

Tihana Škrinjarić, univ. spec. oec.

Asistentica na Katedri za matematiku
Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu
E-mail: tskrinjaric@efzg.hr

Nikola Šostarić

Student
Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

KOMPLEMENTARNOST METODOLOGIJE MARKOVLJEVIH LANACA I MARKOWITZEVA MODELA OPTIMIZACIJE PORTFELJA

UDK / UDC: 336.761

JEL klasifikacija / JEL classification: G11

Pregledni rad / Review

Primljeno / Received: 16. veljače 2014. / February 16, 2014

Prihvaćeno za tisak / Accepted for publishing: 10. lipnja 2014. / June 10, 2014

Sažetak

Analiza portfelja i efikasno ulaganje u iste već je dugi niz desetljeća u središtu pozornosti investitora na različitim financijskim tržištima. Markowitzev model kao najpopularniji koncept moderne teorije portfelja dobro je poznat u domaćoj i stranoj literaturi. S druge strane, metodologija Markovljevih lanaca rijetko je korištena u području investiranja. U domaćoj literaturi ostalaje zanemarena, dok se u stranoj koristi za predviđanje budućih kretanja cijena ili prinosa dionica. Međutim, u literaturi ne postoji poveznica između dva spomenuta pristupa analizi dionica. Ovaj rad prvi je takve naravi, koji rabi rezultate Markovljevih lanaca nad prinosa dionica prilikom optimizacije Markowitzeva modela. Provedena je empirijska analiza 26 dionica Zagrebačke burze za razdoblje od 2. siječnja do 12. studenog 2013. godine. Rezultati ukazuju da, iako je diverzifikacija u Markowitzevom smislu superiornija, uključivanje drugih faktora u analizu moglo bi poboljšati prediktivnu moć same metodologije Markovljevih lanaca.

Ključne riječi: Markovljevi lanci, Markowitzev model, optimizacija portfelja, Zagrebačka burza.

1. UVOD

Upravljanje rizicima i analiza portfelja dugi su niz desetljeća u središtu pozornosti investitora. Koristeći se različitim tehnikama i metodama, pokušavaju se (bar u određenoj mjeri) predviđati buduća kretanja cijena i prinosa različitih vrijednosnica. Na taj način investitori pokušavaju „pobijediti“ tržište, pri čemu su dionice jedna od izazovnijih vrsta vrijednosnica. Markowitzev model (1952) daje odgovor na pitanje kako strukturirati portfelj dionica da bi se ostvarila minimalna razina rizika uz danu razinu očekivanog prinosa portfelja, odnosno kako ostvariti maksimalnu razinu očekivanog prinosa portfelja uz zadanu razinu rizika. Sam je model najpoznatiji dio moderne teorije portfelja već dugi niz desetljeća, dok se u Hrvatskoj popularizira u posljednjem desetljeću. S druge strane, metodologija Markovljevih lanaca u svijetu je rijetko korištena u svrhu predviđanja budućih kretanja cijena ili prinosa dionica. U domaćoj literaturi ostala je u potpunosti zanemarena. Radi se o metodologiji koja nastoji prepoznati nekoliko isključivih stanja određenog procesa te pokušati predvidjeti vjerojatnosti svakog od stanja u kojemu se analizirani proces može nalaziti. Vrlo je jednostavna metodologija, ali su rezultati jasni i izravni. U inozemnoj literaturi Markovljevim lancima se koriste za predviđanje budućih kretanja prinosa dionica, ali se spomenuta metodologija ne povezuje s Markowitzevim modelom. Zbog toga ovaj rad, po prvi puta u svijetu, povezuje dvije spomenute metodologije u nastojanju da ispita njihovu komplementarnost. Pokušat će se dati odgovor na pitanje može li se metodologijom Markovljevih lanaca koristiti kao alatom za unaprjeđenje rezultata optimizacije Markowitzeva modela. Struktura rada je sljedeća. U drugome poglavlju dan je prikaz recentne domaće i inozemne literature koja se bavi spomenutim pojmovima. Nakon toga treće poglavlje prikazuje metodologiju korištenu u ovome radu, u četvrtom su dani rezultati empirijskog istraživanja nad hrvatskim tržištem kapitala. Posljednje, peto poglavlje zaključuje sam rad.

2. PREGLED PRETHODNIH NOVIJIH ISTRAŽIVANJA

Markowitzev model od svojih početaka privlači pažnju mnogih istraživača tijekom 20. i početkom 21. stoljeća. Jednostavnost modela i njegovih rezultata glavni je uzrok velike zastupljenosti u velikom broju stranih, ali i domaćih radova. U nastavku će biti prikazani najznačajniji domaći radovi koji nad hrvatskim tržištem kapitala optimiziraju Markowitzev model. Nakon toga, prikazat će se istraživanja koja su se bavila metodologijom Markovljevih lanaca u području investiranja i samih prinosa dionica. Mogu se donijeti dva osnovna zaključka. Prvi je da se domaća istraživanja uglavnom usmjeravaju na osnovni Markowitzev model, objašnjavanje njegovih sastavnica te provedbu na Zagrebačkoj burzi. Rijetko se pronalaze oni autori koji proširuju osnovni model ili pak testiraju može li se komplementirati s drugim vrstama analize. Drugi zaključak je da se u stranoj literaturi uz pomoć Markovljevih lanaca pokušavaju prognozirati buduće vrijednosti prinosa dionica, ali u dosadašnjim istraživanjima ne postoji poveznica između rezultata Markovljevih lanaca s jedne, te korištenje

tih rezultata prilikom optimizacije Markowitzeva modela s druge strane. Zbog toga se u ostatku rada nakon kratkog pregleda recentnije literature pokušava premostiti spomenuti jaz.

2.1. Domaći radovi

Kao što je spomenuto, domaći radovi većinom se bave Markowitzevim modelom. S druge strane, Markovljevi lanci nisu toliko popularni, barem ne u području analize tržišta kapitala. Jedno od ranijih istraživanja odnosi se na ono Latkovića i Baraca (1999) koji analiziraju problem optimizacije dioničkog portfelja na rubnom tržištu kapitala. U to doba domaće tržište kapitala bilo je tek u formiranju i kao glavni problem istaknuli su malen broj dionica na takvom tržištu, kao i problem nelikvidnosti. Miljan (2002 a, b) se u oba članka bavi testiranjem efikasnosti ulaganja na Zagrebačkoj burzi te EMU tržištima. Zaključke o sve većim korelacijama prinosa na europskim tržištima temeljila je na primjeni Markowitzeva modela. 2004. godine Fruk i Huljak (2004) bave se mogućnošću ulaganja na domaćem tržištu kapitala koristeći se Markowitzevim modelom i modelom procjenjivanja kapitalne imovine. Sljedeće godine Žiković (2005) kombinira Markowitzev model s teorijom igara, s obzirom na turbulencije na tržištu koje mogu uzrokovati velike dobitke, ali i s druge strane dobitke. Uskoro se i na udžbeničkoj razini popularizira sam model. Tako su Tomić-Plazibat, Aljinović i Marasović (2006) dale teorijski prikaz Markowitzevog modela optimizacije portfelja i njegovu primjenu na hrvatskom tržištu kapitala, kao i što su Aljinović, Marasović i Šego (2008, 2011) prikazali model na jednostavan način uz primjere njegovog korištenja u softveru Excel i Matlab. Osnovnim modelom bavio se još Jakšić (2007) koji je primijenio sam model na 11 dionica na Zagrebačkoj burzi, zaključivši kako će ovakve analize postati relevantnije u budućnosti, s obzirom na razvoj samog tržišta kapitala. Sličnu analizu napravili su Briš, Kristek i Mijoč (2008), koji čitatelje upoznaju s osnovama samoga modela (primjenjuju model na akademski primjer od 3 dionice). Marasović i Šego (2006) detaljno razrađuju model uz objašnjenje kako je zbog svoje jednostavnosti i određenih (u radu navedenih) svojstava i dalje vrlo popularan danas.

U posljednjih nekoliko godina osnovna analiza proširuje se dodatnim alatima. Primjerice, Aljinović, Marasović i Tomić-Plazibat (2005) uz originalni model, bave se i višekriterijskim programiranjem kako bi uključile dodatne tržišne uvjete u analizu. Fabac i Mundar (2011), kao i Marasović, Poklepović i Aljinović (2011) bave se povezivanjem tehničke analize s Markowitzevim modelom. Glavno objašnjenje korištenja tehničke analize je da investitore zanima kretanje budućih prinosa i rizika na tržištu kapitala, pri čemu im spomenuta analiza može pomoći. Jerončić i Aljinović (2011) uz ispunjavanje definiranih i postavljenih ograničenja posebnu pozornost pridaju sektorskoj pripadnosti kompanija, odnosno diverzifikaciji portfelja, ne samo dionički nego i sektorski. Analizirali su financijske izvještaje poduzeća koja kotiraju na Zagrebačkoj burzi i

na taj način ostvarili i sektorsku diverzifikaciju. Usporedbom rezultata Markowitzevog modela i metode multivarijatne analize Bahovec i Škrinjarić (2013) su utvrdile da modeli oblikovani uz pomoć multivarijantnih metoda ostvaruju jednako dobre performanse u odnosu prema Markowitzevom modelu. Pri analizi su koristile i određene mjere diverzifikacije. Škrinjarić (2013) je koristila proširen Markowitzev model uključujući treći i četvrti moment distribucija dionica opravdavajući to s teorijskih stajališta i prethodnih empirijskih nalaza o ne-normalnosti distribucija vrijednosnica na tržištima kapitala.

Dani kratki pregled domaćih radova koji koriste Markowitzev model u svojoj analizi pokazuju značajnu popularnost toga modela u domaćim akademskim krugovima. Prednosti su mu jednostavnost i široka primjena, što uvelike pridonosi njegovoj raširenosti. U nastavku slijedi pregled stranih radova koji koriste Markovljeve lance u analizi tržišta kapitala.

2.2. Inozemni radovi

Budući da Markovljevi lanci nisu zastupljeni u domaćim analizama tržišta kapitala, u nastavku slijedi pregled nekoliko inozemnih radova koji primjenjuju tu metodologiju. Autori su u svrhu potrage inozemnih istraživanja za potrebe ovoga članka pronašli svega nekoliko radova. Većinom se odnose na azijska i na američko tržište kapitala, pri čemu se često analiziraju dnevni podaci o kretanjima prinosa dionica te se ponekad ova metodologija koristi za ispitivanje savršenosti tržišta kapitala i mogućnosti predviđanja budućih cijena.

Kako bi ispitali pretpostavku o *random walk* kretanju cijena dionica (hipoteza slučajnog hoda), McQueen i Thorley (1991) u svojem se radu koriste upravo Markovljevim lancima. Razmatrali su dulji period, od 1947. do 1987. godine za NYSE burzu i zaključili da godišnji realni prinosi ipak ne slijede njihovu hipotezu. Koristeći programsku potporu Excela i *Mathematicae*, Svoboda i Lukáš (2001) prikazuju kako prognozirati kretanja cijena dionica za period od 5. siječnja 2004. do 12. prosinca 2009. na Praškoj burzi. Zhang i Zhang (2009) u svojem radu teorijski prikazuju metodu Markovljevih lanaca, a osim toga predočena je i njihova primjena u službi pokušaja prognoziranja kretanja prinosa na kineskom tržištu kapitala. Željeli su prikazati komplementarnost ove metodologije i tehničke analize.

Korištenje ovom metodom u svrhu predviđanja kretanja DJIA indeksa prikazali su Doubleday i Esunge (2011) za 2010. godinu. U njihovu radu ova se metoda pokazala pouzdanom. S druge strane, oprečne rezultate dobili su Mitra i Riggieri (2011) koji su pokušali predvidjeti kretanje cijena dionica Googlea u bližoj budućnosti. Iste godine Vasanthi, Subha i Nambi (2011) rabe ovu metodu za predviđanje kretanja cijena burzovnih indeksa (tržišta stranih Indiji) u kratkom (1 godina), srednjem (3 godine) i dugom (5 godina) roku. Tu metodu su usporedili s rezultatima drugih načina predviđanja i zaključili da Markovljevi

lanci daju bolje rezultate u odnosu prema pomičnim prosjecima ili predviđanju kretanja cijena običnim trendom. Sundberg i Klacksell (2012) u svojem radu rabe ovu metodu za predviđanje kretanja cijena na tržištu kapitala. U radu je dan i kod programa za takvo predviđanje koji je napisan koristeći program Matlab. Međutim, autori zaključuju kako je osim podataka o kretanju indeksa ili cijena dionica potrebno u analizu uključiti i podatke o dividendama, očekivanjima investitora, financijskim izvještajima, itd. Dai, Han i Dai (2014) uspoređuju neuronske mreže i Markovljeve lance kao metode prognoziranja prinosa na kineskom tržištu i zaključuju kako su primjerene za prognoze.

Spomenimo još jednu skupinu autora koji se koriste parametrijskim metodama procjene Markovljevih lanaca u okviru *switching* modela. Pritom se testira postojanje različitih režima na tržištu kapitala (režimi kontinuiranog povećanja cijena ili kontinuiranog smanjivanja). Tu ubrajamo radove Chu i dr. (1994), Schaller i Norden (1997), Nishiyama 1998, Maheu i McCurdyb 2000, Guidolin i Timmerman 2005, 2008, Wang i Theobald 2007, Grobys (2012) itd.

Kao što je vidljivo, metodologija Markovljevih procesa korištena je najviše u svrhe predviđanja kretanja cijena predmeta trgovine na tržištima kapitala. Cilj ovoga rada je povezati optimizaciju Markowitzeva modela i rezultate dobivene koristeći metodologiju Markovljevih lanaca u odabiru efikasnog portfelja.

3. METODOLOGIJA RADA

3.1. Markowitzev model

Razvijen 1952. godine, Markowitzev model (Markowitz 1952) čini temelje moderne teorije portfelja, a izbor optimalnog portfelja temelji na optimizaciji odnosa očekivanog prinosa i pripadnog rizika portfelja. Prema tome, cilj modela je pronaći efikasan portfelj, tj. portfelj koji za danu stopu rizika rezultira najvećom stopom prinosa ili portfelj koji za danu stopu prinosa ostvaruje najmanju stopu rizika (Aljinović, Marasović i Šego 2011.). Pretpostavimo da investitor raspolaže podacima o cijenama $P(i)$ za $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ dionica u posljednjih T razdoblja, temeljem kojih je moguće izračunati prinose $r_i(t)$ svake dionice i u razdoblju t sljedećom formulom:

$$r_i(t) = \ln \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} \right), \quad (1)$$

$$t \in \{1, 2, \dots, T\}.$$

Očekivani prinos dionice i , $E(r_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, računa se kao aritmetička sredina prinosa na tu dionicu $r_i(t)$:

$$E(r_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_i(t), \quad (2)$$

Nadalje, u modelu se koristi rizik pojedinačne dionice mjeran varijancom te kovarijance za svaki par dionica. Varijanca prinosa σ_i^2 za T razdoblja dionice i procjenjuje se formulom

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [r_i(t) - E(r_i)]^2, \quad (3)$$

dok je kovarijanca prinosa između dviju dionica i i j dana izrazom

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_i(t) - E(r_i))(r_j(t) - E(r_j)). \quad (4)$$

Sada je moguće definirati očekivan prinos i varijancu portfelja. Očekivan prinos portfelja $E(r_p)$ definiran je kao ponderirana suma očekivanih prinosa pojedinih dionica:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N \pi_i E(r_i), \quad (5)$$

gdje π_i predstavlja udio i -te dionice u portfelju.

Varijanca portfelja dana je izrazom

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \pi_i \pi_j \sigma_{ij}. \quad (6)$$

Problem optimizacije strukture portfelja matematički definira se kao:

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\pi_i} E(r_p) = \sum_{i=1}^N \pi_i E(r_i) \\ \text{uz ograničenja} \\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \pi_i \pi_j \sigma_{ij} \leq s \\ \sum_{i=1}^N \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{array} \right\} (M)$$

Iz spomenutog zapisa uočava se da želimo maksimizirati očekivani prinos portfelja (funkcija cilja) pri čemu su varijable odlučivanja udjeli pojedinih

dionica (π_i). Problem se još sastoji od $N+2$ ograničenja. Prvo ograničenje odnosi se na maksimalnu razinu rizika koju je investitor spreman preuzeti (s je proizvoljno odabrana razina rizika), drugo se odnosi na sumu udjela dionica u portfelju (zbroy relativnih udjela portfelja π_i mora biti jednak jedan, što znači da samo te i niti jedne druge dionice sačinjavaju portfelj), dok se posljednjim N ograničenjima onemogućava kratka prodaja.

Mijenjanjem vrijednosti proizvoljne konstante s (koja ovisi o samom investitoru) i ponovnom optimizacijom modela, dobivamo portfelje koji pripadaju efikasnoj granici, tj. one portfelje koje za danu razinu rizika daju maksimalni očekivani prinos. Efikasni portfelji su, dakle, oni koji pripadaju dijelu skupa minimalne varijance koje karakterizira bolja diverzifikacija u odnosu prema ostalim portfeljima iz skupa mogućih rješenja. Neke od prednosti ovoga modela jesu njegova (relativno) jednostavna rješivost uz pomoć softwera, ovo je model koji je prvi dao odgovor na pitanje kako balansirati nagradu (očekivan prinos) s jedne, te rizik dionica s druge strane, kao i što omogućava diverzifikaciju portfelja, pojam koji je prije Markowitza bio često spominjan u literaturi, ali ju se nije znalo adekvatno kvantificirati. S druge strane, nedostaci samoga modela očituju se u pretpostavci normalne distribucije prinosa dionica (što u praksi nije čest slučaj), u pretpostavci odsustva transakcijskih troškova, jednakih očekivanja svih investitora na tržištu, i dr.

3.2. Markovljevi lanci

Metodologija Markovljevih lanaca pretpostavlja da se diskretan stohastički proces može nalaziti u n međusobno isključivih stanja S_1, S_2, \dots, S_n . Sam pojam diskretnog stohastičkog procesa definira se kao pravilo određivanja vjerojatnosti da će se određeni sustav nalaziti i -tom stanju u trenutku $t+1$, pri čemu je dana vjerojatnost stanja u kojem se sustav nalazio u prethodnom trenutku. Radi se, dakle, o uvjetnim vjerojatnostima, pri čemu sam Markovljev proces definiramo kao onaj stohastički proces kod kojega vjerojatnost da se sustav nalazi u i -tom stanju u trenutku $t+1$ ovisi samo o vjerojatnosti iz prethodnog perioda (Blume 1994). Drugim riječima, razmatramo li diskretan stohastički proces $\{X_t\}$ kao Markovljev proces, uz danu vrijednost X_t , vrijednosti X_h , $h > t$ ne ovise o vrijednostima X_s , $s < t$ (Tsay 2004):

$$P(X_h | X_t, X_{t-1}, \dots) = P(X_h | X_t), \quad h > t. \quad (7)$$

Vjerojatnost da će sustav prilikom t -tog promatranja nalaziti u i -tom stanju jednaka je i -toj komponenti vektora-retka

$$p_t = p_{t-1} \cdot P, \quad p_0 = p_0^*, \quad (8)$$

gdje je P matrica prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog procesa

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

u kojoj element p_{ij} predstavlja vjerojatnost prelaska sustava iz stanja S_i u trenutku $t-1$ u stanje S_j u trenutku t . Matrica \mathbf{P} još se naziva i matricom prijelaza ili Markovljevom matricom (Šego 1987). Pretpostavlja se da se elementi matrice \mathbf{P} ne mijenjaju tijekom vremena.

\mathbf{p}_t je vektor distribucija vjerojatnosti u trenutku t

$$\mathbf{p}_t = [p_{1t} \quad p_{2t} \quad \cdots \quad p_{nt}], \quad (10)$$

dok je \mathbf{p}_0 vektor inicijalnih distribucija vjerojatnosti

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0^* = [p_{10} \quad p_{20} \quad \cdots \quad p_{n0}]. \quad (11)$$

Matrica prijelaza \mathbf{P} ima sljedeća svojstva. Svaki element ove matrice je negativan i manji ili jednak 1, s obzirom da predstavljaju vjerojatnosti, kao i što suma elemenata matrice u svakome retku mora biti jednaka 1 jer ta suma predstavlja vjerojatnost da će se sustav iz stanja S_i u trenutku t nalaziti u nekom od mogućih n stanja u trenutku t . Formalno, oba svojstva možemo zapisati redom:

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \text{i} \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad \text{za} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (12)$$

Razmotrimo još dugi rok promatranog procesa. Vektor \mathbf{p}^* nazivamo vektor ravnotežnog stanja, ukoliko on zadovoljava jednadžbu:

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^* \mathbf{P}. \quad (13)$$

Dakle, bez obzira na vektor inicijalnih distribucija vjerojatnosti, ako u matrici prijelaznih vjerojatnosti svi elementi zadovoljavaju (12) i fiksni su za svako stanje, vektori \mathbf{p}_t teže fiksnom vektoru \mathbf{p}^* za sve t . Kako bi se izračunalo jedinstveno rješenje jednadžbe (6), potrebno je uzeti u obzir da su komponente vektora ravnotežnog stanja vjerojatnosti, što znači da suma elemenata tog vektora mora biti jednaka 1:

$$\sum_{i=1}^n p_i^* = 1. \quad (14)$$

4. REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Za potrebe empirijskog istraživanja sa stranica Zagrebačke burze (2013) prikupljeni su podaci o kretanju cijena 26 dionica na Zagrebačkoj burzi za razdoblje 2. siječnja 2013. – 12. studenog 2013. godine. Radi se 216 opservacija za svaku odabranu dionicu, pri čemu su korištene dionice navedene u tablici 1. Dionice su odabrane prema kriterijima:

- (1) sačinjavanja indeksa CROBEX ili
- (2) temeljem godišnjih izvještaja Zagrebačke burze odabrane su i najlikvidnije dionice u 2012., odnosno 2013. godini.

Analiza je izvršena uz pomoć Excela i WinQSB-a.

Tablica 1.

Popis dionica korištenih u analizi

Dionica	Naziv poduzeća
ADPL-R-A	AD Plastik d.d. za proizvodnju dijelova i pribora za motorna vozila i proizvoda iz plastičnih masa.
ADRS-R-A	Adris grupa d.d. za upravljanje i ulaganje.
ATGR-R-A	Atlantic Grupa d.d. za unutarnju i vanjsku trgovinu.
ATPL-R-A	Atlantska plovidba d.d.
BLJE-R-A	Belje d.d. za privređivanje u poljodjelstvu, prerađivačkoj industriji i prometu roba.
CROS-R-A	Croatia osiguranje d.d.
DDJH-R-A	Đuro Đaković Holding d.d.
DIOK-R-A	Dioki d.d.
DLKV-R-A	Dalekovod. d.d. za inženjering, proizvodnju i izgradnju.
ERNT-R-A	Ericsson Nikola Tesla d.d. za proizvodnju telekomunikacijskih sustava i uređaja.
HT-R-A	Hrvatski Telekom d.d.
INA-R-A	INA-industrija nafte d.d.
INGR-R-A	Ingra d.d.
JNAF-R-A	Jadranski naftovod d.d.
KOEI-R-A	Končar - elektroindustrija d.d.
KORF-R-A	Valamar Adria Holding d.d. za upravljačke djelatnosti holding-društava.
KRAS-R-A	Kraš, prehrambena industrija, d.d.
LEDO-R-A	Ledo d.d. za proizvodnju i promet sladoleda i smrznute hrane.
LKRI-R-A	Luka Rijeka d.d. za usluge u pomorskom prometu, lučke usluge, skladištenje roba i špediciju.
PBZ-R-A	Privredna banka Zagreb – d.d.
PODR-R-A	Podravka prehrambena industrija d.d.
PTKM-R-A	Petrokemija d.d. tvornica gnojiva.
THNK-R-A	Tehnika d.d. za graditeljstvo, inženjering, proizvodnju i trgovinu
ULPL-R-A	Uljanik Plovidba pomorski promet d.d.
VPIK-R-A	Vukovarski poljoprivredno industrijski kombinat d.d.
ZABA-R-A	Zagrebačka banka d.d.

Izvor: Zagrebačka burza

Temeljem prikupljenih cijena izračunati su prinosi za navedeno razdoblje, prema formuli (1). Kako je bilo potrebno konstruirati vektor inicijalnih distribucija vjerojatnosti, odlučilo se razmotriti ukupno tri stanja prinosa (sustava). Neka je S_1 stanje prinosa u kojemu se oni smanjuju, to stanje odnosi se na situaciju kada su prinosi na dan t u odnosu prema danom $t-1$ manji. Odabrana je granica kada su prinosi manji od 0.5%. Drugo stanje, S_2 , odnosi se na prinose koji se u odnosu prema prethodnom danu nisu promijenili, te ovdje pripadaju prinosi u intervalu $[0.5\%, 0.5\%]$. Konačno, posljednje, treće stanje (S_3) prinosa odnosi se na prinose koji su bili veći u odnosu prema prethodnom danu, te ovdje pripadaju prinosi veći od 0.5%. Odabrana je takva raspodjela intervala jer je razmatranjem svih dionica upravo najveći broj njih imao prinose u intervalu koji karakterizira stanje S_2 , što znači da u tom intervalu nema značajnijih promjena. Potom su za svaku dionicu izračunate vjerojatnosti vektora p_0 . Vjerojatnosti su računane kao relativne frekvencije, pri čemu su u omjer stavljeni broj prinosa koji se nalazio u i -tom stanju i zbroj sva tri moguća stanja prinosa. Primjerice, za dionicu ADPL-R-A izračunat je sljedeći vektor inicijalnih distribucija vjerojatnosti:

$$p_0^{ADPL} = [0.2511 \quad 0.4791 \quad 0.2698],$$

koji se interpretira na sljedeći način: vjerojatnost da su prinosi dionice ADPL bili manji od 0.5% iznosi 0.2511, da su se nalazili u intervalu $[0.5\%, 0.5\%]$ 0.4791 te da su bili veći od 0.5% iznosi 0.2698. Analogno su izračunati te se mogu interpretirati vektori inicijalne distribucije vjerojatnosti za ostale dionice. Potom su za svaku od dionica izračunate matrice prijelaznih vjerojatnosti. Svaki element računat je također kao relativna frekvencija, pri čemu je element p_{ij} izračunat kao omjer broja prelazaka prinosa iz i -tog u j -to stanje i broja prinosa u i -tom stanju. Uzmemo li ponovno primjer dionice ADPL, matrica prijelaznih vjerojatnosti jest

$$P^{ADPL} = \begin{bmatrix} 0.2453 & 0.4340 & 0.3208 \\ 0.2233 & 0.5728 & 0.2039 \\ 0.3103 & 0.3621 & 0.3276 \end{bmatrix}.$$

Kao i u slučaju vektora p_0 , i matrica P je na analogan način izračunata za sve ostale dionice. Temeljem spomenutog vektora i matrice izračunat je vektor distribucija vjerojatnosti za sve dionice u analizi temeljem relacije (1), te vektor ravnotežnog stanja. Rezultati su prikazani u tablici 2.

Tablica 2.

Vektor distribucija vjerojatnosti u prvom idućem periodu i vektor ravnotežnog stanja, za svaku od razmatranih dionica

Dionica	Vektor	S_1	S_2	S_3
ADPL	p_1	0,2523	0,4811	0,2666
	p^*	0,252	0,4817	0,2663
ADRS	p_1	0,1959	0,5937	0,2104
	p^*	0,1957	0,5938	0,2104
ATGR	p_1	0,3219	0,3649	0,3132
	p^*	0,3212	0,3653	0,3135
ATPL	p_1	0,3834	0,2288	0,3878
	p^*	0,3834	0,2287	0,3879
BLJE	p_1	0,4018	0,2757	0,3225
	p^*	0,4019	0,2757	0,3224
CROS	p_1	0,4018	0,2757	0,3225
	p^*	0,4019	0,2757	0,3224
DDJH	p_1	0,4541	0,2193	0,3266
	p^*	0,4533	0,2196	0,3271
DIOK	p_1	0,4202	0,1683	0,4115
	p^*	0,4205	0,1682	0,4112
DLKV	p_1	0,5233	0,1075	0,3692
	p^*	0,5234	0,1075	0,3691
ERNT	p_1	0,2755	0,4534	0,2711
	p^*	0,2755	0,4532	0,2713
HT	p_1	0,2197	0,6077	0,1727
	p^*	0,2196	0,6075	0,1729
INA	p_1	0,3221	0,3787	0,2992
	p^*	0,3227	0,3785	0,2987
INGR	p_1	0,4676	0,14	0,3924
	p^*	0,4673	0,1402	0,3926
JNAF	p_1	0,1354	0,7292	0,1354
	p^*	0,1353	0,73	0,1348
KOEI	p_1	0,2894	0,4254	0,2852
	p^*	0,2897	0,4253	0,285
KORF	p_1	0,2852	0,3829	0,3319
	p^*	0,2854	0,3824	0,3323

Izvor: izračun autora

Analiziranjem tablice 2 zaključilo se kako je u najvećem broju slučajeva najveća vjerojatnost da će se prinosi nalaziti u stanju S_2 . Kako bi se uvidjela komplementarnost metodologije Markovljevih lanaca i Markowitzeva modela učinjeni su sljedeći koraci. Najprije je razmotrena tablica 2 kako bi se donijela odluka u koje dionice bi potencijalni investitor mogao uložiti tako da se odaberu one dionice s vjerojatnošću za stanje S_3 veće od vjerojatnosti za stanje S_1 . Potom je nad izdvojenim dionicama izvršena optimizacija dva modela uz pomoć Markowitzeva modela. Prvi model optimiziran je na način da su odabrani veći udjeli onih dionica koje imaju veću vjerojatnost nastupa trećeg stanja, dok je drugi model optimiziran tako da je u procesu same optimizacije varijabla odlučivanja udio pojedine dionice. Nakon toga je nad skupom svih dionica razmatranih u analizi proveden inicijalni Markowitzev model bez dodatne analize prije. Rezultati su dani u nastavku.

Prema kriteriju veće vjerojatnosti trećega stanja u odnosu prema prvom izdvojenom su sljedeće dionice: ADPL, ADRS, ATPL, KORF i LEDO. Od svih razmatranih dionica jedino ovih pet zadovoljavaju spomenuti kriterij. Potom je provedena optimizacija dva modela. Prvi u kojemu su odabrani veći udjeli onih dionica koje imaju veće vjerojatnosti trećega stanja nazvan je Markovljev 1, dok je drugi model, u kojemu su varijable odlučivanja udjeli pojedinih dionica, nazvan Markovljev 2. Konačno, optimiziran je Markowitzev model nad svih 26 dionica. Kako bi rezultati bili usporedivi, svi modeli optimizirani su na jednakoj razini rizika. Na taj način olakšava se usporedba samog očekivanog prinosa. Rezultati optimizacije sva tri modela dani su u tablici 3.

Tablica 3.

Rezultati optimizacije tri modela

Portfelj	Očekivan prinos portfelja	Varijanca portfelja
Markovljev 1	0,1182%	0,010092
Markowitz	0,1354%	0,010092
Markovljev 2	0,1273%	0,010092

Izvor: izračun autora

Promatrajući tablicu 3 može se zaključiti kako je ipak originalni Markowitzev model ostvario najbolje rezultate za investitora u pogledu očekivanoga prinosa portfelja. Kako bi se dobio uvid u uzroke razlika među portfeljima, analizirana je i struktura sva tri portfelja, koja je dana u tablici 4.

Tablica 4.

Struktura optimizirana tri portfelja

Portfelj	ADPL	ADRS	ATGR	ATPL	KORF	LEDO
Markovljev 1	0,1864	0,1471	-	0,2711	0,2321	0,1633
Markowitz	0,2432	-	0,2025	0,2218	0,3324	-
Markovljev 2	0,3787	0,0361	-	0,2095	0,3455	0,0303

Izvor: izračun autora

Tablica 4 omogućila je objašnjenje razlika u očekivanim prinosima analiziranih portfelja. Dok se Markovljev 1 portfelj značajnije razlikuje u samoj strukturi u odnosu prema Markowitzevom modelu (primjerice: dionica ADRS čini 14.71% Markovljeva 1 portfelja, ona uopće ne ulazi u strukturu Markowitzeva modela te 16.33% dionice LEDO u prvome u odnosu prema potonjem portfelju), nešto su manje razlike Markovljeva 2 i Markowitzeva portfelja. S obzirom da je sličnija struktura posljednja dva spomenuta portfelja, tako je i razlika između očekivanih prinosa manja između njih. Konačno, može se zaključiti kako je ipak diverzifikacija te ostvarivanje efikasnog portfelja u Markowitzevom smislu superiornija u odnosu prema predviđanju Markovljevim procesima na tržištima kapitala, bar u razmatranom razdoblju i za odabrani skup dionica. Ipak, analiza uz pomoć Markovljevih procesa ukazala je na dobar dio strukture samog Markowitzeva modela. Zbog toga bi uključivanje nekih drugih faktora u analizu moglo poboljšati prediktivnu moć same metodologije Markovljevih lanaca.

5. ZAKLJUČAK

U želji da ostvare što veći prinos uz što manji rizik na tržištima kapitala, investitori koriste različite metode i tehnike modeliranja i predviđanja budućih kretanja cijena i/ili prinosa. Ovaj rad prikazuje Markowitzev model i metodu Markovljevih lanaca teorijski i empirijski, zasebno i kao komplementarne metode u pokušaju pronalazjenja efikasnog portfelja. Naime, u dosadašnjoj literaturi nije pronađeno nijedno istraživanje koje bi povezalno dvije spomenute metodologije. U ovome radu promatrano je 26 dionica Zagrebačke burze u razdoblju od 2. siječnja 2013. do 12. studenog 2013. godine, kako bi se utvrdilo mogu li se rezultati Markovljevih lanaca koristiti kao smjernica za oblikovanje Markowitzeva portfelja.

Nad dionicama izvršena je optimizacija tri modela. Jedan je osnovni Markowitzev model nad cijelim skupom razmatranih dionica. Druga dva modela

optimizirana su također uz pomoć Markowitzeva modela, ali su kao ulazni podaci korišteni rezultati dobiveni metodologijom Markovljevih lanaca. Prvi model optimiziran je tako da su odabrani veći udjeli onih dionica koje imaju veću vjerojatnost nastupa trećeg stanja, dok je drugi model optimiziran tako da je u procesu same optimizacije varijabla odlučivanja udio pojedine dionice. Markowitzev originalni model dao je najbolje rezultate, tj. najveći očekivani prinos za istu razinu rizika u odnosu prema druga dva portfelja. Daljnjom usporedbom dobivenih portfelja zaključeno je da mala razlika u očekivanim prinosima portfelja Markowitza i jednog od preostala dva modela proizlaze iz njihove slične strukture. Ovaj rad pokazuje da je Markowitzev model, barem u razmatranom primjeru, bolji u pronalaženju efikasnog portfelja u odnosu prema Markovljevim lancima. Međutim, rezultati Markovljevih lanaca pokazali su strukturu Markowitzeva modela, što znači da, uz pretpostavku o važnosti prinosa i rizika za analizu metodologija Markovljevih lanaca, može biti relativno uspješna u davanju smjernica za optimizaciju Markowitzeva modela.

Ograničenja samoga rada očituju se u ograničenjima domaćega tržišta kapitala u pogledu nelikvidnosti koja ograničava i sužava sam odabir dionica u model, kao i jednoj od pretpostavki Markovljevih lanaca o nepromjenjivoj strukturi matrice prijelaznih vjerojatnosti. Tržišta kapitala znaju biti izuzetno turbulentna, zato se analiza usmjerila na predviđanje, tj. prognoziranje samo jednog idućeg razdoblja stanja prinosa. Nadalje, optimizacija je vršena uzimajući u obzir samo očekivani prinos i rizik. Posljednjih godina nadopunjuje se originalni Markowitzev model i drugim kriterijima koji su bitni za investitore. Zbog toga se preporuke za daljnja istraživanja ovakve naravi očituju u revidiranju samog Markowitzeva modela, ali i u predviđanju da se uz pomoć Markovljevih lanaca usmjeri i na druge investitoru relevantne pojmove. Konačno, rezultati dobiveni temeljem metodologije Markovljevih lanaca ipak su u dobroj mjeri ukazali na strukturu Markowitzeva modela. Zato bi uključivanje već spomenutih relevantnih faktora u analizu moglo poboljšati prediktivnu moć Markovljevih lanaca. Kako u današnje doba ne postoje računalne prepreke ovakvoj vrsti analize, za očekivati je da će ovakve analize biti od većeg značaja u budućnosti.

LITERATURA

Aljinović, Z., Marasović, B. Tomić-Plazibat, N. (2005) Multi-criterion approach versus Markowitz in selection of the optimal portfolio, Proceedings of the 8th International Symposium on Operational Research, Ljubljana: 261-266.

Aljinović, Z., Marasović, B., Šego, B. (2008), Financijsko modeliranje, Zgombić & partneri, Zagreb.

Aljinović, Z., Marasović, B., Šego, B. (2011), Financijsko modeliranje, drugo izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Ekonomski fakultet u Splitu, Split.

Bahovec, V., Škrinjarić, T. (2013), Mogućnosti optimizacije portfelja na Zagrebačkoj burzi uz pomoć odabranih metoda multivarijantne analize, *Ekonomski pregled*, Vol.64, No. 1, pp. 3-29.

Briš, M., Kristek, I., Mijoč, I. (2008) „Election of optimal portfolio by use of risk diverzifikaton method, *Interdisciplinary management research IV*, Faculty of Economics in Osijek, Osijek: 329-343.

Chu, C. S. J., Santoni, G. J., Liu, T. (1996) „Stock market volatility and regime shift in return“, *Information Science*, 94: 179-190.

Dai, Y., Han, D., Dai, W. (2014) Modeling and Computing of Stock Index Forecasting Based on Neural Network and Markov Chain, *The Scientific World Journal*, Vol. 2014, pp. 1-10.

Doubleday, K., Esunge, J. (2011), Application of Markov Chains to Stock Trends, *Journal of Mathematics and Statistics* 7 (2), pp. 103-106.

Fruk M., Huljak, I. (2004), Testiranje Sharpe-Lintnerova modela na Zagrebačkoj burzi, *Financijska teorija i praksa* (1332-3970) 28 (2004), 1, pp. 77-91.

Grobys, K. (2012) Have bull and bear markets changed over time? Empirical evidence from the US-stock market, *Journal of Finance and Investment Analysis*, Vol. 1, Issue 1, pp. 151-171.

Guidolin, M., A. Timmermann. (2005) „Economic Implications of Bull and Bear Regimes in UK Stock and Bond Returns“, *The Economic Journal*, 115: 111-143.

Guidolin, M., and A. Timmermann (2008) „International Asset Allocation under Regime Switching Skew, and Kurtosis Preferences“, *Review of Financial Studies*, 21(2): 889-935.

Jakšić, S. (2007), Primjena Markowitzve teorije na tržište dionica Zagrebačke burze, *Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu*, Vol.5, No.1, pp. 331-344.

Jerončić, M., Aljinović, Z. (2011), Formiranje optimalnog portfelja pomoću Markowitzevog modela uz sektorsku podjelu kompanija, *Ekonomski pregled*, Vol.62, No. 9-10, pp. 583-606.

Latković, M., Barac, Z. (1999), Optimizacija dioničkih portfelja na rubnim tržištima kapitala, preprint, Sveučilište u Zagrebu.

Maheu, J. M., McCurdy, T. H. (2000) „Identifying Bull and Bear markets in stock returns“, *Journal of Business and Economic Statistics* 18: 100-112.

Marasović, B., Šego, B. (2006) Markowitzev model optimizacije portfelja, *Računovodstvo i financije*, LII (2006): 57-61.

Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

McQueen, G., Thorley, S. (1991), Are Stock Returns Predictable? A Test Using Markov Chains, *The Journal of Finance*, Volume 46, Issue 1, pp. 239-263.

Miljan, I. (2002), Ocjena efikasnosti ulaganja u indeks Zagrebačke burze prema MPT modelu, *Ekonomska istraživanja* (1331-677X), 15, 2, pp. 33-41.

Miljan, I. (2002a) Ocjena efikasnosti ulaganja u indeks Zagrebačke burze prema MPT modelu, *Ekonomski istraživanja*, Vol. 15, No. 3: 33-41.

Miljan, I. (2002b) International portfolio management – The case of Croatian and EMU stock markets, *International Conference on Globalization and Entrepreneurship: Fears, Challenges and Opportunities / Krbec, Denisa (ur.)*. - Zagreb : FET , 2002.: 372-378.

Mitra, S., Riggieri, M. (2011), *Predicting Stock Prices*, Project Report, Faculty of the Worcester polytechnic institute.

Nishiyama, K. (1998) „Some evidence of regime shifts in international stock markets“, *Managerial Finance*, 24(4): 30-55.

Schaller, H., Norden, S. (1997) „Regime switching in stock market returns“, *Applied Financial Economics*, 7: 177-192.

Sundberg, J., Klacksell, G. (2012), *Markov chain - Can you describe the stock index with a Markov chain?*, KTH Royal Institute of Technology at Campus Valhallavägen.

Svoboda, M., Lukáš, L. (2012) Application of Markov Chain analysis to trend prediction of stock indices, In: RAMÍK, J. and STAVÁREK, D. (eds.) *Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics*. Karviná: Silesian University, School of Business Administration, 2012, pp. 848-853.

Škrinjarić, T. (2013) Portfolio Selection with Higher Moments and Application on Zagreb Stock Exchange, *Zagreb International Review of Economics & Business*, Vol. XVI, No 1., pp. 65-78.

Tomić-Plazibat, N., Aljinović, Z., Marasović, B. (2006), *Matematički modeli u financijskom upravljanju*, Ekonomski fakultet Split.

Tsay, R. S. (2004) *Analysis of Financial Time Series*, 2nd edition, Wiley-interscience, USA.

Vasanthi, S., Subha, M., Nambi, S. (2011), *An Empirical Study on Stock Index Trend Prediction Using Markov Chain Analysis*, JBFSIR, Vol. 1, Issue 1, pp. 72-91.

Wang P., Theobald M. (2007) „Regime switching volatility of six East Asian emerging markets“, *Research in International Business and Finance* (22): 267-283.

Zagrebačka burza, *Godišnji (2012) i polugodišnji izvještaj za 2013. godinu*, <http://www.zse.hr> [pristupljeno 15. prosinca 2013.]

Zagrebačka burza, <http://www.zse.hr> [pristupljeno 15. prosinca 2013.]

Zhang, D., Zhang, X. (2009), *Study on Forecasting the Stock Market Trend Based on Stochastic Analysis Method*, *International Journal of Business Management*, Vol. 4, No. 6, pp. 163-170.

Žiković, S. (2005), *Formiranje optimalnog portfolija hrvatskih dionica i mjerenje tržišnog rizika primjenom VaR metode*, magistarski rad, Ekonomski fakultet Ljubljana.

Tihana Škrinjaric, univ. spec. oec.

Assistant, Department of Mathematics
Faculty of Economics and Business, University of Zagreb
E-mail: tskrinjaric@efzg.hr

Nikola Šostarić

Student
Faculty of Economics and Business, University of Zagreb

**THE COMPLEMENTARITY OF MARKOV CHAINS
METHODOLOGY AND MARKOWITZ PORTFOLIO
OPTIMIZATION MODEL*****Abstract***

Portfolio analysis and efficient investing have been in the center of attention of many investors for decades. The Markowitz model is the most famous concept of the Modern Portfolio Theory and it is very known both in domestic and foreign research. On the other hand, the Markov chain methodology is rarely used in the field of investing. Domestic research has neglected the aforementioned methodology, whilst the foreign research uses Markov chains in order to predict future movements of stock prices or returns. However, a link between two mentioned approaches to stock price (return) analysis does not exist. This paper is the first in this field, because it uses the results from Markov chain modeling while optimizing Markowitz model. An empirical analysis was performed on 26 stocks from the Zagreb Stock Exchange. The results show that although the diversification in terms of Markowitz is superior, the inclusion of other factors in analysis could enhance the predictive power of Markov chains methodology.

Keywords: Markov chains, Markowitz model, portfolio optimization, Zagreb Stock Exchange.

JEL classification: G11

