduktivni. Međutim, razumljivo je što je logičan argument uvjerljiviji. Razumijevanje aksiomske strukture formalnog deduktivnog sistema, međutim, ostaje ispod površine. Dijete na ovom nivou razumije apstraktne veze između likova. Tako sada razumije da su kvadrati i rombovi i da su to likovi s dvama parovima stranica

jednakih duljina te zna da su kvadrati i pravokutnici jer su četverokuti s četirima pravim kutovima.



Slika 3 – Kategorizacija četverokuta (prema Musser, 2007)

Na razini neformalne dedukcije učenici mogu sagledavati (uočavati) više od svojstava oblika. Njihovo ranije razmišljanje proizvelo je pretpostavke o odnosima među svojstvima. Jesu li ove pretpostavke točne? Jesu li „istinite“? Dok ova analiza neformalnih argumenata traje, struktura sustava dovršava se aksiomima, definicijama, teoremima, posljedicama, a postulati se počinju razvijati i mogu se razumjeti kao potrebna sredstva za uspostavu geometrijske istine. Na ovoj razini učenici počinju razumijevati potrebu za sustavom logike koja ostaje na minimalnom sklopu pretpostavki iz kojih se druge istine mogu izvesti. Učenik na ovoj razini može operirati s apstraktnim izjavama o geometrijskim svojstvima i može zaključivati više na temelju logičkog zaključivanja, a ne na temelju intuicije. Ovo je razina tradicionalnog srednjoškolskog programa.

Na najvišoj razini van Hieleove hijerarhije objekt pažnje sam je aksiomatski sustav, ne samo dedukcija unutar sustava. Postoji razumijevanje razlika i odnosa među različitim aksiomatskim sistemima. Općenito, ovo je razina fakultetske matematike, glavni predmet onog tko studira geometriju kao granu matematičke znanosti.

4. Metodologija

4.1. Cilj istraživanja

Van Hieleova teorija o razvoju geometrijskog mišljenja navela nas je na ideju o istraživanju stupnja toga mišljenja kod učenika kroz niže razrede osnovne škole. Zanima nas početnu li trenutni nastavni proces i aktivnosti koje se provode tijekom tog procesa razvoj učeničkog mišljenja te jesu li isti u skladu s očekivanjima kompetencija koje se navode u *Nacionalnom okvirnom kurikulumu*.

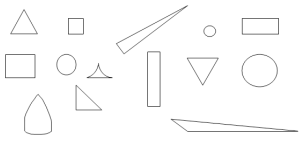
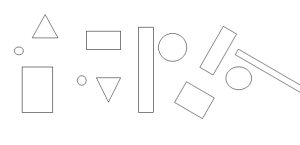
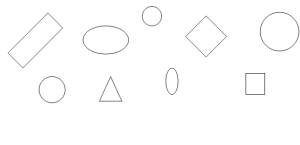
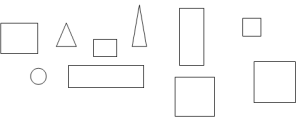
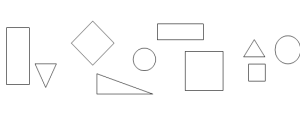
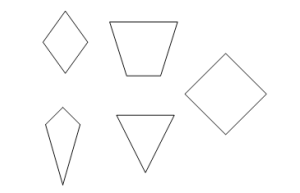
Svojim istraživanjem također želimo prikazati oblike razmišljanja kod učenika, koji nastavnicima mogu poslužiti u daljnjem formiranju aktivnosti s ciljem postizanja željenih kompetencija.

4.2. Uzorak istraživanja

Proveli smo transversalno istraživanje u jednoj osnovnoj školi Zadarske županije. U istraživanju su sudjelovali učenici od prvog do četvrtog razreda osnovne škole koji su donijeli pisani pristanak roditelja za sudjelovanje u istraživanju. Sudjelovalo je ukupno 316 učenika nižih razreda osnovne škole, od toga 91 učenik prvih razreda, 89 učenika drugih razreda, 62 učenika trećih razreda i 74 učenika četvrtih razreda.

4.3. Postupak istraživanja

Za instrument istraživanja upotrijebljen je test koji se sastoji od 6 zadataka otvorenog tipa. Zadaci postavljeni u testu oblikovani su prema instrumentu istraživanja Njisanove studije (de Villiers, 1987).

<p>1. zadatak Zaokruži sve trokute na slici.</p> 	<p>2. zadatak Zaokruži sve pravokutnike na slici.</p> 	<p>3. zadatak Zaokruži sve krugove na slici.</p> 
<p>4. zadatak Zaokruži sve pravokutnike na slici.</p> 	<p>5. zadatak Zaokruži sve kvadrate na slici.</p> 	<p>6. zadatak Sljedeće likove opiši. Napiši na što ti sliče i/ili gdje u svojoj okolini možeš vidjeti takav lik.</p> 

Tablica 1– Test razvoja geometrijskog mišljenja

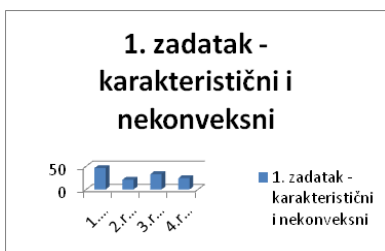
4.4. Hipoteza

Prema sadržajima definiranim u *Nastavnom planu i programu te Nacionalnom okvirnom kurikulumu*, kroz nastavu matematike učenici bi trebali razvijati svoje geometrijsko mišljenje prema van Hieleovim razinama, stoga postavljamo sljedeću hipotezu:

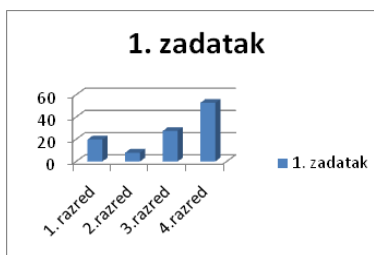
H1: Učenici kroz niže razrede osnovne škole napreduju u razvoju geometrijskog mišljenja prema van Hieleovoj teoriji.

4.5. Rezultati i analiza

U prvom zadatku prikazani su različiti likovi među kojima se nalaze trokuti u standardnom položaju, osnovicom paralelnom s rubom lista, trokuti čija je jedna visina znatno veća od pripadne stranice i nekonveksni likovi koji globalno podsjećaju na trokut u standardnom položaju. Ovaj zadatak otvorenog je tipa u kojem učenici zaokružuju likove za koje smatraju da su trokuti. Razdvojili smo učenike koji su zaokružili sve trokute i one koji su zaokružili karakteristične trokute i nekonveksne likove. Rezultati su iskazani u postocima. Razdvajanjem rezultata na ovaj način željeli smo prikazati zastupljenost učenika na pojedinoj razini prema van Hieleovoj teoriji. Tako učenici, čije se geometrijsko mišljenje prema toj teoriji nalazi na razini vizualizacije, koji trokute doživljavaju holistički, prema obliku, zaokružiti će i nekonveksne likove koji svojim oblikom podsjećaju na trokut, ali i trokute u karakterističnom položaju. Unutar svake skupine postoji i manjih odstupanja, na način da poneki od učenika nisu zaokružili baš sve trokute, ali prema zaokruženim trokutima moguće je zaključiti da se ubrajaju u jednu od ovih skupina, ili u treću skupinu koja ovdje nije prikazana, a u kojoj se nalaze učenici za koje nije uočena pravilnost u selekciji. Kroz ovaj zadatak možemo zamijetiti da zastupljenost broja učenika čije geometrijsko mišljenje je na razni vizualizacije pada u ovisnosti o uzrastu učenika iako postoji znatno odstupanje kod učenika drugog razreda. Drugi dijagram (slika 5) koji ukazuje na učenike čije je geometrijsko mišljenje minimalno na razini analize prikazuje tendenciju rasta u ovisnosti o dobi djeteta, gdje ponovo uočavamo odstupanja kod učenika drugog razreda.

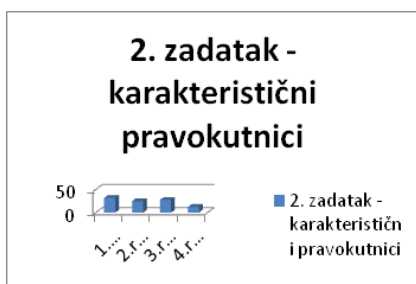


Slika 4 – Učenici na razini vizualizacije

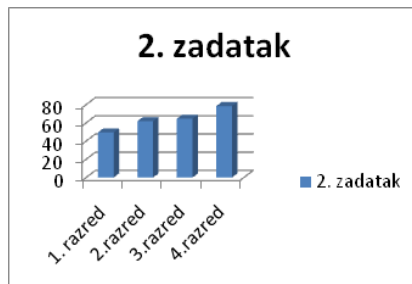


Slika 5 – Učenici minimalno na razini analize

U drugom zadatku, analogno pristupu u prvom zadatku, razdvojili smo učenike koji percipiraju sve pravokutnike i učenike koji pod pojmom pravokutnik podrazumijevaju samo pravokutnike u standardnom položaju, položaju vrata, lista papira ili školske ploče. Te učenike prikazujemo kao učenike na razini vizualizacije, dok učenike koji zaokružuju sve pravokutnike prikazujemo kao učenike minimalno na razini analize. Dijagram na slici 6. prikazuje tendenciju pada broja učenika na razini vizualizacije s godinama starosti djeteta uz odstupanje učenika trećeg razreda, dok dijagram na slici 7 prikazuje porast broja učenika na razini vizualizacije s godinama starosti učenika. Ovi rezultati, kao i oni iz prethodnog zadatka, potvrđuju našu hipotezu. Ipak, postoji značajna razlika između broja učenika na razini vizualizacije prema prvom i drugom zadatku. Puno veći broj učenika svrstava „nekarakteristične“ pravokutnike u skupinu pravokutnika od učenika koji to isto čine sa trokutima.

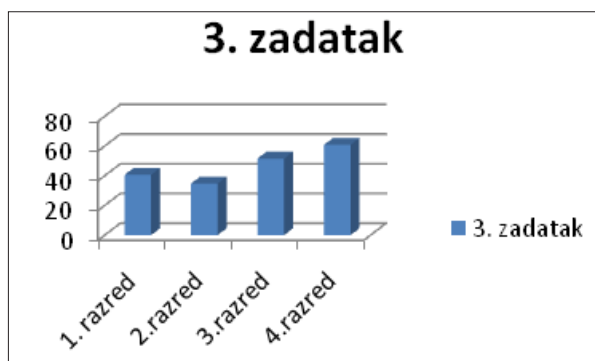


Slika 6 – Učenici na razini vizualizacije



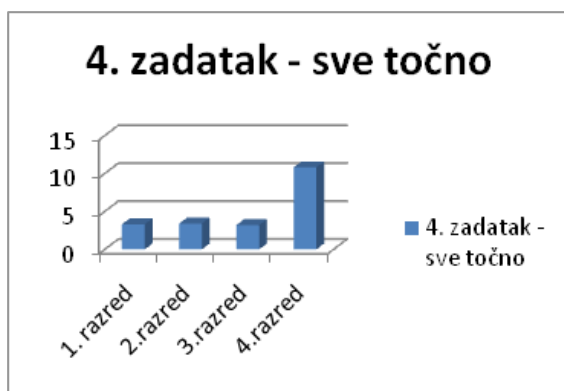
Slika 7 – Učenici minimalno na razini analize

U trećem zadatku razdvojili smo učenike na one koji su zaokružili točno sve krugove i ostale koji su uz krugove zaokruživali i elipse. Dijagram na slici 8 prikazuje odnos broja učenika koji izdvajaju samo krugove. Tendencija je porasta broja učenika s godinama starosti, kao i u ranijim zadacima.



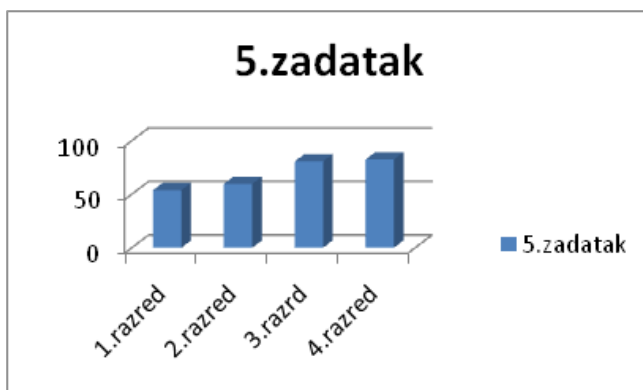
Slika 8 – Učenici koji točno rješavaju 3. zadatak

Prva tri prikazana zadatka razdvajaju učenike na razini vizualizacije prema van Hieleovoj teoriji od učenika na višim razinama, dok sljedećim zadacima želimo razdvojiti učenike koji su u mogućnosti kategorizirati i zaključuju da su i kvadrati pravokutnici i da pravokutnici nisu kvadrati. Prema van Hieleu takvi se učenici nalaze na razini neformalne dedukcije – kategorizacije. Dijagram na slici 9 Prikazuje postotak učenika koji kategorizira i kvadrate kao pravokutnike. U svakom uzrastu ispitivanih učenika postoje takvi učenici, ali se radi o malom udjelu, dok znatnije odstupanje postoji u četvrtom razredu, no još uvijek se radi o malom broju učenika.



Slika 9 – Učenici koji kategoriziraju kvadrate kao pravokutnike

Nasuprot niskim postocima učenika koji ne smještaju kvadrate u kategoriju pravokutnika, visok je udio učenika koji pod kvadrate neće smjestiti pravokutnike (slika 10). Uzevši u obzir i jedne i druge rezultate, možemo zaključiti da većina učenika u nižim razredima osnovne škole ne kategorizira pravokutnike i kvadrate u skupinu zajedničkih obilježja, već ih razdvaja.



Slika 10 – Učenici koji prepoznaju sve kvadrate i razdvajaju ih od pravokutnika

Posljednji zadatak ukazuje na asocijacije koje učenici imaju o pojedinim geometrijskim likovima, što može predstavljati smjernice učiteljima u radu s djecom. Tako romb i deltoid asocira učenike na dijamant, zmaja ili kvadrat, trapez na vazu, čašu ili trokut, trokut na kornet ili piramidu, a rotirani kvadrat na prometni znak ili kocku.

5. Zaključak

Prema prikazanim rezultatima možemo zaključiti da učenici kroz niže razrede osnovne škole napreduju u razvoju geometrijskog mišljenja prema van Hieleovim razinama. Stoga možemo pretpostaviti da se kroz nastavu matematike učenicima nude aktivnosti koje potiču njihov razvoj. Iako napredak postoji, moguće je primijetiti da postoji raskorak u percipiranju pravokutnika i kvadrata od percepcije trokuta. Učenici puno više griješe kad im se postavi zadatak klasificiranja trokuta od zadatka percepcije i klasifikacije četverokuta. Također, rezultati nam pokazuju da nije moguće strogo odrediti granicu niti trenutak kada je pojedini učenik s razine vizualizacije prešao na razinu analize. Takav prelaz postupan je i djelomičan. Iako sadržaji nastave matematike u četvrtom razredu podrazumijevaju analizu trokuta, kvadrata i pravokutnika, učenici pokazuju bolji uspjeh u analiziranju pravokutnika i kvadrata od analiziranja trokuta. Svakako se nameće pitanje uzroka takvoj selekciji: zašto su učenicima kvadrati i pravokutnici bliži od trokuta? Prema Nastavnom planu i programu za osnovne škole, od učenika se očekuje kategorizacija četverokuta tek u šestom razredu, tako da nije neobičan rezultat našeg istraživanja koje ukazuje na mali broj učenika koji su dostigli razinu neformalne dedukcije, i to samo u jednom njezinu dijelu, koji im je moguć prema znanjima koje posjeduju na razini nižih razreda osnovne škole.

Zaključit ćemo potvrdom hipoteze prema kojoj učenici nižih razreda osnovne škole s godinama napreduju kroz razine geometrijskog mišljenja. Postoji samo eventualna diskusija o tome napreduje li dovoljan broj učenika, jer svakako se pokazalo da jedan dio učenika nema razvijeno geometrijsko mišljenje niti na osnovnoj razini.

Literatura

1. Burger, W. F.; Shaughnessy, J. M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 17, no. 1, 31 – 48.
2. Čižmešija, A.; Svedec R.; Radović, N.; Soucie, T. (2010): Geometrijsko mišljenje i prostorni zor, *Zbornik radova četvrtog kongresa nastavnika matematike, ŠK, Zagreb.*

3. De Villiers, M. D. (1987): Research Evidence on Hierarchical Thinking, Teaching Strategies and van Hiele Theory: Some Critical Comments, *International RUMEUS report*, no.10, University of Stellenbosch, South Africa.
4. Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988): *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*, National Council of Teachers of Mathematics.
5. Mason, M. (2009): *Professional Handbook for Teachers. Geometry: Explorations and Applications*, McDougal Littell.
6. Musser, G. L.; Burger, W. F.; Peterson, B. E. (2007): *Mathematics for elementary Teachers*, John Wiley.
7. Nacionalni okvirni kurikulum (2010) za predškolski odgoj i obrazovanje, te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje. Dostupan na: <<http://public.mzos.hr/fgs.axd?id=18247>>.
8. Nastavni plan i program za osnovnu školu (2006). Dostupan na: <<http://public.mzos.hr/Default.aspx?art=12662>>
9. Razel, M.; Eylon, B.-S. (1991): Developing mathematics readiness in young children with the Agam Program. *Proceedings of the Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Genova, Italy.
10. Senk, Sharon L. (1989): Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20 (3): 309 – 321.
11. Van de Walle, J. (2001): *Geometric Thinking and Geometric Concepts, Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 4th ed., John Wiley.
12. Van Hiele, P. (1999): Developing Geometrical Thinking Through Activities that Begin with Play, *Teaching Children Mathematics*, 310 – 316.
13. Van Hiele, P. M. (1986): *Structure and insight: A theory of mathematics education*, Academic Press.

Helena Vlasović*

Maja Cindrić**

UNDERSTANDING GEOMETRIC TERMS AND THE DEVELOPMENT OF LOWER GRADERS' GEOMETRIC REASONING ACCORDING TO VAN HIELE'S THEORY

Summary: *Van Hiele theory of the development of geometric reasoning presumes a level of student thinking in the field of geometry, which does not depend on the age of students. This paper briefly presents Hiele's theory of the development of geometric reasoning and geometric content through the teaching of mathematics in primary schools, which should lead to the development of students' geometric reasoning. According to Hiele's theory, appropriate activities develop students' geometric reasoning and enable students' progress through levels. The paper presents the survey conducted among 316 students in lower grades of primary school, with the aim to determine whether students make progress according to Hiele's levels in the first four grades of primary school.*

Keywords: *geometric thinking, van Hiele Theory, van Hiele's levels.*

*Helena Vlasović,
magistra primarnog obrazovanja
**dr. sc. Maja Cindrić,
Odjel za izobrazbu učitelja
i odgojitelja,
Sveučilište u Zadru
mcindric@unizd.hr

*Helena Vlasović,
MA of primary education
**Maja Cindrić, PhD
Department for primary and
pre-school education
University of Zadar
mcindric@unizd.hr