Lapaine, M., Triplat Horvat, M. (2014): Središta zakrivljenosti meridijana
Ekscentar, br. 17, pp. 56-57

Dr. sc. Miljenko Lapaine, dipl. ing. ‣ Zavod za kartografiju i fotogrametriju, Geodetski fakultet Zagreb, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: mlapaine@geof.hr
Martina Triplat Horvat, dipl. ing. ‣ Zavod za kartografiju i fotogrametriju, Geodetski fakultet Zagreb, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: mthorvat@geof.hr

Središta zakrivljenosti meridijana

SAŽETAK: *U ovome radu daje se izvod za geometrijsko mjesto točaka središta zakrivljenosti meridijana, uz pretpostavku da je meridijan luk elipse. Pokazuje se da je to krivulja nalik zvijezdi koju matematičari nazivaju astroidom. Najprije se izvodi jednadžba elipse parametrizirane geografskom širinom, a zatim jednadžba astroide u parametarskom i implicitnom obliku iz kojeg se mogu pročitati veličine njezinih poluosi.*

KLJUČNE RIJEČI: *rotacijski elipsoid, meridijan, zakrivljenost meridijana, astroida*

Centres of the Meridian Curvature

ABSTRACT: *This paper presents a derivation for geometric locus of meridian curvature centres, on the condition that a meridian is an ellipse arc. It is a star-shaped curve which mathematicians refer to as an astroid. First, the equation of an ellipse parameterized by latitude is derived, after which the equation of an astroid is derived in parameter and implicit form, from which its semi-axes can be read.*

KEYWORDS: *rotational ellipsoid, meridian, meridian curvature, astroid*

1. UVOD

U teoriji kartografskih projekcija učimo da su glavni normalni presjeci rotacijskog elipsoida presjek po meridijanu i presjek po prvom vertikalu. U bilo kojoj točki rotacijskog elipsoida polumjer zakrivljenosti meridijana određen je izrazom

$$M=\frac{a\left(1-e^2\right)}{\sqrt{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^3}}, \tag{1.1}$$

a polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu u toj točki

$$N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \tag{1.2}$$

gdje je *a* velika poluos elipsoida, e prvi numerički ekscentricitet, a φ elipsoidna širina (Frančula, 2004). Pokazuje se da *M* i *N* odgovaraju glavnim zakrivljenostima elipsoida, odnosno da su to najmanji i najveći polumjeri zakrivljenosti u promatranoj točki. U jednom prethodnom radu pokazano je da se do formule za polumjer zakrivljenosti meridijana može doći na razne načine, a da je najelegantniji izvod dao F. R. Helmert (Lapaine, 1997). U ovome radu pokazat ćemo da se sva središta zakrivljenosti elipse nalaze na krivulji koju matematičari nazivaju astroidom.

2. JEDNADŽBA ELIPSE U PARAMETARSKOM OBLIKU S PARAMETROM φ

U srednjoj školi učili smo da je

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.1}$$

jednadžba elipse sa središtem u ishodištu pravokutnoga koordinatnog sustava i s poluosima a i b. Učili smo također da je jednadžba tangente na elipsu u točki s koordinatama $\left(x_0,y_0\right)$

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1, \tag{2.2}$$

što je izraz koji se lako pamti. Ako se (2.2) napiše u obliku

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}\left(x-x_0\right), \tag{2.3}$$

onda se iz tog zapisa može iščitati da je koeficijent smjera tangente

$$-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0},$$

što znači da je koeficijent smjera normale u istoj točki

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0},$$

pa je jednadžba normale

$$y-y_0\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}\left(x-x_0\right). \tag{2.4}$$

Ako se prisjetimo da je po definiciji elipsoidna (geodetska) širina kut φ između normale na elipsoid u promatranoj točki i ravnine ekvatora, onda je očito da je tangens toga kuta jednak koeficijentu smjera normale, tj.

$$\tan\varphi=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}. \tag{2.5}$$

Izraz (2.5) omogućava nam da napišemo jednadžbu elipse u parametarskom obliku s φ kao parametrom. U tu svrhu potrebno je u (2.5) zamijeniti $\left(x_0,y_0\right)$ s $\left(x,y\right)$, izraziti *y* pomoću *x* ili obratno i uvrstiti u (2.1). Tako dolazimo do izraza

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\varphi}},\ y=\frac{b^2\tan\varphi}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2\varphi}} \tag{2.6}$$

što se lako preuredi u

$$x=\frac{a^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}},\ y=\frac{b^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}} \tag{2.7}$$

i zatim u

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{a\cos\varphi}{W}=N\cos\varphi,$$
$$y=\frac{a\left(1-e^2\right)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{a\left(1-e^2\right)\sin\varphi}{W}=N\left(1-e^2\right)\sin\varphi, \tag{2.8}$$

gdje smo upotrijebili poznati odnos između poluosi elipsoida a i *b* i numeričkog ekscentirciteta e

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \tag{2.9}$$

i uobičajenu oznaku u geodeziji

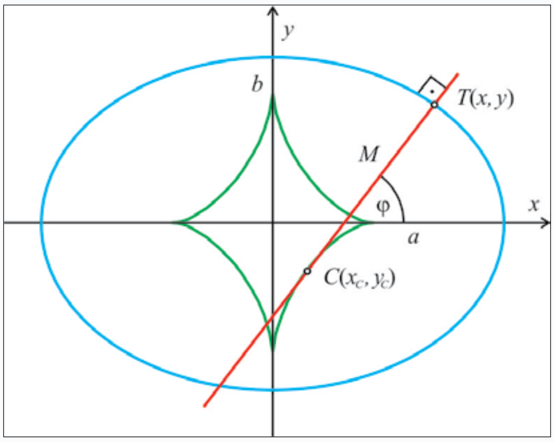
$$W=\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}. \tag{2.10}$$

Osim parametarskih jednadžbi napisanih u obliku (2.6), (2.7) ili (2.8), u upotrebi su i neke druge koje se primjenjuju pri rješavanju raznih problema u vezi s elipsom (vidi npr. Lapaineovu zbirku zadataka, 2006).

3. POLOŽAJ SREDIŠTA ZAKRIVLJENOSTI MERIDIJANSKOG PRESJEKA

Označimo s $C(x_c, y_c)$ točku na normali povučenoj proizvoljnom točkom $T(x, y)$ na meridijanskom presjeku rotacijskog elipsoida (slika 1). Ako se točka *C* nalazi na udaljenosti *M* od točke *T*, tada možemo napisati

$$x_c = x - M\cos\varphi, y_c = y - M\sin\varphi. \tag{3.1}$$



Slika 1. Središta zakrivljenosti elipse leže na astroidi

S obzirom na to da točka $T(x, y)$ pripada elipsi, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu elipse (2.8) pa kad to uvrstimo u (3.1) dobit ćemo

$$x_c = N\cos\varphi - M\cos\varphi, y_c = N\left(1-e^2\right)\sin\varphi - M\sin\varphi. \tag{3.2}$$

Jednadžbe (3.2) su jednadžbe krivulje na kojoj leže središta kružnica zakrivljenosti meridijana. Te su jednadžbe u parametarskom obliku, parametar je φ i iz njih je teško prepoznati o kojoj je krivulji riječ. Stoga još malo računamo:

$$x_c = N\cos\varphi - M\cos\varphi = \left(\frac{a}{W} - \frac{a\left(1-e^2\right)}{W^3}\right)\cos\varphi = \frac{a}{W}\left(1 - \frac{1-e^2}{W}\right)\cos\varphi = ae^2\frac{\cos^3\varphi}{W^3} \tag{3.3}$$

$$y_c = N\left(1-e^2\right)\sin\varphi - M\sin\varphi = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W}\left(1 - \frac{1}{W^2}\right)\sin\varphi = -a\left(1-e^2\right)e^2\frac{\sin^3\varphi}{W^3} \tag{3.4}$$

Uzevši u obzir (2.8) i prethodne dvije relacije (3.3) i (3.4) možemo najprije napisati

$$x_c = ae^2\left(\frac{x}{a}\right)^3 = \frac{e^2}{a^2}x^3, y_c = -a\left(1-e^2\right)e^2\left[\frac{y}{a\left(1-e^2\right)}\right]^3 = -\frac{e^2}{a^2\left(1-e^2\right)}y^3 \tag{3.5}$$

zatim

$$x = \left(\frac{a^2}{e^2}x_c\right)^{\frac{1}{3}}, y = \left[\frac{a^2\left(1-e^2\right)}{e^2}y_c\right]^{\frac{1}{3}} \tag{3.6}$$

i kad se (3.6) uvrsti u (2.1) nakon manjeg sređivanja dolazimo do jednadžbe

$$\frac{x_c^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{a^2-b^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y_c^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{a^2-b^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}}} = 1. \tag{3.7}$$

To je jednadžba astroide u implicitnom obliku. Astroida ima središte u ishodištu pravokutnoga koordinatnog sustava i njezine poluosi su

$$\frac{a^2-b^2}{a} \text{ i } \frac{a^2-b^2}{b}. \tag{3.8}$$

Za elipsoid GRS80 duljina tih polusi približno iznosi 42 698 m i 42 841 m. Ako pretpostavimo da je $a = b$, tada je $e = 0$ i $M = N$, pa (3.2) prelazi u

$$x_c = 0, y_c = 0, \tag{3.9}$$

tj. sva središta zakrivljenosti meridijana, koji su u ovom slučaju polukružnice, nalaze se u ishodištu koordinatnog sustava, koje je istodobno i središte svih meridijana.

DOBRO JE ZNATI

Astro – (*grč.* $\alpha\sigma\tau\eta\rho$ aster – zvijezda) kao prvi dio složenice označuje vezu drugog dijela složenice s nebeskim tijelima; svemirski uopće. *Astralan* 1. koji potječe od zvijezda, koji se odnosi na zvijezde; zvjezdan 2. koji kao da nije sa Zemlje; nestvaran, bestjelesan, nematerijalan.
Per aspera ad astra – Trnovit je put do zvijezda.

Evoluta zadane krivulje je krivulja koja se sastoji od središta zakrivljenosti svih točaka zadane krivulje. Ona je ujedno i ovojnica normala zadane krivulje. Ovojnicu zovemo i anvelopom. *Evolventa* ili involuta zadane krivulje je ona krivulja za koju je polazna krivulja njezina evoluta. Stoga je svaka normala evolvente ujedno tangenta evolute. Astroida je evoluta elipse, a elipsa je evolventa astroide.

Presjek po prvom vertikalu također je elipsa kojoj je pripadna evoluta također jedna astroida. Međutim, dok je *M* polumjer zakrivljenosti meridijanskog presjeka u bilo kojoj točki, *N* je polumjer zakrivljenosti u tjemenu elipse koja je presjek po prvom vertikalu.

David Segen bio je profesor matematike. Rođen je 1859. u Zagrebu, gdje je i umro 1927. godine. Studirao je i diplomirao na Visokoj tehničkoj školi u Beču, a doktorirao na Mudroslovnom fakultetu u Zagrebu temom iz teorije ravninskih krivulja pod naslovom *O asteroidi* (1889, mentor K. Zahradnik). To je bila prva obranjena doktorska disertacija iz matematike na Sveučilištu u Zagrebu (Kućan, 1996).

ZAHVALA

Autori zahvaljuju prof. emer. Nedjeljku Frančuli i doc. dr. sc. Draženu Tutiću na čitanju rukopisa i korisnim savjetima za njegovo poboljšanje.

LITERATURA

› Frančula, N. (2004), Kartografske projekcije, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
› Kućan, Ž. (ur., 1996), 120 godina nastave prirodoslovlja i matematike na Sveučilištu u Zagrebu, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet.
› Lapaine, M. (1997), Polumjer zakrivljenosti meridijanske elipse. Geodetski list, 2, 127-138.
› Lapaine, M. (2006), Vektorska analiza, zbirka riješenih zadataka, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.
› Segen, D. (1889), O asteroidi : razprave : odobreno povjerenstvom strogih izpita Fakulteta mudroslovnoga u Kr. sveučilištu Franje Josipa I. u Zagrebu. Dostupno u Digitalnom akademskom repozitoriju (DAR) Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu (http://dar.nsk.hr/?vdoc=7820&page=1).