

Tihana Škrinjarić*
Vedran Kojić**

UDK 336.764:303.733.4
JEL Classification G23, C61
Izvorni znanstveni članak

MODELIRANJE PRINOSA DIONICA NA ZAGREBAČKOJ BURZI POMOĆU MARKOVLJEVIH LANACA

Rad ilustrira primjenu metodologije Markovljevih lanaca u predviđanju prinosa dionica na Zagrebačkoj burzi. U usporedbi s drugim matematičkim i ekonometrijskim alatima, Markovljevi lanci predstavljaju jednostavnu i ne-parametrijsku metodologiju koja nije još dovoljno istražena i primijenjena u modeliranju prinosa. Stoga ovaj rad ima za cilj po prvi puta u domaćoj literaturi opisati primjenu metodologije Markovljevih lanaca na podacima sa Zagrebačke burze, te postaviti smjernice za slična buduća istraživanja.

Ključne riječi: Markovljevi lanci, tržište dionicama, Zagrebačka burza, prinosi.

1. Uvod

Investitori na tržištima kapitala služe se različitim tehnikama, metodama i modelima da bi pokušali predvidjeti buduća kretanja na tržištu. Na taj način pokušavaju „pobijediti“ tržište kako bi svoja ograničena financijska sredstva iskoristili na najbolji mogući način. U posljednjih nekoliko desetljeća razvijeno je mnogo matematičkih i statističkih modela, tehnika i postupaka u svrhu predviđanja pri-

* T. Škrinjarić, univ. spec. oec., asistentica, Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet - Zagreb, Katedra za matematiku. (E-mail: tskrinjaric@efzg.hr).

** V. Kojić, univ. spec. oec., asistent, Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet - Zagreb, Katedra za matematiku. (E-mail: vkojic@efzg.hr).

Rad je primljen u uredništvo 27. 01. 2014., a prihvaćen je za objavu 19. 05. 2014.

nosa dionica. Mnogi od njih su komplicirani i zahtijevaju širok spektar znanja iz različitih područja matematike ili ekonometrije. U ovome radu koristi se drugačiji pristup. Primjenjuje se metodologija Markovljevih lanaca kako bi se identificiralo nekoliko stanja u kojima se mogu nalaziti prinosi dionica i tako predvidjeti u kojem će se oni stanju nalaziti u budućih nekoliko razdoblja. Spomenuta metodologija je vrlo jednostavna, ali korisna, s obzirom na njenu prednost da nije parametrijska. Analizirat će se podaci o prinosu na indeks CROBEX, službeni indeks Zagrebačke burze za razdoblje od 4. siječnja 2010. do 11. listopada 2013. godine. Prema saznanjima autora, u svijetu postoji mali broj radova koji primjenjuju neparametrijsku metodologiju Markovljevih lanaca u ovome području, pri čemu je ovo prvi rad ovakve naravi u Hrvatskoj. Stoga se autori nadaju da ovakav pristup analizi kretanja prinosa na tržištu daje određen doprinos području investiranja na tržištima kapitala zbog svoje jednostavnosti i izravnih rezultata. Rad je organiziran na sljedeći način. Drugo poglavlje daje prikaz dosadašnjih istraživanja koja se bave modeliranjem prinosa i Markovljevim lancima u financijama. U trećem poglavlju prikazuje se primijenjena metodologija u radu, dok je empirijska analiza izvršena u četvrtom. Zaključak je dan u posljednjem, petom poglavlju.

2. Pregled prethodne literature

Osnovni zaključak koji se može donijeti temeljem istraživanja prethodnih radova za potrebe ovoga jest da je prisutan mali broj radova koji primjenjuju metodologiju Markovljevih lanaca u području financija i prinosa dionica. Postojeći radovi analizirali su razvijenija tržišta kapitala (npr. DJIA indeks), ali i tržišta u razvoju (npr. Nigerijska burza). Općenito govoreći, prethodna istraživanja kretanja prinosa dionica mogu se ugrubo svrstati u dvije skupine. Prva skupina pokušava modelirati i predviđati kretanje prinosa dionica temeljem ekonometrijskih parametarskih metoda i tehnika. Druga skupina se odnosi na neparametarski pristup koji je ujedno korišten u ovome radu.

U prvu skupinu ubrajamo ona istraživanja koja povezuju tržišni indeks i njegov prinos sa makroekonomskim varijablama, pri čemu se istražuje utjecaj različitih sektora gospodarstva na kretanja na tržištu kapitala (vidjeti, primjerice, Vizek i Dadić 2006., Benazić 2008., Barbić i Čondić-Jurkić 2011., Hsiao 2011., Jakšić 2008. itd.). Dakle, pomoću regresijske analize ili vektorske kointegracije različiti autori žele ustvrditi mogu li predviđati prinose ili same cijene dionica pomoću kretanja realnih makroekonomskih varijabli. Ovakav pristup je vjerojatno najčešći u literaturi, zbog popularnosti različitih teorijskih modela procjenjivanja kapitalne imovine. Stoga su prethodni radovi navedeni samo za domaće tržište kapitala.

Nadalje, učestala su i istraživanja u kojima se primjenjuje familija GARCH (engl. *Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) modela, najčešće za dnevne podatke kretanja prinosa dionica. Radi se o modelima koji modeliraju jednadžbu prosjeka, ali i jednadžbu varijance (vidjeti Živković 2008., Šego i Škrinjarić 2012., Arnerić i Erjavec 2010., Erjavec i Cota 2007., itd.). Ovdje su također navedeni neki od radova koji modeliraju prinose na hrvatskom tržištu kapitala, s obzirom na velik obujam međunarodne literature i empirijskih istraživanja svjetskih tržišta kapitala. Spomenuti pristup izuzetno je popularan u posljednjih desetak godina, pri čemu se može uočiti eksplozivan porast različitih modela kojima se pokušava modelirati varijanca, odnosno rizik dionica. Nadalje, pojavljuju se i istraživanja koja povezuju cijene dionica s uspješnosti poslovanja poduzeća (Ramljak i Anić-Antić 2010.). Konačno, relevantna su i istraživanja koja parametrijskim metodama procjenjuju *switching* modele Markovljevih lanaca kako bi ispitati postojanje različitih režima na tržištima kapitala. Na taj način mogu ispitati postojanje tzv. bikova i medvjeda tržišta ili učinke financijske krize na kretanje prinosa i/ili varijance (vidjeti Chu i dr. 1994., Dueker 1994., Schaller i Norden 1997., Nishiyama 1998., Guidolin i Timmerman 2005., 2008., Wang i Theobald 2007., Maheu i McCurdyb 2000. su samo neki od najznačajnijih). Posljednjih nekoliko godina uočava se trend značajnog porasta modeliranja prinosa na burzama pomoću ove metodologije. Ova potonja skupina autora često uključuje i GARCH modele u *switching* modele, jer se uočava kako se na taj način poboljšava prediktivna moć.

Druga skupina istraživanja među koje pripada i ovo, koristi metodologiju Markovljevih lanaca kako bi se ispitala hipoteza slučajnog hoda na tržištima kapitala, ili pokušala predvidjeti kretanja prinosa. U domaćoj literaturi ne postoji niti jedno istraživanje koje pokušava ovim pristupom modelirati prinose na Zagrebačkoj burzi. Stoga će u ostatku poglavlja više riječi biti posvećeno rezultatima analize istraživanja koja se provode za različita svjetska tržišta kapitala. Tako 1991. godine McQueen i Thorley (1991.) među prvima koriste spomenutu metodologiju kako bi definirali dva stanja prinosa kroz višegodišnje razdoblje i utvrđuju da prinosi dionica ne slijede hipotezu slučajnog hoda. Doubleday i Esung (2011.) analiziraju Dow Jones Industrial Average (DJIA) indeks za 253 radna dana u 2010. godini. Pri tom razvijaju tri strategije. Prva se odnosi na jednostavno stanje sustava, u kojemu prinosi mogu biti veći ili manji jedan dan u odnosu na prethodni. Druge dvije strategije uključuju male, umjerene i velike promjene u prinosima. Preporučili su da temeljem rezultata njihove analize (potencijalni) investitori mogu prilagoditi svoje investicijske strategije tako da mogu ostvariti stabilan porast vrijednosti svog tržišnog portfelja. Agwuegbo, Adewole i Maduegbuna (2010) bave se nigerijskom burzom. Koristeći se Markovljevim lancima, pokušavaju testirati hipotezu slučajnog hoda za 60 izlistanih dionica. U svome radu ne navode vremensko razdoblje koje su analizirali, ali zaključuju temeljem rezultata kako cijene dionica slijede slučajan

hod na burzi. Stoga posjedovanje informacija o prošlim kretanjima prinosa dionica ne doprinosi saznanju o kretanju prinosa u budućnosti.

Svoboda i Lukáš (2012) koriste dnevne podatke o zaključnim cijenama na praškom tržištu kapitala za razdoblje od 5. siječnja 2004. do 12. prosinca 2009. godine kako bi ispitali mogu li predviđati buduća kretanja pomoću Markovljevih lanaca. Kao i Doubleday i Esung, najprije razlikuju dva stanja kretanja prinosa: veći su ili manji u odnosu na prethodni dan. Nakon toga definiraju osam stanja kao realističniju reprezentaciju kretanja prinosa na burzi. Grafički prikazuju i analiziraju kretanja vjerojatnosti nalaženja prinosa u nekome od spomenutih stanja te komentiraju kako primijeniti ovu vrstu analize u *software*-u Mathematica. Kilic (2005.) je detaljno analizirao istambulsko tržište kapitala (Istanbul Stock Exchange) za razdoblje od 17 godina. Želi testirati hipotezu slučajnog hoda, pri čemu je definirao četiri stanja sustava (kretanja prinosa). Rezultati analize su uputili da sustav vrlo brzo dolazi u ravnotežno stanje, već nakon pet radnih dana. Pokazao je kako cijene na tržištu kapitala slijede slučajan hod i zato korištenje tehničke analize nije od koristi.

Kao što je već spomenuto, postoji mali broj radova koji primjenjuju neparametrijski pristup modeliranju Markovljevih lanaca u području investiranja na tržištima kapitala, pri čemu većina nastaje tek u posljednjih nekoliko godina. Stoga postoji prostor za daljnje istraživanje kako stranih, tako i domaćeg tržišta kapitala.

3. Metodologija rada

U ovom radu promatramo proces, odnosno dinamički sistem, u određenom vremenskom razdoblju. Sistem se u svakom trenutku promatranja može nalaziti u jednom i samo jednom od n mogućih stanja S_1, S_2, \dots, S_n . U skladu s tim, u nastavku se definira pojam Markovljevog lanca.

Diskretan stohastički proces je pravilo kojim je određena vjerojatnost da će promatrani sistem biti u i -tom stanju u trenutku $t+1$, uz dane vjerojatnosti da se sistem nalazio u različitim stanjima za vrijeme prošlih perioda. Ta vjerojatnost može, općenito, ovisiti o cjelokupnom ponašanju sistema u prošlosti, odnosno o stanjima u kojima se sistem nalazio u prvom, drugom, ..., te t -tom periodu. U slučaju kada vjerojatnost da se sistem nalazi u bilo kojem i -tom stanju u trenutku $t+1$ ovisi samo o stanju sistema u kojem se nalazio u prethodnom trenutku t , tada se takav stohastički proces naziva Markovljevim procesom. Dakle, kod Markovljevih procesa od značaja je samo informacija iz neposredno prethodnog trenutka (Blume 1994: 616). Diskretan Markovljev proces naziva se još i Markovljev lanac.

Tipičan model Markovljevog lanca ima sljedeću formu:

$$\Pi_t = \mathbf{P}\Pi_{t-1}, \quad \Pi_0 = \Pi_0^*, \quad (1)$$

pri čemu je

$$\Pi_t = \begin{bmatrix} q_{1t} \\ q_{2t} \\ \vdots \\ q_{nt} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$n \times 1$ vektor čije su komponente vjerojatnosti pridružene stanjima modela u trenutku t , vektor

$$\Pi_0 = \Pi_0^* = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ \vdots \\ q_{n0} \end{bmatrix}$$

je inicijalni vektor distribucije vjerojatnosti, dok je \mathbf{P} matrica formata $n \times n$,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

koja sadrži vjerojatnosti prelaska sistema iz jednog (od mogućih) stanja u neko drugo moguće stanje. Uobičajeno se matrica \mathbf{P} naziva *matricom prijelaza* ili *Markovljeva matrica* (vidjeti primjerice Šego 1987:126). Valja istaknuti da se elementi Markovljeve matrice \mathbf{P} ne mijenjaju tijekom vremena. Dakle, i -ta komponenta vektora Π_t , u oznaci q_{it} , predstavlja vjerojatnost da se promatrani sistem u trenutku t nalazi u stanju S_i . Element na mjestu (i, j) matrice \mathbf{P} , u oznaci p_{ij} , predstavlja vjerojatnost da će sistem iz stanja S_i u trenutku $t - 1$ prijeći u stanje S_j u sljedećem periodu t . Nadalje, sljedeća svojstva vrijede za matricu \mathbf{P} :

- $0 \leq p_{ij} \leq 1$ za sve $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, odnosno, svi elementi matrice \mathbf{P} moraju biti nenegativni i manji ili jednaki od 1, budući da predstavljaju vjerojatnosti;

- $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$ za sve $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, budući da $\sum_{i=1}^n p_{ij}$ predstavlja vjerojatnost da će se sistem iz stanja S_j u periodu $t - 1$ morati nalaziti u nekom od n stanja u sljedećem periodu t . Dakle, zbroj elemenata u svakom stupcu matrice \mathbf{P} mora biti jednak 1.

U ovom radu zanima nas stanje u dugom roku promatranog Markovljevog lanca. Vektor $\boldsymbol{\pi}$

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

naziva se *vektor ravnotežnog stanja* za Markovljev lanac ukoliko vrijedi sljedeća formula:

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} . \quad (5)$$

Može se pokazati (vidjeti primjerice Meyer 2000:693) da ukoliko je \mathbf{P} *primitivna matrica*¹, te uz oznaku

$$\mathbf{e} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \quad (6)$$

gdje je \mathbf{e} vektor redak formata $1 \times n$ čiji su svi elementi jednaki 1, tada postoji vektor $\boldsymbol{\pi}$ za kojeg vrijedi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}^k = \boldsymbol{\pi}\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_1 & \dots & \pi_1 \\ \pi_2 & \pi_2 & \dots & \pi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_n & \pi_n & \dots & \pi_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

Nadalje, vektor ravnotežnog stanja $\boldsymbol{\pi}$ je jedinstven, i može se izračunati iz sustava jednadžbi

¹ Matrica \mathbf{P} je primitivna ako zadovoljava Frobeniusov test primitivnosti koji glasi: Matrica s nenegativnim elementima $a_{ij} \geq 0$ je primitivna ako i samo ako je $A^m > 0$ za neki cijeli broj $m > 0$, odnosno ako i samo ako A^m ima sve pozitivne elemente (Meyer 2000:678).

$$\begin{cases} P\pi = \pi \\ e\pi = 1 \end{cases} \quad (8)$$

4. Empirijski rezultati

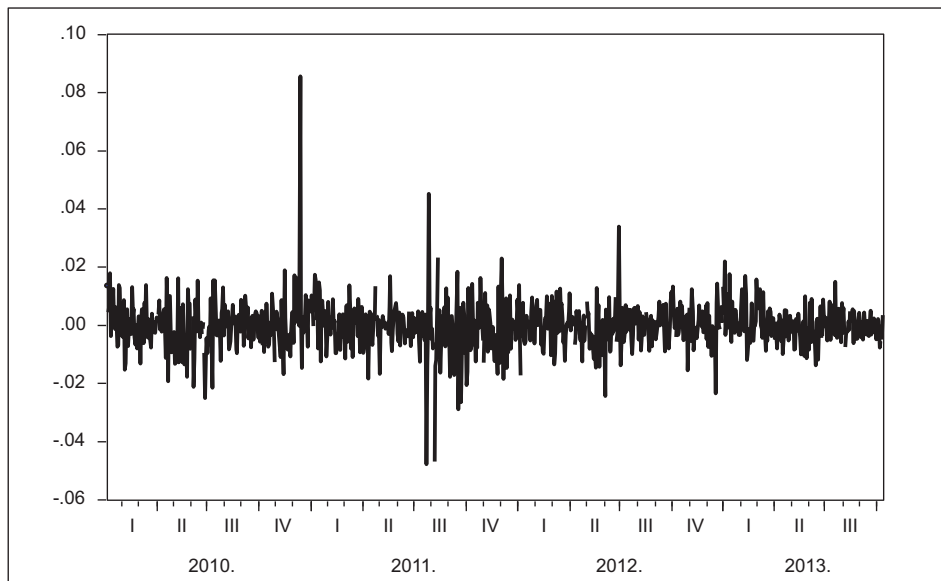
Sa stranica Zagrebačke burze (2013) su preuzeti podaci o kretanju indeksa CROBEX za razdoblje od 4. siječnja 2010. do 11. listopada 2013. godine koji se odnose na 948 opservacija. Pri tom su prinosi izračunani na sljedeći način:

$$r_t = \ln \left(\frac{CROBEX_t}{CROBEX_{t-1}} \right), \quad (9)$$

gdje r_t predstavlja dnevni prinos na indeks, \ln prirodni logaritam, te se $CROBEX_t$ odnosi na vrijednost CROBEX-a na dan t . Analiza je provedena u Microsoft Excelu i Win QSB-u.

Slika 1.

KRETANJE PRINOSA NA CROBEX U RAZDOBLJU 5. SIJEČNJA 2010.
DO 11. LISTOPADA 2013. GODINE



Izvor: izradili autori

Prije same analize, analizirana je osnovna deskriptivna statistika prinosa na CROBEX. Grafikon 1. prikazuje kretanje prinosa na sam indeks u razmatranom razdoblju, dok je u tablici 1. prikazana deskriptivna statistika za analizirani niz podataka. Može se uočiti da je prosječno ostvaren gubitak na sam indeks, uz rizik 0.8%, pri čemu je distribucija analiziranog vremenskog niza desnostrana uz veoma visok koeficijent zaobljenosti.

Tablica 1.

DESKRIPTIVNA ANALIZA PRINOSA NA CROBEX U RAZDOBLJU
5. SIJEČNJA 2010. DO 11. LISTOPADA 2013. GODINE

	PRINOS NA CROBEX
Prosjek	-0.00013
Medijan	-0.00016
Maksimalna vrijednost	0.08563
Minimalna vrijednost	-0.04776
Standardna devijacija	0.00814
Koeficijent asimetrije	0.95942
Koeficijent zaobljenosti	19.0734

Izvor: izračun autora

Da bi se odredila različita stanja prinosa, najprije su kretanja prinosa podijeljena u tri osnovna stanja. U prvoj, osnovnoj analizi razmatraju se sljedeća stanja: S_1 se odnosi na stanje u kojemu su dnevni prinosi manji od -0.5% , S_2 se odnosi na stanje u kojemu se prinosi nalaze u intervalu $[-0.5\%, 0.5\%]$, te posljednje stanje, S_3 , označava prinose koji su veći od 0.5% . Drugim riječima, prinosi će biti u stanju kontinuiranog smanjivanja pri čemu investitori gube uloženi novac (S_1), u stanju u kojemu nema promjena (S_2), ili kontinuiranog povećavanja što predstavlja zaradu investitora, odnosno na taj način investitori ostvaruju zarade (S_3) te pobjedu nad tržištem. Izračunane su početne vjerojatnosti te smještene u inicijalni vektor distribucije vjerojatnosti²:

² Elementi inicijalnog vektora distribucije vjerojatnosti izračunani su kao relativne frekvencije. Primjerice, prvi element izračunan je kao omjer broja prinosa koji su u promatranom razdoblju bili manji od -0.5% i ukupnog broja prinosa.

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 0.2239 \\ 0.5671 \\ 0.2091 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Temeljem prikupljenih podataka izračunani su elementi matrice prijelaznih vjerojatnosti, koja je dana kao³:

$$P = \begin{bmatrix} 0.2925 & 0.5189 & 0.1887 \\ 0.2071 & 0.5858 & 0.2071 \\ 0.1970 & 0.5707 & 0.2323 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Valja istaknuti da je matrica P iz (10) primitivna matrica za koju, stoga, postoji vektor ravnotežnog stanja (očito je $P^l > 0$). Ako se promotri matrica P može se uočiti kako su najveće vjerojatnosti prijelaza iz prvog i trećeg stanja u drugo, stabilno stanje, kao i što je najveća vjerojatnost da će prinosi ako se nalaze u stabilnom stanju tamo i ostati. Drugim riječima, najveća je prijelazna vjerojatnost u stanje u kojemu investitori ne mogu „pobijediti“ tržište. Iako restriktivna, pretpostavka o nepromjenjivosti elemenata matrice P omogućuje analizu stanja u budućim periodima. Nadalje, s obzirom na inicijalni vektor distribucije vjerojatnosti Π_0 , može se očekivati da će analiza ukazati da će u dugom roku najveća vjerojatnost biti upravo za stabilno stanje (S_2). Međutim, s obzirom na narav problema koji se razmatra, nije preporučljivo analizirati dugi rok. Stoga je analiza usmjerena na kratki rok, točnije na nekoliko budućih perioda. Temeljem vektora Π_0 i matrice P izračunani su vektori distribucije vjerojatnosti za idućih pet dana, pri čemu se može uočiti da se ravnotežna distribucija postiže vrlo brzo:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0.2322 \\ 0.5585 \\ 0.2093 \end{bmatrix}, \Pi_2 = \begin{bmatrix} 0.2245 \\ 0.5671 \\ 0.2081 \end{bmatrix}, \Pi_3 = \begin{bmatrix} 0.2342 \\ 0.5676 \\ 0.2082 \end{bmatrix}, \Pi_4 = \begin{bmatrix} 0.2241 \\ 0.5677 \\ 0.2082 \end{bmatrix}, \Pi_5 = \begin{bmatrix} 0.2241 \\ 0.5677 \\ 0.2082 \end{bmatrix},$$

jer je vektor dugoročne ravnoteže

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.2241 \\ 0.5677 \\ 0.2082 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

³ Izračun elemenata matrice prijelaznih vjerojatnosti sličan je kao u fusnoti 1. Koriste se također relativne frekvencije, ali je izračun sljedeći: primjerice, element p_{12} izračunat je kao omjer broja prelazaka prinosa iz stanja S_1 u stanje S_2 i broja prinosa u stanju S_1 u cijelom promatranom razdoblju.

Interpretacija dobivenih rezultata je sljedeća. Promatrajući pet vektora distribucije vjerojatnosti može se očekivati da će prvi radni dan nakon 11. listopada 2013. godine biti najveća vjerojatnost da će se prinosi nalaziti u stanju S_2 .

Da bi se pokazala reprezentativnost ove metodologije, uspoređeni su stvarni prinosi sa prognoziranim vjerojatnostima. U tablici 2. su prikazani rezultati. Plus se odnosi na točno predviđanje stanja u kojemu se prinosi nalaze, dok se minus odnosi na promašaj. Primjerice, vektor Π_1 predviđa za 14. listopad najveću vjerojatnost da prinosi ostanu nepromijenjeni (0.5585), dok vjerojatnost da prinosi budu manji od -0.5% iznosi 0.2322, odnosno da budu veći od 0.5% iznosi 0.2093. Stvarni prinosi ostvareni na taj dan su gubici u iznosu 0.644% (stanje S_1). S obzirom da je prognozirana najveća vjerojatnost da promjene neće biti (tj. prinosi će biti u intervalu $[-0.5\%, 0.5\%]$), odnosno stanje S_2 , prognoza je u ovom slučaju promašena. Analogno interpretiramo za preostale dane.

Tablica 2.

USPOREDBA STVARNIH I PROGNOZIRANIH PRINOSA
ZA RAZDOBLJE 14. – 18. LISTOPADA 2013. GODINE

Datum	Stvarni prinosi	Stanje 1	Stanje 2	Stanje 3
14. listopad	-0.00644	-		
15. listopad	-0.00288		+	
16. listopad	-0.00001		+	
17. listopad	-0.00696	-		
18. listopad	0.00130		+	

Izvor: izračun autora

U drugoj fazi analize promatra se pet mogućih stanja kretanja prinosa. S_1 odnosi se na prinose manje od -1% , S_2 obilježava prinose u intervalu $[-1\%, -0.5\%]$, S_3 se odnosi na interval $[-0.5\%, 0.5\%]$, dok se S_4 odnosi na prinose u intervalu $[0.5\%, 1\%]$ te S_5 na prinose veće od 1% . Na taj su način definirana stanja u kojima investitori mogu trpjeti velike gubitke, umjerene gubitke, stanje u kojemu se vrijednost portfelja ne mijenja, umjerene te velike zarade. Vektor početne distribucije vjerojatnosti izračunan je temeljem podataka kao:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 0.0781 \\ 0.1457 \\ 0.5671 \\ 0.1352 \\ 0.0739 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

dok je pripadajuća matrica prijelaznih vjerojatnosti sljedeća:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1757 & 0.1081 & 0.4595 & 0.1081 & 0.1486 \\ 0.1014 & 0.1957 & 0.5507 & 0.1087 & 0.0435 \\ 0.0616 & 0.1455 & 0.5858 & 0.1437 & 0.0634 \\ 0.0625 & 0.1719 & 0.5859 & 0.1094 & 0.0703 \\ 0.0857 & 0.0429 & 0.5429 & 0.2000 & 0.1286 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Kao i u slučaju analize tri stanja, izračunani su vektori distribucije vjerojatnosti za narednih pet dana. Već je u drugome danu postignuta ravnotežna distribucija vjerojatnosti, koja je dana kao:

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 0.0782 \\ 0.1460 \\ 0.5677 \\ 0.1353 \\ 0.0729 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

Također, stvarni prinosi su uspoređeni s rezultatima analize za slučaj pet stanja, pri čemu su rezultati prikazani u tablici 2.

Tablica 2.

USPOREDBA STVARNIH I PROGNOZIRANIH PRINOSA
 ZA RAZDOBLJE 14. – 18. LISTOPADA 2013. GODINE

Datum	Stvarni prinosi	Stanje 1	Stanje 2	Stanje 3	Stanje 4	Stanje 5
14. listopada	-0.00644		-			
15. listopada	-0.00288			+		
16. listopada	-0.00001			+		
17. listopada	-0.00696		-			
18. listopada	0.00130			+		

Izvor: izračun autora

Interpretacija rezultata u tablici 2. je analogna kao i za tablicu 1. Može se uočiti da je u 3 od 5 slučajeva točno prognozirano buduće stanje prinosa. Na taj način može se zaključiti da je prognoziranje budućih prinosa temeljem Markovljevih lanaca srednje kvalitete, jer je točno prognozirano 60% slučajeva.

5. Zaključak

U ovom radu pokazana je primjena Markovljevih lanaca na predviđanje prinosa dionica na Zagrebačkoj burzi. S obzirom na mnoge zahtjevne ekonometrijske tehnike za modeliranje prinosa, metodologija Markovljevih lanaca pokazuje se kao jednostavna i učinkovita u rješavanju ovog zadatka. Dobiveni rezultati u ovom radu pokazuju da su Markovljevi lanci prije svega korisni za kratkoročne prognoze. Budući da metodologija Markovljevih lanaca pretpostavlja da se Markovljeva matrica ne mijenja tijekom vremena, što na tržištima kapitala nije realno za pretpostaviti, može se zaključiti da promatranje dugog roka kroz ovu metodologiju nije uputno. Stoga se analiza usmjerila na predviđanje kratkoga roka. Dakle, Markovljeve lance je svakako bolje rabiti u kratkoročnoj analizi. Nadalje, može se postaviti pitanje usporedivosti korištene metodologije u ovome radu s nekom drugom. Međutim, metodologija Markovljevih lanaca kao neparametrijska ne može se uspoređivati s nekom ekonometrijskom metodom ili tehnikom gdje se postavljaju određene pretpostavke o distribucijama podataka koji se analiziraju. Rezultati analize iz ovoga rada u kontekstu postojećih istraživanja upotpunjuju nedostatak istraživanja o domaćem tržištu kapitala i daju prvi uvid u kretanja prinosa u okviru Markovljevih lanaca na Zagrebačkoj burzi. Nadalje, postojeća istraživanja nisu pokušala prognozirati buduća kretanja prinosa temeljem provedene analize. U ovome istraživanju to je učinjeno pa se tako na jednostavan način može utvrditi odabir vremenskog trenutka ulaganja ili prodaje vrijednosnica na burzi. U usporedbi s drugim metodologijama, rezultati se realiziraju na jednostavniji način, a i prognoziranje je jednostavnije (u odnosu na, primjerice, GARCH modele). Kao preporuku za daljnja istraživanja navodimo mogućnost analize raznih sektora na tržištu kapitala, analize prinosa i rizika pojedinih dionica te sukladno tome formiranja različitih portfelja kojima investitori mogu pokušati „pobijediti“ tržište.

LITERATURA

1. Agwuegbo, S. O. N., Adewole, A. P., Maduegbuna, A. N. (2010) „A Random Walk Model for Stock Market Prices“, *Journal of Mathematics and Statistics*, 6 (3): 342-346.
2. Arnerić, J., Erjavec, N. (2010) „Regime switching modelling of structural changes caused by financial crisis“ *Proceedings of the 5th International Conference An Enterprise Odyssey : From Crisis to Prosperity - Challenges for Government and Business* (ur.: Galetić, L., Spremić, M., Ivanov, M.), Zagreb: Faculty of Economics and Business: 79-80.
3. Barbić, T., Čondić-Jurkić, I. (2011) “Povezanost između makroekonomskih varijabli i burzovnih indeksa u odabranim zemljama Srednje i Istočne Europe”, *Ekonomski pregled*, 62(3-4): 113-133.
4. Benazić, M. (2008) “Povezanost cijene dionica i deviznog tečaja u Republici Hrvatskoj: VEC model”, *Ekonomski pregled*, 59(11): 669-687.
5. Chu, C. S. J., Santoni, G. J., Liu, T. (1996) „Stock market volatility and regime shift in return“, *Information Science*, 94: 179-190.
6. Doubleday, K. J., Esunge, J. N. (2011) „Application of Markov Chains to Stock Trends“, *Journal of Mathematics and Statistics*, 7 (2): 103-106.
7. Dueker, M. J. (1994) „Markov Switching in GARCH Processes and Mean Reverting Stock Market Volatility“, *Working Paper 1994-015B*, Federal Reserve Bank of St. Louis.
8. Erjavec, N., Cota, B. (2007) „Modelling stock market volatility in Croatia“, *Ekonomska istraživanja*, 20(1): 1-7.
9. Guidolin, M., A. Timmermann. (2005) „Economic Implications of Bull and Bear Regimes in UK Stock and Bond Returns“, *The Economic Journal*, 115: 111-143.
10. Guidolin, M., and A. Timmermann (2008) „International Asset Allocation under Regime Switching Skew, and Kurtosis Preferences“, *Review of Financial Studies*, 21(2): 889-935.
11. Hsing, Y. (2011) „Macroeconomic variables and the stock market: the case of Croatia“, *Ekonomska istraživanja*, 24(4): 41-50.
12. Jakšić, S. (2008) „Utjecaj monetarnog agregata M4 i kamatnih stopa na CRO-BEX“, u: *Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu*, 6(1): 131-139.
13. Kilic, S. B. (2005) „Test of the Weak Form Efficient Market Hypothesis for the Istanbul Stock Exchange by Markov Chains Methodology“, *Journal of Çukurova University Institute of Social Sciences*, 14 (1): 333-342.

14. Maheu, J. M., Mccurdy, T. H. (2000) „Identifying Bull and Bear markets in stock returns“, *Journal of Business and Economic Statistics* 18: 100-112.
15. McQueen, G., Thorley, S. (1991) „Are Stock Returns Predictable? A Test Using Markov Chains“. *The Journal of Finance*, 46(1): 239-263.
16. Meyer, C. (2000) *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM.
17. Nishiyima, K. (1998) „Some evidence of regime shifts in international stock markets“, *Managerial Finance*, 24(4): 30-55.
18. Ramljak, B., Anić-Antić, P. (2010) „Korelacija tržišne cijene dionica i uspješnosti poslovanja poduzeća koja kotiraju na tržištu kapitala Republike Hrvatske: posljedice za proces odlučivanja“, *Ekonomski pregled*, 61(11): 666-682.
19. Schaller, H., Norden, S. (1997) „Regime switching in stock market returns“, *Applied Financial Economics*, 7: 177-192.
20. Simon, C. P., Blume, L. (1994) *Mathematics for economists*. New York: W. W. Norton & Company Inc.
21. Svoboda, M., Lukáš, L. (2012) „Application of Markov Chain analysis to trend prediction of stock indices“, u: RAMÍK, J. and STAVÁREK, D. (eds.) *Proceedings of 30th International Conference Mathematical Methods in Economics*. Karviná: Silesian University, School of Business Administration: 848-853.
22. Šego, B. (1987) *Primijenjena matematika 2*. Zagreb: Birotehnika.
23. Šego, B., Škrinjarić, T. (2012) „Modeliranje dnevne sezonalnosti prinosa na Zagrebačkoj burzi“, u: *Matematički modeli u analizi razvoja hrvatskog financijskog tržišta* (ur.: Aljinović, Z., Marasović, B.), Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet, Split: 159-172.
24. Vizek, M., Dadić, T. (2006) „Integracija tržišta kapitala Hrvatske, zemalja Srednje i Istočne Europe i Europske Unije: kointegracijski pristup“, *Ekonomski pregled*, 57(9-10): 631-646.
25. Wang P., Theobald M. (2007) „Regime switching volatility of six East Asian emerging markets“, *Research in International Business and Finance* (22): 267-283.
26. Zagrebačka burza, <http://www.zse.hr> [18. listopada 2013].
27. Živković, S. (2008) „Measuring Market Risk in CEE Countries“, *Accounting and Finance in Transition*, Greenwich University Press, London, 5: 77-102.

MODELLING STOCK RETURNS ON ZAGREB STOCK EXCHANGE BY USING MARKOV CHAINS

Summary

This paper illustrates the application of the Markov chains methodology in predicting stock returns on Zagreb Stock Exchange. Comparing with other mathematical and econometric tools, the Markov chains methodology is a simple and nonparametric methodology which has still not been researched enough in problems of stock returns modeling. The main aim of this paper is introducing this methodology into domestic literature and giving new ideas for the future researches.

Key words: Markov chains, stock market, Zagreb Stock Exchange, stock returns.