Uloga eksperimenta u matematičkom otkriću

Erna Begović[1] i Vjekoslav Kovač[2]

Imam rezultat, ali još ne znam kako ga dobiti.

C. F. Gauss

Intuicija nam dolazi mnogo ranije i s mnogo manje vanjskog utjecaja nego formalni argumenti koje ne možemo potpuno razumjeti ako nismo dostigli relativno visoku razinu logičkog iskustva i vještine.

G. Pólya

Računalo je promijenilo samu prirodu matematičkog iskustva, sugerirajući po prvi put da bi matematika, poput fizike, mogla postati empirijska disciplina, mjesto gdje su stvari otkrivene zato što su uočene.

D. Berlinski

Eksperiment svakako nije pojam koji često čujemo u matematičkom kontekstu, bilo da se radi o školskom gradivu, bilo da se radi o znanstvenom istraživanju. Dok prirodne znanosti prihvaćaju, a u velikoj mjeri i preferiraju eksperiment kao sredstvo provjere ili opovrgavanja hipoteza, moderna matematika izgrađuje se rigoroznim dokazima. Tome učimo učenike u školama, a od sveučilišnih studenata očekujemo da razviju visoku razinu deduktivnog rasuđivanja. Stoga se može učiniti kako prilikom rješavanja matematičkih problema niti nema mjesta heuristici, nagađanju i isprobavanju. Ipak, matematičari se kroz povijest nisu sramili takvih načina razmišljanja, premda se još od starogrčke matematike priznavala potreba za strogim logičkim dokazima. Važnost intuitivnog rasuđivanja posebno je isticao poznati matematičar i metodičar matematike George Pólya [6].

U današnje vrijeme raspolažemo velikom količinom znanstvenih i nastavnih pomagala koja nam olakšavaju analiziranje primjera i provjeravanje novih ideja. Internet nam omogućava jednostavan pristup i pretraživanje znanstvenih i edukacijskih sadržaja te enciklopedijskih baza podataka. Moderna računala svojom brzinom i točnošću zamjenjuju mukotrpne izračune, premda ipak još nisu u stanju samostal-

[1]Erna Begović, FKIT, Sveučilište u Zagrebu

[2]Vjekoslav Kovač, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

no generirati složenije dokaze. Naravno, eksperimentalni pristup ne može zamijeniti formalni dokaz, nego eksperimentom razvijamo intuiciju i utvrđujemo smjer u kojem gradimo teoriju te pristupamo formalnom dokazu. Eksperiment može biti posebno koristan kada smo u potrazi za protuprimjerima.

U ovom ćemo članku na primjerima iznijeti neke tehnike pomoću kojih eksperimentiranjem možemo doći do novih matematičkih spoznaja ili jednostavno do rješenja zadanog problema. Primjeri su prilagođeni školskom gradivu matematike, u nadi da će nastavnici i zainteresirani učenici poželjeti i sami detaljnije proučiti neke od dolje navedenih alata. Određena količina matematičkog softvera već se uspješno integrirala u nastavu matematike pa ćemo se orijentirati na manje poznate alate i trikove.

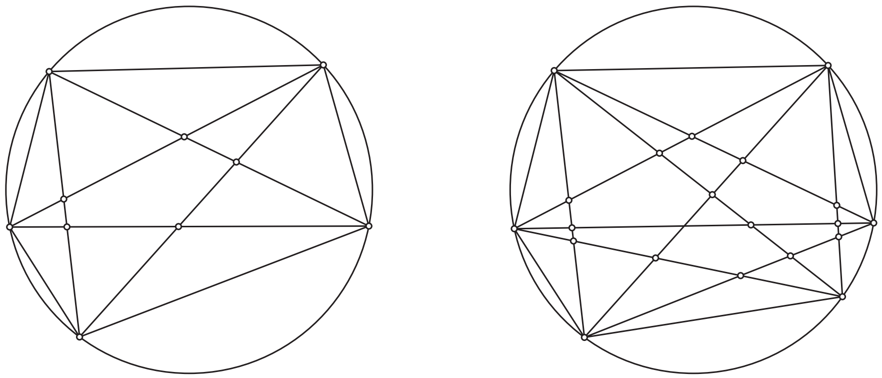
Jedan koristan alat u eksperimentalnoj matematici je *Enciklopedija cjelobrojnih nizova (OEIS)* [5] kojoj se može pristupiti na adresi http://oeis.org/. Začetnik ove ideje bio je N. J. A. Sloane još u 60-im godinama prošlog stoljeća, a on i S. Plouffe pokrenuli su web-stranicu 1996. godine. OEIS je baza podataka koju koristimo tako da unesemo nekoliko uzastopnih članova niza, a OEIS pronalazi nizove cijelih brojeva koji odgovaraju našem unosu i ispisuje informacije o njima. To može pomoći kod rješavanja problema na osnovi nekoliko posebnih slučajeva, kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 1. Zadana je kružnica i na njoj n točaka, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 3$. Svake dvije točke međusobno su spojene tetivom. U koliko se najviše točaka unutar kružnice sijeku tako dobivene tetive? Drugim riječima, koliko najviše točaka presjeka dobivamo ako pretpostavimo da nikoje tri tetive ne prolaze istom točkom?

Za male brojeve n učenik može pažljivo nacrtati odgovarajuće slike i prebrojiti točke presjeka. Dobit će sljedeće rezultate:

n	broj sjecišta
3	0
4	1
5	5
6	15
7	35
8	70

Broj sjecišta brzo raste pa nam za malo veće n-ove više nije zgodno brojiti točke s crteža. Dio niza 0, 1, 5, 15, 35, 70 koji smo dobili do sada potražit ćemo u Enciklopediji cjelobrojnih nizova. Tamo vidimo da naš unos odgovara nizu pod rednim brojem A000332, što je niz binomnih koeficijenata $\binom{n}{4}$.



Slika 1. Ilustracije za n = 5 i n = 6

Stoga naslućujemo da je $\binom{n}{4}$ rješenje našeg problema. Naravno, potrebno je to dokazati, a oblik naslućenog rješenja daje nam smjer u kojem razmišljamo. Dvije se tetive sijeku ako i samo ako su dijagonale nekog četverokuta s vrhovima u točkama na kružnici. I obratno, kada od n točaka biramo četiri koje daju jedan četverokut, dobit ćemo jedno sjecište tetiva koje su upravo dijagonale tog četverokuta. Takav četverokut možemo dobiti na $\binom{n}{4}$ načina, pa je to traženi broj sjecišta tetiva.

Napomenimo još da je već OEIS u komentarima o nizu koji smo unijeli naveo upravo to da se radi o broju sjecišta dijagonala konveksnog n-terokuta gdje se najviše dvije dijagonale sijeku u istoj točki unutar n-terokuta, a to je problem ekvivalentan našem zadatku.

Programski paket *Mathematica* [9] omogućava, između ostalog, jednostavno rekurzivno definiranje nizova, što ćemo iskoristiti u drugom primjeru. Preuzeli smo ga iz zbirke [4].

Primjer 2. Kako treba rastaviti prirodni broj kao zbroj (jednog ili više) pribrojnika na način da umnožak tih pribrojnika bude najveći mogući? Posebno, kako treba rastaviti broj 100?

Vidjet ćemo da ovaj zadatak nije težak, no nije sasvim lako pogoditi traženi rastav. Učenik će vjerojatno najprije pronaći rastav za manje prirodne brojeve, a potom pokušati pogoditi općeniti uzorak. Pritom mu korištenje računala i nekog programskog jezika može znatno olakšati posao. Na primjer, u programskom paketu *Mathematica* naredba

```
f[n_]:=Max[Union[Table[k*f[n-k],{k,1,n-1}]],{n}];
```

definira funkciju $f : N \to N$ koja prirodnom broju n pridružuje maksimalnu vrijednost produkta iz rastava od n opisanog u zadatku. Logika iza ove rekurzivne definicije je odcijepiti jedan pribrojnik $1 \leq k \leq n - 1$ pa rješavati potproblem za preostali broj $n - k$. Potom naredbom

```
For[m=1,m<=10,m++,Print["f(",m,")=",f[m]]];
```

učenik može ispisati prvih 10 vrijednosti te funkcije:

$$f(1) = 1,\ \ f(2) = 2,\ \ f(3) = 3,\ \ f(4) = 4,\ \ f(5) = 6,\ \ f(6) = 9, \ldots$$

Napomenimo da je gornja rekurzija ipak presložena da bi nam računalo vratilo vrijednost $f(100)$.

Uz malo dodatnog truda učenik može pogađanjem ili također korištenjem računala dobiti i (ne uvijek jednoznačne) rastave koji daju najveće umnoške u tim slučajevima.

n	$f(n)$	*optimalni rastav od n*
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	2 + 2 ili 4
5	6	3 + 2
6	9	3 + 3
7	12	3 + 2 + 2 ili 4 + 3
8	18	3 + 3 + 2
9	27	3 + 3 + 3
10	36	3 + 3 + 2 + 2 ili 4 + 3 + 3

Odavde nije teško naslutiti kako se optimalni rastav dobiva korištenjem najvećeg mogućeg broja trojki i nijedne, jedne, ili dvije dvojke, ovisno o ostatku koji n daje pri dijeljenju brojem 3. Tako će, na primjer, traženi rastav od 100 biti:

$$100 = \underbrace{3 + 3 + 3 + \ldots + 3}_{\text{32 puta}} + 2 + 2\,.$$

Dokažimo tu slutnju. Zbog konačnosti broja mogućih rastava prirodnog broja kao zbroja prirodnih brojeva, dovoljno je argumentirati kako niti jedan drugi rastav ne daje veći produkt pribrojnika. Pretpostavimo da je $n \geq 2$.

i. Rastav koji sadrži pribrojnik 1 ne može biti optimalan jer jedinicu možemo dodati bilo kojem drugom pribrojniku i na taj način povećati cijeli umnožak.

ii. Rastav koji sadrži pribrojnik k veći ili jednak 5 ne može biti optimalan jer se inače taj broj može zamijeniti pribrojnicima $k - 2$ i 2, a lako se vidi da je $(k - 2) \times 2 > k$.

iii. Pribrojnik 4 može se zamijeniti s $2 + 2$ pa je svejedno imamo li 4 ili $2 + 2$.

iv. U optimalnom rastavu ne mogu se nalaziti tri dvojke jer se one mogu zamijeniti s dvije trojke zbog $3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$.

Time je dokaz završen.

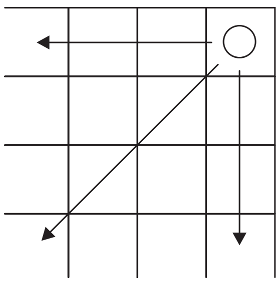
Možda je još zanimljivije spomenuti kako je učenik mogao pronaći rješenje u prethodno spomenutoj Enciklopediji cjelobrojnih nizova samo na osnovi desetak izračunatih vrijednosti funkcije f:

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36.$$

Unosom tih članova u Enciklopediju kao prvi rezultat dobijemo niz s rednim brojem A000792 te se u komentarima ponavlja formulaciju našeg zadatka, zajedno s „receptom” koji daje optimalni rastav.

Ponekad za eksperiment nisu potrebna nikakva elektronička pomagala.

Primjer 3. Darko i Marko imaju šahovsku ploču standardne veličine 8×8 i jednu figuru dame. Stupci šahovske ploče označeni su slovima od A do H, a redci brojevima od 1 do 8. Igra za dva igrača sastoji se od toga da Darko postavi damu na neko polje iz gornje polovice ploče (redovi 5, 6, 7, 8), potom Marko pomiče damu, nakon njega je pomiče Darko, te se dalje izmjenjuju na potezu do završetka igre. Dama se smije pomaknuti za jedno ili više polja, i to samo u smjerovima ulijevo, prema dolje ili ukoso lijevo-dolje. Igra završava kada se dama nađe u donjem lijevom kutu, a pobjeđuje igrač koji ju je tamo doveo, tj. gubi igrač koji više ne može odigrati potez. Na koja sve polja Darko može postaviti damu kako bi osigurao pobjedu?



Problem ćemo riješiti jednostavnim eksperimentom koji se može napraviti na komadu papira. Igru promatramo od zadnjeg prema prvom potezu, tj. unatrag ispitujemo vrijednosti pozicija. Reći ćemo da je trenutna damina pozicija dobra (i označiti je slovom D) ako pobjeđuje igrač koji nije na potezu, a inače ćemo reći da je pozicija loša (i označiti je slovom L). Dobitna strategija u ovoj igri je puštati protivnika da pomiče damu iz dobre pozicije u neku lošu poziciju, a potom je vraćati iz loše u neku dobru poziciju. Ukoliko završnu poziciju (kada je dama u donjem lijevom kutu) proglasimo dobrom, onda ćemo zbog konačnosti igre sigurno kad-tad pobijediti.

Gornja apstraktna definicija dobrih i loših pozicija iziskuje sljedeću rekurzivnu definiciju. Nacrtajmo šahovsku ploču i u polje A1 upišimo oznaku D, jer je to završna pozicija igre. Svaku novu poziciju proglasit ćemo lošom ako se iz nje može pomaknuti u barem jednu dobru poziciju. Svaku novu poziciju proglasit ćemo dobrom ako dama iz nje može u jednom potezu doći samo u loše pozicije. Očigledno je Darku cilj postaviti damu na neku od dobrih pozicija.

Pogledajmo kako to označavanje provesti u praksi. Sva polja iz kojih dama može doći u donji lijevi kut dobivaju oznaku L.

8	L							L
7	L						L	
6	L					L		
5	L				L			
4	L			L				
3	L		L					
2	L	L						
1	D	L	L	L	L	L	L	L
	A	B	C	D	E	F	G	H

Pozicije iz kojih se može doći samo u polja L su dobre pozicije jer protivnika prisiljavaju da dođe u lošu poziciju. To su sada sigurno pozicije B3 i C2 pa pripadna polja dobivaju oznaku D. Nadalje, sva neoznačena polja iz kojih se dama može pomaknuti na B3 i C2 dobit će oznaku L.

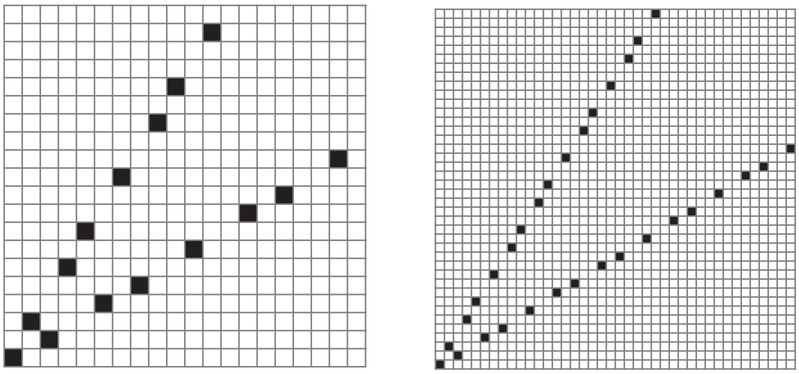
8	L	L	L				L	L
7	L	L	L			L	L	L
6	L	L	L		L	L	L	
5	L	L	L	L	L	L		
4	L	L	L	L	L			
3	L	D	L	L	L	L	L	L
2	L	L	D	L	L	L	L	L
1	D	L	L	L	L	L	L	L
	A	B	C	D	E	F	G	H

Uzastopnim ponavljanjem gornjeg zaključivanja konačno dolazimo do potpuno označene šahovske ploče i dobivamo sliku koja ilustrira dobre i loše pozicije.

8	L	L	L	L	D	L	L	L
7	L	L	L	L	L	L	L	L
6	L	L	L	D	L	L	L	L
5	L	L	L	L	L	L	L	D
4	L	L	L	L	L	D	L	L
3	L	D	L	L	L	L	L	L
2	L	L	D	L	L	L	L	L
1	D	L	L	L	L	L	L	L
	A	B	C	D	E	F	G	H

Prema tome, Darko će sigurno pobijediti ako damu stavi na neko od polja: D6, E8 ili H5.

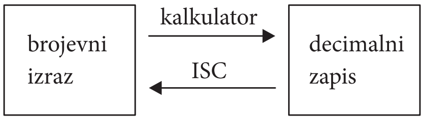
Učenik vješt u programiranju lako može generirati algoritam koji pronalazi dobre pozicije te poopćiti rješenje na šahovsku ploču dimenzija $n \times n$, $n \in \boldsymbol{N}$. Prilažemo ilustracije dobrih pozicija za ploče 20×20 i 40×40. Uočavamo izvjesnu pravilnost u rasporedu dobrih pozicija, koja nije slučajna. One su locirane oko pravaca s nagibima φ i $\frac{1}{\varphi}$, pri čemu je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ omjer zlatnog reza. Koordinate svih dobrih pozicija određene su nizovima A000201 i A001950 u Enciklopediji cjelobrojnih nizova. Čitatelj tamo može naći eksplicitne formule za članove tih nizova koje je pronašao W. A. Wythoff.



Slika 2. Crna polja označavaju dobre početne pozicije za n = 20 i n = 40

Navedimo kao zanimljivost kako se gornja igra davno igrala u Kini pod imenom *tsyan-shidzi*, što doslovno znači „biranje kamenčića". Naime, alternativni rekviziti za ovu igru su dvije hrpe kamenčića, a brojevi kamenčića u hrpama odgovaraju x i y koordinatama dame, brojeći od donjeg lijevog kuta i počevši od 0. U jednom potezu igrač može uzeti neki broj kamenčića s jedne od hrpa ili pak isti broj kamenčića s obje hrpe. Analiza velikog broja sličnih problema može se naći u izvrsnoj „početnici" iz kombinatorne teorije igara [1].

Za razliku od običnog kalkulatora koji pretvara brojevni izraz u decimalni zapis, ponekad nam je potreban obrnuti pristup. Alat koji koristimo u takvim situacijama je *Inverzni simbolički kalkulator (ISC)* [3] kojemu se može pristupiti na internetskoj adresi http://isc.carma.newcastle.edu.au. Pokrenuli su ga 1995. P. B. Borwein, J. M. Borwein i S. Plouffe. ISC kao ulazni podatak prima konačni decimalni zapis, a kao izlazni podatak vraća brojevni izraz kojem taj podatak odgovara. Preciznije, traže se najbliži izrazi sastavljeni od poznatih matematičkih konstanti i manjeg broja elementarnih funkcija. Ponekad ISC ne može naći odgovarajući izraz, a često pak vraća više mogućih, međusobno bliskih rezultata. Prilikom korištenja poželjno je imati što točniju decimalnu aproksimaciju.



Primjer 4. Pojednostavnite izraz $\sqrt{\dfrac{1-\log 2}{1+\log_5 2}}$.

Učenik koji nije vješt u računanju s logaritmima uvrstio je zadani izraz u kalkulator i dobio rješenje 0.698970004336018804786261105276. Naravno, on zna da ovo nije rješenje kakvo nastavnik očekuje od njega. Zato će upisati dobiveni rezultat u ISC i dobiti log 5.

Nakon što učenik zna rješenje, lakše je srediti početni izraz

$$\frac{1-\log 2}{1+\log_5 2}=\frac{\log 10-\log 2}{\log_5 5+\log_5 2}=\frac{\log\dfrac{10}{2}}{\log_5(5\cdot 2)}=\frac{\log 5}{\log_5 10}=(\log 5)^2$$

i tako egzaktno izvesti rezultat log 5.

To je bio jednostavan primjer koji smo mogli riješiti i korištenjem nekog programskog paketa, npr. *Mathematice*. Sljedeći je primjer zanimljiv jer nam *Mathematica* neće dati zadovoljavajuća rješenja pa će korištenje ISC-a biti ključan korak u rješavanju problema.

Primjer 5. Riješite jednadžbu $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Ako jednostavno iskoristimo naredbu Solve u *Mathematici*,

```
Solve[x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1==0,x],
```

nećemo dobiti rješenja jednadžbe, već samo izlaznu poruku da gornja jednadžba ima pet rješenja u skupu kompleksnih brojeva, a to smo i sami znali.

Naredba `NSolve` daje numerička rješenja jednadžbe. Ako tražimo preciznost na 30 znamenaka, dobit ćemo sljedeći rezultat.

```
NSolve[x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1==0,x,30]
```

```
{{x->-1.91898594722899477978073611413},
{x->-1.30972146789057012811385014493},
{x->-0.284629676546570280887585337233},
{x->0.830830026003772851058548298459},
{x->1.68250706566236233772362329784}}
```

Želimo imati točna, a ne približna rješenja. Budući da ISC bolje računa s pozitivnim brojevima, uvrstimo redom

$x_1 = 1.68250706566236233772362329784$
$x_2 = 0.830830026003772851058548298459$
$x_3 = -0.284629676546570280887585337233$
$x_4 = -1.30972146789057012811385014493$
$x_5 = -1.91898594722899477978073611413$

i dobijemo

$$x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{11}, x_2 = 2\cos\frac{4\pi}{11}, x_3 = 2\cos\frac{6\pi}{11}, x_4 = 2\cos\frac{8\pi}{11}, x_5 = 2\cos\frac{10\pi}{11}.$$

Dakle, slutimo da su rješenja oblika $2\cos\frac{2k\pi}{11},\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$ U *Mathematici* možemo lako provjeriti da se ti izrazi podudaraju s rješenjima jednadžbe na više od 30 znamenaka, npr. njih 100.

Dokazat ćemo da su to zaista rješenja. Provjera je sada bitno lakša nego računanje. Tražimo rješenja pomoću supstitucije $x = 2\cos\alpha,\ \alpha \in R$. Uvrštavanjem tog izraza u polaznu jednadžbu dobije se ekvivalentna jednadžba $\dfrac{\sin\frac{11\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 0.$

Iz $\sin\frac{11\alpha}{2} = 0$ slijedi

$$\frac{11\alpha}{2} = k\pi, \text{ tj. } \alpha = \frac{2k\pi}{11}, k \in \boldsymbol{Z}.$$

Zbog periodičnosti i parnosti funkcije kosinus, dovoljno je gledati $0 \le k \le 5$. Još mora vrijediti

$$\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0 \text{, odnosno, } \frac{\alpha}{2} \neq l\pi,\ \alpha \neq 2l\pi, l \in Z,$$

a to je zadovoljeno za $\alpha = \frac{2k\pi}{11},\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$

Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe su $x_k = 2\cos\frac{2k\pi}{11}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5.$

Idućim primjerom naglasit ćemo da je potreban oprez pri aproksimaciji brojevnih izraza decimalnim brojevima.

Primjer 6. Što je „zanimljivo" u vezi broja $e^{\frac{\pi\sqrt{163}}{3}}$?

Ako ne gledamo dovoljno decimalnih mjesta, on može biti pogrešno izjednačen sa 640320. To može biti poteškoća na kalkulatorima s malom preciznošću.

```
N[E^(Pi*Sqrt[163]/3),14]

640320.00000000
```

Računanje većeg broja znamenaka ukazuje da gornji broj ipak nije cijeli.

```
N[E^(Pi*Sqrt[163]/3),50]

640320.00000000060486373504901603947174181881853948
```

Naš posljednji primjer nešto je složeniji. Njegov (a) dio preuzet je iz knjige [7].

Primjer 7. Uzastopno provodimo sljedeću operaciju: četvorku cijelih brojeva a, b, c, d zamijenimo novim brojevima

$$|a-b|,\ |b-c|,\ |c-d|,\ |d-a|.$$

Dakle, računaju se apsolutne vrijednosti razlika susjednih brojeva u danom cikličkom poretku.

(a) Hoćemo li uvijek, neovisno o početnom izboru brojeva, doći do četvorke samih nula?

(b) Koji je odgovor ako na početku dopuštamo četvorku realnih brojeva?

Na primjer, polazeći od 1, 2, 5, 10, dobivamo slijed četvorki:

1, 3, 5, 9
2, 2, 4, 8
0, 2, 4, 6
2, 2, 2, 6
0, 0, 4, 4
0, 4, 0, 4
4, 4, 4, 4
0, 0, 0, 0

Poucak 55.indd 13 21.10.2013. 14:43:37

Doista smo u 8 koraka došli do četvorke samih nula. Učenik može, npr. programskim paketom *Mathematica*, lako generirati gornji slijed te po volji mijenjati polaznu četvorku. Kratki programski kod je:

```
{a,b,c,d}={1,2,5,10};
While[{a,b,c,d}!={0,0,0,0},
   {aa,bb,cc,dd}={Abs[a-b],Abs[b-c],Abs[c-d],Abs[d-a]};
   {a,b,c,d}={aa,bb,cc,dd};
   Print[a,", ",b,", ",c,", ",d]];
```

Iz tako dobivenih primjera nije lako uočiti nikakvo pravilo za generiranje gornjeg slijeda, ali učenik može nasluti kako svaki put, već nakon nekoliko koraka, dolazimo do parnih brojeva. Da je doista tako, može se dokazati na sljedeći način.

Primijetimo da cijeli brojevi x i $|x|$ imaju istu parnost, pa stoga brojevi dobiveni nakon prvog koraka imaju iste parnosti kao i

$$a-b,\ b-c,\ c-d \text{ i } d-a.$$

Ponavljajući posljednju operaciju bez apsolutnih vrijednosti, ne moramo voditi računa o predznacima razlika. Lako se izračunaju iduća tri koraka:

$a-2b+c$	$b-2c+d$	$c-2d+a$	$d-2a+b$
$a-3b+3c-d$	$b-3c+3d-a$	$c-3d+3a-b$	$d-3a+3b-c$
$2a-4b+6c-4d$	$2b-4c+6d-4a$	$2c-4d+6a-4b$	$2d-4a+6b-4c$

Posljednji su brojevi parni pa se i u našem zadatku nakon četiri koraka uvijek dolazi do parnih brojeva.

Sada možemo dovršiti dokaz tvrdnje iz (a) dijela zadatka. Ako primijenimo isto rezoniranje na polovine dobivenih brojeva, zaključit ćemo da se nakon najviše 8 koraka od početka dobiva četvorka brojeva djeljivih s 4. Induktivno se pokazuje da za svaki prirodni broj k nakon konačno mnogo koraka dolazimo do četvorke brojeva djeljivih s 2^k. S druge strane, nakon prvog koraka vrijednost $\max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$ više ne može rasti jer je razlika dvaju nenegativnih brojeva najviše jednaka većemu od njih. Kako će nakon dovoljno mnogo koraka i za dovoljno veliki k svi brojevi biti djeljivi s 2^k, nenegativni i manji od 2^k, zaključujemo da oni moraju biti 0. Time je potvrdno odgovoreno na pitanje u (a) dijelu zadatka.

Ako bi učenik pokušao na sličan način eksperimentom odgovoriti na pitanje iz (b) dijela, lako bi mogao doći do pogrešnog zaključka. Naivni će primjeri već u nekoliko koraka dovesti do nula, a ništa bolje neće biti ni sa slučajno odabranim decimalnim brojevima. Koji je tome razlog? Ako učenik listu generira numerički, aproksimirajući konačnim decimalnim zapisima, onda računalo efektivno radi s racionalnim brojevima. Svođenjem na zajednički nazivnik i korištenjem (a) dijela, zaključujemo da opet moramo kad-tad doći do nula. Dakle, ako protuprimjer postoji, on ne može biti sastavljen isključivo od racionalnih brojeva.

Ovaj nas zaključak može navesti da pokušamo računati simbolički, s čime mnogi programski paketi nemaju problema. Ipak, i uz egzaktni račun, gornji program u *Mathematici* će nam za većinu početnih četvorki, poput 0, 1, e, π , vrlo brzo vratiti nule. Potrebno je pažljivije konstruirati protuprimjer. Pretpostavimo da se u svakom koraku elementi četvorke pojavljuju u rastućem poretku. Pokušajmo naći primjer kod kojeg se nakon svakog koraka četvorka jednostavno pomnoži s nekim faktorom $\lambda > 0$. Dakle, zbog naše pretpostavke $a \le b \le c \le d$,

$$(b - a, c - b, d - c, c - a) = \lambda\,(a, b, c, d).$$

To je homogeni sustav u a, b, c, d pa ga još smijemo normalizirati s $d = 1$. Rješavanje brzo vodi na

$$(a, b, c, d) = (q^3, q^2, q, 1), \text{ uz oznaku } q = \frac{1}{1+\lambda},$$

i na kubnu jednadžbu po ,

$$1 - \frac{1}{(1+\lambda)^3} = \lambda,$$

tj. $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2 = 0$.

Analizom predznaka funkcije na lijevoj strani lako se vidi da ta jednadžba ima rješenje λ između 0 i 1. Prema odabiru četvorke definirane kao gore, nakon n koraka dolazimo do

$$\lambda^n q^3, \lambda^n q^2, \lambda^n q, \lambda^n$$

pa prema tome nikad nećemo dobiti četiri nule.

Učenik može koristiti programski paket *Mathematica* kako bi testirao gornji protuprimjer. Ovdje x označava rješenje spomenute kubne jednadžbe.

```
x=Root[(#^3+2#^2-2)&,1]; q=1/(1+x);
{a,b,c,d}={q^3,q^2,q,1};
```

Programski kod s početka ovog primjera zavrtjet će se u beskonačnoj petlji. Prema tome, (b) dio zadatka ima negativan odgovor. Već i numerička aproksimacija tog protuprimjera zaokružena na 5 znamenaka generira slijed duljine 23, što je vjerojatno mnogo više nego što bismo dobili nasumičnim pogađanjem.

Nadamo se da smo gornjim primjerima uspjeli čitatelju prenijeti barem poneku novu ideju kako pristupiti matematičkom problemu koji mu se isprva čini nepristupačan ili suviše apstraktan. Mlađeg će čitatelja svakako ohrabriti činjenica da i poznati matematičari trebaju dosta vremena kako bi si približili određene koncepte ili dočarali složene dokaze. Ako u pojedinom slučaju eksperimentiranje i ne dovede do samog rješenja zadatka, još uvijek nam može pomoći razviti intuiciju u vezi problema.

„Ako mogu dati apstraktni dokaz nečega, ja sam razumno zadovoljan. Ali ako mogu dobiti konkretni, računski dokaz i zapravo proizvesti brojeve, mnogo sam zadovoljniji."

J. Milnor

Završimo s nekoliko zadataka za samostalnu vježbu.

Zadatak 1. Izračunajte zbroj $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

Uputa i rješenje: Naredbe Simplify i FullSimplify u *Mathematici* nisu u stanju u razumnom vremenu izračunati tu sumu i srediti izraz. S druge strane, taj se zbroj može brzo i precizno izračunati numerički na 20-ak znamenaka. ISC lako prepoznaje taj izraz kao $1-\frac{\sqrt{21}}{21}$.

Za dokaz jednostavno treba zapisati opći član sume u obliku $\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Zadatak 2. Na koliko se načina može triangulirati konveksni n-terokut, tj. podijeliti dijagonalama na trokute?

Uputa i rješenje: Prebrojavanje za n = 3, 4, 5, 6, 7, 8 i korištenje OEIS ukazuju da je riječ o Catalanovim brojevima. Preciznije, rezultat je C_{n-2}, pri čemu je $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Za dokaz čitatelj može pogledati bilo koji udžbenik iz kombinatorike u kojemu se spominju Catalanovi brojevi i izvodi pripadna rekurzivna relacija, npr. [8].

Zadatak 3. Standardno se sa $d(n)$ označava broj djelitelja prirodnog broja n. Poznato je da se taj niz ponaša prilično kaotično s numeričkog gledišta, ali zato prosjeci

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(k)$$

rastu „jednako brzo" kao ln n. Ustvari, razlike

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(k) - \ln n$$

se za velike vrijednosti od n približavaju broju $2c - 1$, pri čemu je c jedna poznatija numerička konstanta s decimalnim zapisom

$$c = 0.57721566490153286060651209008 2...$$

Otkrijte ime te konstante, njezinu standardnu oznaku i njenu uobičajenu definiciju.

Zadatak 4. Ako je funkcija *f* zadana formulom $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$, izračunajte

$$\underbrace{f(f(f(\ldots f(f}_{n \text{ puta}}(0))\ldots)))$$

za svaki prirodni broj *n*.

Uputa: Računajući prvih nekoliko članova niza, naslutite njegov opći oblik. Primjer jednostavnog programskog koda u *Mathematici* je

```
f[x_]=2/(3-x); a=0;

For[k=1,k<=10,k++,a=f[a];Print[a]];
```

Naslućenu formulu dokažite matematičkom indukcijom.

Napomenimo da se mnogo zadataka koji nadilaze školsko gradivo može naći u odličnoj knjizi [2] koja je i nama poslužila kao svojevrsna inspiracija za pisanje ovoga rada.

Literatura:

1. E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, drugo izdanje, A K Peters/CRC Press, 2001.
2. J. M. Borwein, D. H. Bailey, *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, drugo izdanje, A K Peters, 2008.
3. Inverse Symbolic Calculator Plus, http://isc.carma.newcastle.edu.au
4. Z. Kadelburg i P. Mladenović, *Savezna takmičenja iz matematike*, Beograd, 1990.
5. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS), http://oeis.org
6. G. Pólya, *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*, Wiley, 1968.
7. D. O. Shklarsky, N. N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, Dover, 1993.
8. D. Veljan, *Kombinatorika i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.
9. Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 8.0, Champaign, IL, 2010.